제 2 교시

수학 영역(가 형)

주의사항

30문항이 아닙니다! 어렵지도 않습니다!!

총 20문항, 60분입니다.

한문제가 틀리더라도 처음부터 다시 20문항을 풀어야 하는 교재입니다.

무의식을 단련하는 것은 쉽지 않습니다. 묵묵하게, 실수를 하지 않도록

틀리지 않게 계산하는 것이 이 교재의 목표입니다.

1. $0<t<\frac{\pi}{2}$ 일 때, 곡선 $y=\sin^2 x$ 위의 점 $(t,\ \sin^2 t)$ 에서의 접선과 직선 $x=\frac{\pi}{2}$ 가 만나는 점의 y 좌표를 $f(t)$ 라 하자. $f(t)$ 의 최댓값은?

① $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}$　② $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$　③ $\frac{\pi}{2}$
④ $\frac{\pi}{4}+1$　⑤ $\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}$

2. $0<x<2\pi$ 에서 두 곡선 $y=4\cos^2 x-3,\ y=a\cos x-a$ 의 교점이 존재하고 그 교점에서의 두 곡선의 접선이 일치하도록 하는 양수 a 의 값은?

① 4　② $\frac{9}{2}$　③ 5
④ $\frac{11}{2}$　⑤ 6

3. $x\geq 0$ 에서 정의된 함수

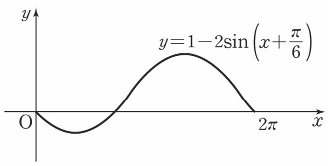
$$f(x)=e^{-x}x^2(x^2+ax+5)$$

에 대하여 $f'(1)=0$ 일 때, $f(x)$ 는 $x=b$ 에서 최댓값을 갖는다. $b-a$ 의 값을 구하시오. (단, $a,\ b$ 는 상수이다.)

4. 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은?

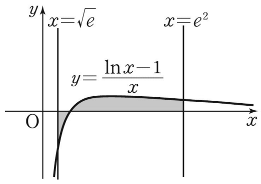
① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

5. 그림과 같이 곡선 $y=1-2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ $(0\le x\le 2\pi)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?



① $\frac{\pi}{3}+3\sqrt{2}$ ② $\frac{\pi}{3}+4\sqrt{3}$ ③ $\frac{2}{3}\pi+3\sqrt{2}$ ④ $\frac{2}{3}\pi+4\sqrt{3}$ ⑤ $\pi+3\sqrt{2}$

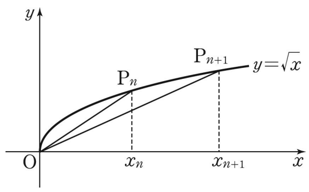
6. 곡선 $y=\frac{\ln x-1}{x}$과 x축 및 직선 $x=\sqrt{e}$, 직선 $x=e^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이는?



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{5}{8}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{7}{8}$ ⑤ 1

7. 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위에 점 $\mathrm{P}_n(x_n,\ \sqrt{x_n})$이 다음 조건을 만족시킨다.

(단, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)



(가) $x_1=1,\ x_2=4$ (나) 모든 자연수 n에 대하여 $x_n<x_{n+1}$이다.

그림과 같이 원점 O에 대하여 두 선분 OP_n, OP_{n+1}과 곡선 $y=\sqrt{x}$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_n이라 하면 수열 $\{S_n\}$은 공비가 $\frac{4}{5}$인 등비수열을 이룬다. $\lim_{n\to\infty}x_n^{\frac{3}{2}}$의 값을 구하시오.

8. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)=\int_0^x (a-t)e^t dt$의 최댓값이 32이다. 곡선 $y=3e^x$과 두 직선 $x=a$, $y=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

9. $0<x<\frac{\pi}{2}$에서 정의된 함수 $f(x)=e^{2x}\cos x$에 대한 설명 중 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $f'(x)=0$인 실수 x가 열린 구간 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$에 존재한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$의 그래프는 열린 구간 $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$에서 아래로 볼록하다.

ㄷ. 함수 $f(x)$는 열린 구간 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$에서 변곡점을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

10. 함수 $f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x-2}$는 $x=\alpha$에서 극솟값을 갖는다. $\cos\alpha$의 값은? (단, $0<\alpha<2\pi$이다.)

① $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

11. 함수 $f(x)=x\ln(x^2+1)$에 대하여

$f'(1)+f''(-1)$의 값은?

① $\ln 2-1$ ② $2\ln 2-1$ ③ $1+\ln 2$
④ $2+\ln 2$ ⑤ $2+2\ln 2$

12. 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 $f'(x)>0,\ f''(x)>0$이다.
(나) $f(0)=0,\ f(1)=1,\ f'(0)=\frac{1}{4},\ f'(1)=2$

함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하고, $g(x)$의 이계도함수가 존재할 때, $\int_0^1 \left| \frac{g''(g(x))}{f'(g(x))} \right| dx=\frac{q}{p}$이다.
$p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

13. 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\frac{1}{2}x^4-x^2+2xf(x)=2\int_1^x f(t)dt$$

를 만족시킬 때, 함수 $f(x)$의 극솟값은?

