1. $\vec{a} = (2,1)$ $\quad \vec{b} = (-1, k)$

$\vec{a} = (2,1)$

$\vec{a}-\vec{b} = (3, 1-k)$

$\vec{a} \circ (\vec{a}-\vec{b}) = 2\cdot 3 + 1(1-k)$

$= 7-k \quad = 0$

$\boxed{k=7}$

답: 4번

개념 : 두 벡터가 이루는 각이 직각일 때 내적값은 0이다.

2. $B(50, \frac{1}{4})$

$\downarrow$

$N\left(\frac{25}{2}, \frac{75}{8}\right) \quad V(X) = \frac{75}{8} \quad V(4X) = 4^2 V(X) = \boxed{150}$

답: ⑤

개념: $V(aX+b) = a^2 V(X)$

$B(n, p) \to N(np, npq)$

3. $f(x) = x^2 e^{x-1}$

$f'(x) = 2x \cdot e^{x-1} + x^2 e^{x-1}$

$= (x^2+2x)e^{x-1} \Big]_{x=1} \Rightarrow \boxed{3}$

답: ③

개념 : 곱의 미분법

4. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx \xrightarrow[-\sin x \cdot dx = dt]{\cos x = t} \int_1^{\frac{1}{2}} -\frac{1}{t} dt$

$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{t} dt = \ln t \Big]_{\frac{1}{2}}^{1} = -\ln\frac{1}{2} = \boxed{\ln 2}$

답: ③

개념 : 치환적분법

5. $A(1, 2, -1)$ $B(3, 1, -2)$ 외분

$2 : 1$

$$\left(\frac{6-1}{2-1}, \frac{2-2}{2-1}, \frac{-4-(-1)}{2-1} \right)$$

$$= (5, 0, -3)$$

답 : ①

개념 : 내분, 외분

6. $f(x) = a\sin bx + c \quad (a>0, b>0)$

$max : +a+c = 4$ $\quad p : \frac{2\pi}{b} = \pi$ $\Rightarrow$ $a=3$, $b=\cancel{1}\ 2$, $c=1$

$min : -a+c = -2$

$f(x+p) = f(x) \Rightarrow p$가 주기인 함수!!

참고) $f(-x+p) = f(x) \Rightarrow x = \frac{p}{2}$에 대해 선대칭 함수!!

답: ①

개념: 삼각함수의 특성 (최대, 최소, 주기…등)

7. 연속함수 $f(x)$

$$\int_1^x (x-t)f(t)\,dt = e^{x-1} + ax^2 - 3x + 1$$

적분구간에 변수가 왔을 때!!

1) 위끝과 아래끝이 같도록 하는 x를 넣어준다.

$x=1$ 좌변 우변

$0 = e^0 + a - 3 + 1 \rightarrow a=1$

2) 미분 but 적분변수 주의!

$$\int_1^x (x-t)f(t)\,\underline{dt} = e^{x-1}+ax^2-3x+1$$

적분변수는
t이므로
x는 상수취급

$$x\int_1^x f(t)\,dt - \int_1^x t\cdot f(t)\,dt = e^{x-1}+ax^2-3x+1$$

$$\xrightarrow{\text{미분}} \int_1^x f(t)\,dt + x\cdot f(x) - x\cdot f(x) = e^{x-1}+2ax-3 = e^{x-1}+2x-3$$

$$\int_1^x f(t)\,dt = e^{x-1}+2x-3$$

$$\xrightarrow{\text{미분}} f(x) = e^{x-1}+2 \longrightarrow \boxed{f(1)=3}$$

답 : ⑤

개념 : 구간에 변수가 있는 적분

참고) $\int x f(x-t)\,dt$

8. $\tan\theta = -\frac{3}{4}$

$\tan\frac{\pi}{4} = 1$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) = \frac{-\frac{3}{4}+1}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)(1)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{4}} = \boxed{\frac{1}{7}}$$

답 : ②

개념 : 탄젠트의 덧셈정리

9. $\lim_{x\to\infty} f(x) \ln\left(1+\frac{1}{2x}\right) = 4.$

참고) $\lim_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = 1.$

만들어줘야하므로

$\lim_{x\to\infty} f(x) \cdot \ln\left(1+\frac{1}{2x}\right) \left(\times 2x \times \frac{1}{2x}\right)$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{2x} \cdot \underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}}_{\to 1} = 4$

둘 다 수렴하므로 각각 따로 계산 가능

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 8$

↓ 이는 꼴로 바꿔주는 것이 중요.

① $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{x}{x-3} = 8 \times 1 = \boxed{8}$

② x와 $x-3$은 발산속도가 같기 때문에 수렴 값이 같다고 생각 가능.

차수가 제일 큰 영향

$x < x^2 < x^3 \cdots \lll e^x$

$\ln x \lll \cdots \frac{1}{x^3} < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{x}$

답: ②

개념: 함수의 극한

지수함수의 극한

참고) $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$, $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ $\Rightarrow 1^{\infty}$꼴

상자 A
흰2 검3

상자 B
흰3 검4

1) 동전 던지기

2) 두 개의 공 동시에 꺼내기

<u>구하고 싶은 것?</u> 조건부 확률

$$\frac{\text{상자 A를 택했을 확률}}{\text{공 색깔 같을 일 때} \sim}$$

(분모)

☆ 상황 생각하기

① 상자 A에서 꺼내서 두 공이 흰공으로 같을 확률

$$\frac{1}{2} \times \frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{1}{20}$$

② 상자 A 〃 검은공으로 같을 확률

$$\frac{1}{2} \times \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{3}{20}$$