① $-\frac{11}{12}$ ② -1 ③ $-\frac{13}{12}$
④ $-\frac{7}{6}$ ⑤ $-\frac{5}{4}$

14. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가

$$xf(x)=(x^2-2x+2)e^x+\int_1^x f(t)dt$$

를 만족시킬 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $f'(0)=0$)

[보 기]

ㄱ. $f(2)-f(1)=e^2$

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 가진다.

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x=-1$에서 변곡점을 갖는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ,ㄴ

④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

15. 연속함수 $f(x)$가

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}+\int_0^{\sqrt{3}} 2tf(t)dt$$

를 만족시킬 때, $\int_0^{\sqrt{3}} xf(x)dx$의 값은?

① $-\frac{5}{6}$ ② -1 ③ $-\frac{7}{6}$

④ $-\frac{4}{3}$ ⑤ $-\frac{3}{2}$

16. $0\le x\le 2\pi$에서 두 곡선 $y=\sin x$와 $y=1-\cos x$로 둘러싸인 두 부분의 넓이의 합을 S_1, 두 부분의 넓이의 차를 S_2라 할 때, S_1+S_2의 값은?

① $3\pi+1$ ② $3\pi+2$ ③ $3\pi+3$

④ $3\pi+4$ ⑤ $3\pi+5$

17. 곡선 $y=\int_0^x \frac{x-t}{\cos^2 t}\,dt \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$의 $x=0$에서 $x=\frac{\pi}{6}$까지의 길이가 $\frac{b}{a}\times\ln 3$이다. a^2+b^2의 값을 구하시오.

(단 a와 b는 서로소인 자연수이다.)

18. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(k,\ f(k))$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)$는 $x=1$, $x=3$에서 극값을 갖는다. (나) $x<k$이면 $f(x)<g(x)$이고, $x>k$이면 $f(x)>g(x)$이다.

$f(2k)-g(2k)$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.)

19. 닫힌 구간 $[0,\ \pi]$에서 정의된 함수 $f(x)=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. 함수 $f(x)$의 극댓값이 존재한다.
ㄴ. $0 \le x \le \pi$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \ge 0$이다.
ㄷ. 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이 존재한다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 함수 $f(x)=\displaystyle\int_0^x (t+a)e^{t^2-2t}dt$가 $x=1$에서 극값 b를 가질 때, 두 상수 $a,\ b$의 합 $a+b$의 값은?

① $\dfrac{1-e}{2e}$　② $\dfrac{1-2e}{2e}$　③ $\dfrac{1-3e}{2e}$
④ $\dfrac{1-4e}{2e}$　⑤ $\dfrac{1-5e}{2e}$

정답 및 해설

1) 정답 ②

$y=\sin^2 x$ 에서 $y'=2\sin x\cos x$

곡선 $y=\sin^2 x$ 위의 점 $(t,\ \sin^2 t)$ 에서 접선의 기울기는

$2\sin t\cos t$ 이므로 접선의 방정식은

$y-\sin^2 t=2\sin t\cos t(x-t)$ 에서

$y=2x\sin t\cos t+\sin^2 t-2t\sin t\cos t$ ……㉠

직선 ㉠의 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 일 때 y 좌표가 $f(t)$ 이므로

$f(t)=\pi\sin t\cos t+\sin^2 t-2t\sin t\cos t$

$=\sin t(\pi\cos t+\sin t-2t\cos t)$

$f'(t)=\cos t(\pi\cos t+\sin t-2t\cos t)$

$+\sin t(-\pi\sin t+\cos t-2\cos t+2t\sin t)$

$(\pi-2t)(\cos^2 t-\sin^2 t)$

$0<t<\dfrac{\pi}{2}$ 일 때 $f'(t)=0$ 에서 $x-2\pi\neq 0$ 이므로

$\cos^2 t-\sin^2 t=0$

그런데 $0<t<\dfrac{\pi}{2}$ 이므로

$\cos t=\sin t$

따라서 $t=\dfrac{\pi}{4}$

함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗	극대	↘	

함수 $f(t)$ 는 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 에서 극대이면서 최대가 된다.

따라서 $f(t)$ 의 최댓값은

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}-2\cdot\dfrac{\pi}{4}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}$

2) 정답 ①

$f(x)=4\cos^2 x-3,\ g(x)=a\cos x-a$ 라 하자.

두 곡선 $y=f(x),\ y=g(x)$ 의 교점의 x 좌표를 t 라 하면

$f(t)=g(t)$ 이므로

$4\cos^2 x-3=a\cos x-a$

$4\cos^2 x-a\cos x+a-3=0$ ……㉠

$f'(x)=8\cos x(-\sin x)=-8\sin x\cos x$

$g'(x)=-a\sin x$

이고 교점에서 두 곡선의 접선이 일치하므로

$f'(t)=g'(t)$ 에서

$-8\sin t\cos t=-a\sin t$

$\sin t(8\cos t-a)=0$

$\sin t=0$ 또는 $\cos t=\dfrac{a}{8}$ ……㉡

(i) $\sin t=0$ 일 때

$t=\pi$ 이고 $\cos t=-1$ 이므로 ㉠에 대입하면

$4+a+a-3=0$ 에서

$a=-\dfrac{1}{2}$ 이므로 양수 a 는 존재하지 않는다.

(ii) $\cos t=\dfrac{a}{8}$ 일 때

㉠에서

$4\left(\dfrac{a}{8}\right)^2-a\left(\dfrac{a}{8}\right)+a-3=0$

$a^2-16a+48=0$

$(a-12)(a-4)=0$

따라서 $a=12$ 또는 $a=4$

$a=12$ 이면 $\cos t=\dfrac{3}{2}$ 을 만족시키는 실수 t 가 존재하지 않으므로 성립하지 않는다.

$a=4$ 이면 $\cos t=\dfrac{1}{2}$ 이므로 $t=\dfrac{\pi}{3},\ t=\dfrac{5}{3}\pi$ 일 때 성립한다.

(i), (ii)에서 구하는 양수 a 의 값은 4이다.

3) 정답 9

$f(x)=e^{-x}(x^4+ax^3+5x^2)$ 에서

$f'(x)=-e^{-x}(x^4+ax^3+5x^2)+e^{-x}(4x^3+3ax^2+10x)$

$=e^{-x}\{-x^4+(4-a)x^3+(3a-5)x^2+10x\}$

$f'(1)=0$ 에서

$f'(1)=e^{-1}(8+2a)=0$

이므로 $a=-4$

이때

$f(x)=e^{-x}x^2(x^2-4x+5)$

$f'(x)=e^{-x}(-x^4+8x^3-17x^2+10x)$

$=-e^{-x}x(x^3-8x^2+17x-10)$

$=-e^{-x}x(x-1)(x-2)(x-5)$

$f'(x)=0$ 에서 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=5$

$f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	↗	$\dfrac{2}{e}$	↘	$\dfrac{4}{e^2}$	↗	$\dfrac{250}{e^4}$	↘

$f(x)$ 는 $x=1,\ x=5$ 에서 극대이고

$f(5)-f(1)=\dfrac{250}{e^2}-\dfrac{2}{e}=\dfrac{2(125-e^4)}{e^5}>0$

이므로 $x\geq 0$ 일 때, $f(x)$ 는 $x=5$ 에서 최댓값을 갖는다.

따라서 $b=5$ 이므로

$b-a=5-(-4)=9$

4) 정답 ③

$f(x)=x\sqrt{1-x^2}$ 에서

$$f'(x)=\sqrt{1-x^2}+x\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ (\text{단, } -1<x<1)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로 닫힌 구간 $[-1,\ 1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	극소	↗	극대	↘	0

함수 $f(x)$ 는 $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 일 때 극소이고, $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 일 때 극대이므로 극솟값은

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}$$

극댓값은

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}$$

구간의 양 끝점에서의 함숫값은 $f(-1)=f(1)=0$ 이므로 최댓값은 $M=\frac{1}{2}$, 최솟값은 $m=-\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 $M-m=\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=1$

5) 정답 ④

$0\le x\le 2\pi$ 에서 $\frac{\pi}{6}\le x+\frac{\pi}{6}\le 2\pi+\frac{\pi}{6}$

방정식 $y=1-2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$, 즉 $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ 을 풀면

$x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x+\frac{\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{6}$ 또는 $x+\frac{\pi}{6}=2\pi+\frac{\pi}{6}$ 이므로

$x=0$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=2\pi$

$0\le x\le\frac{2}{3}\pi$ 일 때 $1-2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\le 0$,

$\frac{2}{3}\pi\le x\le 2\pi$ 일 때 $1-2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\ge 0$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^{2\pi}\left|1-2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right|dx$$

$$=\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\left\{-1+2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right\}dx+\int_{\frac{2}{3}\pi}^{2\pi}\left\{1-2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right\}dx$$

$$=\left[-x-2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}+\left[x+2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{2\pi}$$

$$=\left(-\frac{2}{3}\pi-2\cos\frac{5}{6}\pi\right)-\left(0-2\cos\frac{\pi}{6}\right)$$

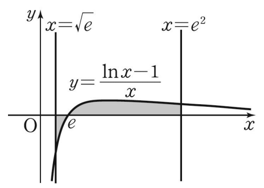
$$+\left\{2\pi+2\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right\}-\left(\frac{2}{3}\pi+2\cos\frac{5}{6}\pi\right)$$

$$=\frac{2}{3}\pi+4\sqrt{3}$$

6) 정답 ②

곡선 $y=\frac{\ln x-1}{x}$ 과 x축과 교점의 x좌표는 $\frac{\ln x-1}{x}=0$ 에서

$\ln x=1$ 이므로 $x=e$



이때 $\sqrt{e}<x<e$ 에서 $y<0$ 이고

$e<x<e^2$ 에서 $y>0$ 이므로

구하는 넓이를 S 라 하면

$$S=-\int_{\sqrt{e}}^{e}\frac{\ln x-1}{x}dx+\int_e^{e^2}\frac{\ln x-1}{x}dx$$

$\ln x-1=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$ 이고

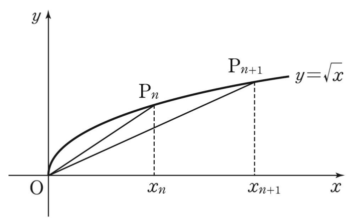
$x=\sqrt{e}$ 일 때 $t=-\frac{1}{2}$, $x=e$ 일 때 $t=0$, $x=e^2$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$S=-\int_{-\frac{1}{2}}^{0}t\,dt+\int_0^1 t\,dt$$

$$=-\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}+\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$$

7) 정답 **36**



x축 위에 두 점 $X_n(x_n,\ 0)$, $X_{n+1}(x_{n+1},\ 0)$ 을 잡는다.

$S_n=(\triangle OP_nX_n$ 의 넓이$)+($도형 $X_nX_{n+1}P_{n+1}P_n$ 의 넓이$)$

$-(\triangle OX_{n+1}P_{n+1}$ 의 넓이$)$

$$=\frac{1}{2}x_n\sqrt{x_n}+\int_{x_n}^{x_{n+1}}\sqrt{x}\,dx-\frac{1}{2}x_{n+1}\sqrt{x_{n+1}}$$

$= \left[\dfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_{x_n}^{x_{n+1}} - \dfrac{1}{2}\left(x_{n+1}^{\frac{3}{2}} - x_n^{\frac{3}{2}} \right)$

$= \dfrac{1}{6}\left(x_{n+1}^{\frac{3}{2}} - x_n^{\frac{3}{2}} \right)$

이므로

$S_n = \dfrac{1}{6}\left(x_{n+1}^{\frac{3}{2}} - x_n^{\frac{3}{2}} \right)$ ⋯⋯ ㉠

또한, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$이므로

$S_1 = \dfrac{7}{6}$

수열 $\{S_n\}$은 공비가 $\dfrac{4}{5}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{7}{6}}{1-\frac{4}{5}} = \frac{35}{6}$$

또한, ㉠에서 양변에 6을 곱하고 n대신에 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 대입하여 각 변끼리 더하면

$6S_1 + 6S_2 + 6S_3 + \cdots + 6S_{n-1}$

$= \left(x_2^{\frac{3}{2}} - x_1^{\frac{3}{2}} \right) + \left(x_3^{\frac{3}{2}} - x_2^{\frac{3}{2}} \right) + \left(x_4^{\frac{3}{2}} - x_3^{\frac{3}{2}} \right) + \cdots + \left(x_n^{\frac{3}{2}} - x_{n-1}^{\frac{3}{2}} \right)$

$= x_n^{\frac{3}{2}} - x_1^{\frac{3}{2}}$

$= x_n^{\frac{3}{2}} - 1$

따라서 $x_n^{\frac{3}{2}} = 1 + 6\sum_{k=1}^{n-1} S_k$ 이므로

$\lim_{n\to\infty} x_n^{\frac{3}{2}} = 1 + 6 \times \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} S_k$

$= 1 + 6 \sum_{n=1}^{\infty} S_n$

$= 1 + 6 \times \dfrac{35}{6}$

$= 36$

8) 정답 96

$f(x) = \int_0^x (a-t)e^t dt$ 에서 정적분과 미분의 관계에 의하여

$f'(x) = \dfrac{d}{dx}\int_0^x (a-t)e^t dt = (a-x)e^x$

이므로 $f'(x) = 0$에서 $x = a$

따라서 함수 $f(x)$는 $x = a$에서 극댓값이면서 최댓값을 갖는다.

부분적분법에 의하여

$f(x) = \int_0^x (a-t)e^t dt$

$= \left[(a-t)e^t \right]_0^x - \int_0^x (-e^t) dt$

$= \left[(a-t)e^t \right]_0^x + \left[e^t \right]_0^x$

$= (a-x)e^x - a + e^x - 1$

$= (a+1-x)e^x - a - 1$

이때 함수 $f(x)$가 $x = a$에서 최댓값 32를 가지므로

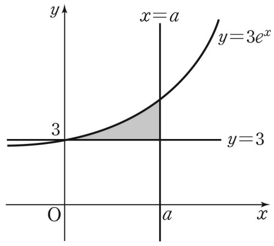
$f(a) = e^a - a - 1 = 32$

$e^a - a = 33$

곡선 $y = 3e^x$과 직선 $y = 3$이 만나는 점의 x좌표를 t라 하면

$3e^t = 3$에서 $t = 0$

따라서 곡선 $y = 3e^x$과 두 직선 $x = a$, $y = 3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는



$\int_0^a (3e^x - 3)dx = \left[3e^x - 3x \right]_0^a$

$= (3e^a - 3a) - (3 - 0)$

$= 3(e^a - a) - 3$

$= 3 \times 33 - 3$

$= 96$

9) [정답] ③

ㄱ. 함수 $y = f(x)$에 대하여

$f'(x) = 2e^{2x}\cos x - e^{2x}\sin x$

$= e^{2x}(2\cos x - \sin x)$

이므로 $f'(x) = 0$에서

$e^{2x}(2\cos x - \sin x) = 0$

$e^{2x} > 0$이므로

$2\cos x - \sin x = 0$

$2 = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \tan x$

$\tan\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3} < 2 = \tan x$ 이므로 $\dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{\pi}{2}$ (참)

ㄴ. $f''(x) = 2e^{2x}(2\cos x - \sin x) + e^{2x}(-2\sin x - \cos x)$

$= e^{2x}(4\cos x - 2\sin x - 2\sin x - \cos x)$

$= 3^{2x}(3\cos x - 4\sin x)$

$= 5e^{2x}\sin(x+\alpha)$ $\left(\text{단, } \sin\alpha = \dfrac{3}{5},\ \cos\alpha = -\dfrac{4}{5} \right)$

이때 α는 제 2사분면의 각이고 $\sin\alpha = \dfrac{3}{5} > \dfrac{1}{2} = \sin\dfrac{5}{6}\pi$에서

$\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{5}{6}\pi$이다.

그러므로 열린 구간 $\left(0, \dfrac{\pi}{6}\right)$에서 $\dfrac{\pi}{2} < x + \alpha < \pi$이고,

$\sin(x+\alpha) > 0$이므로 $f''(x) > 0$이다.

따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하다. (참)

ㄷ. $f''(x) = e^{2x}(3\cos x - 4\sin x) = 0$에서

$f''(\alpha) = 0$이라 하면 $e^{2x} > 0$이므로

$3\cos\alpha - 4\sin\alpha = 0$

$\frac{3}{4}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$

$0<\tan\alpha<1$이므로

$0<\alpha<\frac{\pi}{4}$

또한 $x<\alpha$일 때 $f''(x)>0$, $x>\alpha$일 때 $f''(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 변곡점을 갖는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

10) [정답] ④

$f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x-2}=1+\frac{2}{\sin x+\cos x-2}$이므로

$f'(x)=-\frac{2(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x-2)^2}$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=\sin x$

$\therefore\ x=2n\pi+\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=2n\pi+\frac{5}{4}\pi$ (단, n은 정수)

열린 구간 $(0,\ 2\pi)$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	(2π)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↗		↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2n\pi+\frac{\pi}{4}$에서 극솟값을 갖고,

$x=2n\pi+\frac{5}{4}\pi$에서 극댓값을 갖는다.

$0<\alpha<2\pi$이므로 $\alpha=\frac{\pi}{4}$

$\therefore\ \cos\alpha=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

11) [정답] ①

$f(x)=x\ln(x^2+1)$에서

$f'(x)=(x)'\ln(x^2+1)+x\{\ln(x^2+1)\}'$

$=\ln(x^2+1)+\frac{2x^2}{x^2+1}$

$f''(x)=\frac{2x}{x^2+1}+\frac{4x(x^2+1)-2x^2\times 2x}{(x^2+1)^2}$

$=\frac{2x}{x^2+1}+\frac{4x}{(x^2+1)^2}$

따라서

$f'(1)=\ln 2+1$,

$f''(-1)=-1-1=-2$

이므로

$f'(1)+f''(-1)=\ln 2+1+(-2)$

$=\ln 2-1$

12) [정답] 9

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$f(g(x))=x$

이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=1$이므로

$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$

$\therefore\ \int_0^1\left|\frac{g''(g(x))}{f'(g(x))}\right|dx=\int_0^1|g''(g(x))g'(x)|dx$ …… ㉠

이때 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 $f'(x)>0$, $f''(x)>0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하면서 증가한다.

한편 $y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 위로 볼록하면서 증가한다.

$\therefore\ g'(x)>0$, $g''(x)<0$

㉠에서 $g(x)=t$로 놓으면 $g'(x)\frac{dx}{dt}=1$이고

$x=0$일 때 $t=g(0)=0$,

$x=1$일 때 $t=g(1)=1$이므로

$\int_0^1|g''(g(x))g'(x)|dx=-\int_0^1 g''(g(x))g'(x)dx$

$=-\int_0^1 g''(t)dt$

$=-\Big[\ g'(t)\ \Big]_0^1$

$g'(0)-g'(1)$

$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$이고 $g(0)=0$, $g(1)=1$, $f'(0)=\frac{1}{4}$, $f'(1)=2$이므로

$g'(0)=\frac{1}{f'(g(0))}=\frac{1}{f'(0)}=4$

$g'(1)=\frac{1}{f'(g(1))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \int_0^1\left|\frac{g''(g(x))}{f'(g(x))}\right|dx=g'(0)-g'(1)$

$=4-\frac{1}{2}$

$=\frac{7}{2}$

따라서 $p=2$, $q=7$이므로

$p+q=9$

13) [정답] ③

$\frac{1}{2}x^4-x^2+2xf(x)=2\int_1^x f(t)dt$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x^3-2x+2f(x)+2xf'(x)=2f(x)$

$2xf'(x)=-2x^3+2x$

$f'(x)$는 다항함수이므로

$f'(x)=-x^2+1$

$\therefore\ f(x)=\int(-x^2+1)dx$

$=-\frac{1}{3}x^3+x+C$ (단, C는 적분상수) ……㉡

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\frac{1}{2}-1+2f(1)=0$

$\therefore\ f(1)=\frac{1}{4}$

㉡에서 $f(1)=-\frac{1}{3}+1+C=\frac{2}{3}+C$ 이므로

$\frac{1}{4}=\frac{2}{3}+C$

$\therefore\ C=-\frac{5}{12}$

$\therefore\ f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x-\frac{5}{12}$

$f'(x)=-x^2+1=-(x+1)(x-1)=0$ 에서

$x=-1$ 또는 $x=1$이므로 삼차함수 $f(x)$는

$x=-1$에서 극솟값 $f(-1)=-\frac{13}{12}$을 갖는다.

다른 풀이

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq0$)로 놓으면

$\frac{1}{2}x^4-x^2+2x(ax^3+bx^2+cx+d)$

$=2\int_1^x(at^3+bt^2+ct+d)dt$

$\left(\frac{1}{2}+2a\right)x^4+2bx^3+(2c-1)x^2+2dx$

$=2\left[\frac{a}{4}t^4+\frac{b}{3}t^3+\frac{c}{2}t^2+dt\right]_1^x$

$=\frac{a}{2}x^4+\frac{2b}{3}x^3+cx^2+2dx-\frac{a}{2}-\frac{2b}{3}-c-2d$

따라서 $\frac{1}{2}+2a=\frac{a}{2}$, $2b=\frac{2b}{3}$, $2c-1=c$,

$-\frac{a}{2}-\frac{2b}{3}-c-2d=0$이므로

$a=-\frac{1}{3}$, $b=0$, $c=1$, $d=-\frac{5}{12}$

$\therefore\ f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x-\frac{5}{12}$

$f'(x)=-x^2+1=-(x+1)(x-1)=0$ 에서

$x=-1$ 또는 $x=1$이므로 삼차함수 $f(x)$는

$x=-1$에서 극솟값 $f(-1)=-\frac{13}{12}$을 갖는다.

14) [정답] ⑤

$xf(x)=(x^2-2x+2)e^x+\int_1^x f(t)dt$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=e$ $\left(\because\ \int_1^1 f(t)dt=0\right)$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=(2x-2)e^x+(x^2-2x+2)e^x+f(x)$

$xf'(x)=x^2e^x$

$x\neq0$일 때 $f'(x)=xe^x$

그런데 $f'(0)=0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=xe^x$

$\therefore\ f(x)=\int xe^x dx$

$=xe^x-e^x+C$

$=(x-1)e^x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(1)=e$이므로 $C=e$

$\therefore\ f(x)=(x-1)e^x+e$

ㄱ. $f(2)-f(1)=e^2+e-e=e^2$ (참)

ㄴ. $f'(x)=xe^x=0$에서 $x=0$

$x<0$일 때, $f'(x)<0$

$x>0$일 때, $f'(x)>0$

이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다. (참)

ㄷ. $f''(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$

$f''(x)=0$에서 $x=-1$

$x<-1$일 때, $f''(x)<0$

$x>-1$일 때, $f''(x)>0$

이므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 변곡점을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ,ㄴ,ㄷ이다.

15) [정답] ③

$\int_0^{\sqrt{3}}2tf(t)dt=a$ (a는 상수)로 놓으면

$f(x)=\sqrt{x^2+1}+a$이므로

$a=\int_0^{\sqrt{3}}2tf(t)dt$

$=\int_0^{\sqrt{3}}(2t\sqrt{t^2+1}+2at)dt$

$=\int_0^{\sqrt{3}}2t\sqrt{t^2+1}\,dt+\left[at^2\right]_0^{\sqrt{3}}$

$=\int_0^{\sqrt{3}}2t\sqrt{t^2+1}\,dt+3a$

$\int_0^{\sqrt{3}}2t\sqrt{t^2+1}\,dt$에서

$t^2+1=u$로 놓으면 $2t=\frac{du}{dt}$이고

$t=0$일 때 $u=1$, $t=\sqrt{3}$일 때 $u=4$이므로

$\int_0^{\sqrt{3}}2t\sqrt{t^2+1}\,dt=\int_1^4\sqrt{u}\,du$

$=\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$

$= \frac{2}{3}(8-1)$

$= \frac{14}{3}$

따라서 $\frac{14}{3}+3a=a$에서

$a=-\frac{7}{3}$

즉, $\int_0^{\sqrt{3}} 2xf(x)dx=-\frac{7}{3}$이므로

$2\int_0^{\sqrt{3}} xf(x)dx=-\frac{7}{3}$

$\therefore \int_0^{\sqrt{3}} xf(x)dx=-\frac{7}{6}$

16) [정답] ④

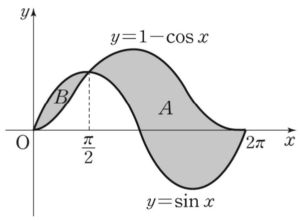
$\sin x=1-\cos x$에서 $\sin x+\cos x=1$

$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1,\quad \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0\le x\le 2\pi$에서 $\frac{\pi}{4}\le x+\frac{\pi}{4}\le 2\pi+\frac{\pi}{4}$이므로

$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$ 또는 $x+\frac{\pi}{4}=2\pi+\frac{\pi}{4}$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=2\pi$



$0\le x\le 2\pi$에서 두 곡선으로 둘러싸인 두 부분 중 큰 영역의 넓이를 A, 작은 영역의 넓이를 B라 하면

$S_1+S_2=(A+B)+(A-B)$

$=2A$

$A=\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\{(1-\cos x)-\sin x\}dx$

$=\Big[x-\sin x+\cos x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}$

$=(2\pi+1)-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$

$=\frac{3\pi}{2}+2$

$\therefore S_1+S_2=2A=2\left(\frac{3\pi}{2}+2\right)=3\pi+4$

17) [정답] 5

$y=x\int_0^x \frac{1}{\cos^2 t}\,dt-\int_0^x \frac{t}{\cos^2 t}\,dt$

$\therefore y'=\int_0^x \frac{1}{\cos^2 t}\,dt+x\times\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{x}{\cos^2 x}$

$=\int_0^x \sec^2 t\,dt$

$=\Big[\tan t\Big]_0^x$

$=\tan x$

따라서 구하는 곡선의 길이를 l이라 하면

$l=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+\tan^2 x}\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sec x\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos x}\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx$

$\sin x=t$로 놓으면 $\cos x\frac{dx}{dt}=1$이고

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{6}$일 때 $t=\frac{1}{2}$이므로

$l=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-t^2}\,dt$

$=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{(1-t)(1+t)}\,dt$

$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right)dt$

$=\frac{1}{2}\Big[\ln|t+1|-\ln|t-1|\Big]_0^{\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{2}\ln 3$

따라서 $a=2,\ b=1$이므로

$a^2+b^2=5$

18) 정답 8

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$(a, b, c는 상수)로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 (가)에 의하여 $f'(1)=0$이고 $f'(3)=0$이므로

이차방정식 $3x^2+2ax+b=0$의 두 실근은 1과 3이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1+3=-\frac{2a}{3}$, $1\times 3=\frac{b}{3}$

따라서 $a=-6$이고 $b=9$이므로

$f(x)=x^3-6x^2+9x+c$

$f(k)=k^3-6k^2+9k+c$ 이고

$f'(k)=3k^2-12k+9$ 이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(k,\ f(k))$에서 접선의 방정식은

$y=(3k^2-12k+9)(x-k)+k^3-6k^2+9k+c$

즉, $y=(3k^2-12k+9)x-2k^3+6k^2+c$

따라서 $g(x)=(3k^2-12k+9)x-2k^3+6k^2+c$

$h(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면 $x<k$일 때 $h(x)<0$, $x>k$일 때 $h(x)>0$이고, $h(x)$는 연속함수이므로 $h(k)=0$이어야 한다.

따라서 곡선 $y=h(x)$는 x축과 오직 한 점 $(k,\ 0)$에서만 만난다.

$h(x)$

$=f(x)-g(x)$

$=x^3-6x^2+9x+c-\{(3k^2-12k+9)x-2k^3+6k^2+c\}$

$=x^3-6x^2-(3k^2-12k)x+2k^3-6k^2$

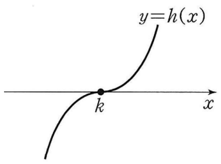
이므로 다음과 같이 조립제법을 이용하면

k	1	-6	$-3k^2+12k$	$2k^3-6k^2$
		k	k^2-6k	$-2k^3+6k^2$
k	1	$k-6$	$-2k^2+6k$	0
		k	$2k^2-6k$	
	1	$2k-6$	0	

$h(x)=(x-k)^2(x+2k-6)$

그림과 같이 곡선 $y=f(x)$가 x축과 오직 한 점 $(k,\ 0)$에서만 만나려면 $k=-2k+6$이어야 하므로

$k=2$



따라서 $h(x)=(x-2)^3$이므로

$f(2k)-g(2k)=f(4)-g(4)=h(4)$

$=(4-2)^3$

$=2^3=8$

다른 풀이)

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ ($a,\ b,\ c$는 상수)로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 (가)에 의하여 $f'(1)=0$이고 $f'(3)=0$이므로

이차방정식 $3x^2+2ax+b=0$의 두 실근은 1과 3이다.

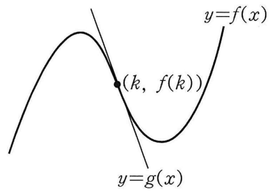
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1+3=-\dfrac{2a}{3}$, $1\times 3=\dfrac{b}{3}$

따라서 $a=-6$이고 $b=9$이므로

$f(x)=x^3-6x^2+9x+c$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(k,\ f(k))$에서의 접선 $y=g(x)$에 대하여 $x<k$일 때 $f(x)<g(x)$이고, $x>k$일 때 $f(x)>g(x)$이므로 그림과 같이 점 $(k,\ f(k))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이어야 한다.



$f'(x)=3x^2-12x+9$에서

$f''(x)=6x-12=6(x-2)$

$f''(x)=0$에서 $x=2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ f(2))$에 대하여 $x=2$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 점 $(2,\ f(2))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

$\therefore\ k=2$

$f(2)=2^3-6\times 2^2+9\times 2+c$

$=8-24+18+c=c+2$

$f'(2)=3\times 2^2-12\times 2+9$

$=12-24+9=-3$

곡선 $y=f(x)$의 변곡점 $(2,\ f(2))$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(2)(x-2)+f(2)$

$=-3(x-2)+c+2$

$=-3x+c+8$

따라서 $g(x)=-3x+c+8$이므로

$f(2k)-g(2k)$

$=f(4)-g(4)$

$=4^3-6\times 4^2+9\times 4+c-(-3\times 4+c+8)$

$=64-96+36+c-(-12+c+8)$

$=4+c-(-4+c)=8$

참고)

부정적분을 이용하여 함수 $f(x)$는 다음과 같이 구할 수 있다.

조건 (가)에 의하여 $f'(1)=0$, $f'(3)=0$이고, $f'(x)$의 최고차항의 계수는 3이므로

$f'(x)=3(x-1)(x-3)$

$=3(x^2-4x+3)$

$=3x^2-12x+9$

$\therefore\ f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-12x+9)dx$

$=x^3-6x^2+9x+C$(단, C는 적분상수)

19) 정답 ③

$f(x)=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$에서

$$f'(x)=\frac{(\sin x)'(2+\cos x)-\sin x(2+\cos x)'}{(2+\cos x)^2}$$

$$=\frac{\cos x(2+\cos x)-\sin x(-\sin x)}{(2+\cos x)^2}$$

$$=\frac{2\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{(2+\cos x)^2}$$

$$=\frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}$$

$f''(x)$

$= \dfrac{(2\cos x+1)'(2+\cos x)^2-(2\cos x+1)\{(2+\cos x)^2\}'}{(2+\cos x)^4}$

$= \dfrac{-2\sin x(2+\cos x)^2-(2\cos x+1)\cdot 2\cdot(2+\cos x)(-\sin x)}{(2+\cos x)^4}$

$= \dfrac{2\sin x(2+\cos x)(-2-\cos x+2\cos x+1)}{(2+\cos x)^4}$

$= \dfrac{2\sin x(\cos x-1)}{(2+\cos x)^3}$

$f'(x)=0$에서

$2\cos x+1=0$, 즉 $\cos x=-\dfrac{1}{2}$

$0\le x\le\pi$이므로 $x=\dfrac{2}{3}\pi$

$0<x<\pi$일 때,

$\sin x>0$, $\cos x-1<0$, $2+\cos x>0$이므로

$f''(x)=\dfrac{2\sin x(\cos x-1)}{(2+\cos x)^3}<0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 곡선 $y=f(x)$의 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	
$f(x)$	0	↗	극대	↘	0

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{2}{3}\pi$에서 극댓값

$$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{\sin\frac{2}{3}\pi}{2+\cos\frac{2}{3}\pi}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2+\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

을 갖는다. (참)

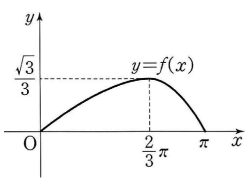
ㄴ. $0\le x\le\pi$일 때, $f(x)$는 $x=0$, $x=\pi$에서 최솟값 0을 가지므로 $0\le x\le\pi$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이다. (참)

ㄷ. $0<x<\pi$에서 $f''(x)<0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록이다. 그러므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 존재하지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

참고)

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



20) 정답 ③

$f(x)=\displaystyle\int_0^x (t+a)e^{t^2-2t}dt$에서

$f'(x)=(x+a)e^{x^2-2x}$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극값을 가지므로

$f'(1)=(1+a)e^{-1}$

$=0$

$\therefore\ a=-1$

즉, $f(x)=\displaystyle\int_0^x (t-1)e^{t^2-2t}dt$이므로

$b=f(1)$

$=\displaystyle\int_0^1 (t-1)e^{t^2-2t}dt$

이때 $t^2-2t=s$ 놓으면 $(2t-2)\dfrac{dt}{ds}=1$이고 $t=0$일 때 $s=0$, $t=1$일 때 $s=-1$이므로

$b=\displaystyle\int_0^1 (t-1)e^{t^2-2t}dt$

$=\displaystyle\int_0^{-1}\frac{1}{2}e^s ds$

$=\left[\dfrac{1}{2}e^s\right]_0^{-1}$

$=\dfrac{1}{2}e^{-1}-\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{1-e}{2e}$

$\therefore\ a+b=-1+\dfrac{1-e}{2e}$

$=\dfrac{1-3e}{2e}$