③ 상자 B 〃 흰공으로 같을 확률

$$\frac{1}{2} \times \frac{{}_3C_2}{{}_7C_2} = \frac{3}{42}$$

④ 상자 B 〃 검은공으로 같을 확률

$$\frac{1}{2} \times \frac{{}_4C_2}{{}_7C_2} = \frac{6}{42}$$

$$\frac{① + ② = \frac{1}{20} + \frac{3}{20}}{②+③+④ = \frac{1}{20} + \frac{3}{20} + \frac{3}{42} + \frac{6}{42}} = \boxed{\frac{14}{29}}$$

답: ④

개념: 조건부확률

수학점수 $N(67, 12^2)$
X 확률변수

성취도가 A 또는 B이려면 79점 이상이어야 함

$$P(X \geq 79)$$

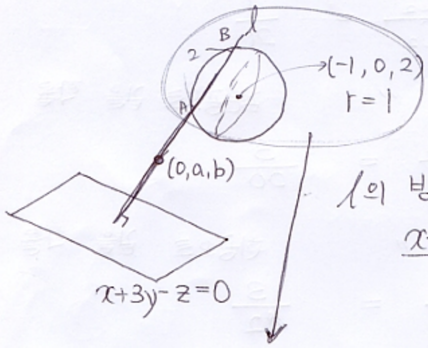
$$\xrightarrow{\text{표준화}} P\left(Z \geq \frac{79-67}{12}\right) \Rightarrow P(Z \geq 1)$$

$\therefore 0.5 - 0.3413$

$= \boxed{0.1587}$

답 : ③

개념 : 연속확률변수
표준화



l의 방정식 → 방향벡터 = 평면의 법선벡터

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-a}{3} = \frac{z-b}{-1}$$

대입

중심을 지나가야
교점 사이의
거리가 2가 됨
(최대 거리)

⇒ 직선이 원의 중심을
지나감
(-1, 0, 2)

$$\frac{-1-0}{1} = \frac{0-a}{3} = \frac{2-b}{-1}$$

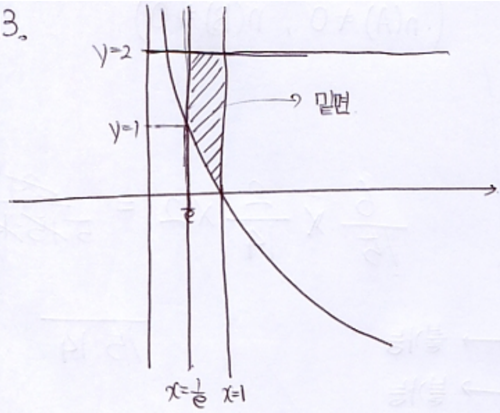
$a=3$
$b=1$

$a+b=\boxed{4}$

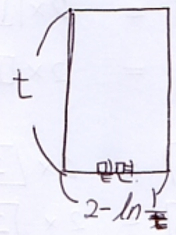
답 : ⑤

개념 : 직선의 방정식
원과 직선의 위치관계
평면의 방정식

13.



$x=t$인 곳에서 잘랐을 때의 단면



$$\text{부피} = \int_{\frac{1}{e}}^{1} t\left(2-\ln\frac{1}{t}\right)dt = \int_{\frac{1}{e}}^{1} 2t + t\ln|t|\,dt$$

$$= \left[t^2 + \frac{1}{2}t^2\ln t - \frac{1}{4}t^2\right]_{\frac{1}{e}}^{1}$$

$$= 1-\frac{1}{e^2} + \frac{1}{2}\left(0-\frac{1}{e^2}(-1)\right) - \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)$$

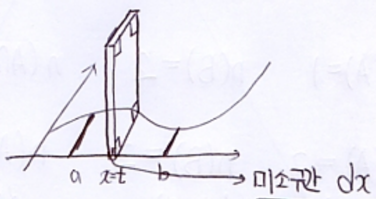
$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4e^2}$$

답: ④

개념: 적분 - 부피
부분적분

참고) 적분 부피 식에 대하여...

$$\int \underbrace{S(x)}_{\text{단면}}\, dx$$



$\therefore$ $S(x)\cdot dx$ = 얇은 판

넓이들의 합 ≠ 부피.

부피들(얇은판)의 합 = 부피 ⟹ 부피 문제를 풀 때 핵심 요소.

14. $n(A) \times n(B) = 2 \times n(A \cap B)$

① $\boxed{1} \times \boxed{1} = 2 \times \boxed{1}$

② $\boxed{2} \times \boxed{1} = 2 \times \boxed{1}$

$\boxed{1} \times \boxed{2} = 2 \times \boxed{1}$

③ $\boxed{1} \times \boxed{4} = 2 \times \boxed{2}$

$\boxed{4} \times \boxed{1} = 2 \times \boxed{2}$

$\boxed{2} \times \boxed{2} = 2 \times \boxed{2}$

부분집합의 개수

: $2^4 - \underset{\text{공집합}}{1} = 15$

ϕ

원소개수 1개인 부분집합 : 4개

〃 2개 〃 : ${}_4C_2$개 = 6개

〃 3개 〃 : 4개

〃 4개 〃 : 1개

①의 경우 $n(A)=1$ $n(B)=1$ $n(A \cap B)=1$

같은 $\{\alpha\}$ $\{\alpha\}$ $\{\alpha\}$ 원소를

가져야 하지만 불가능 (중복선택 불가)

②의 경우 $n(A)=2$ $n(B)=1$ $n(A \cap B)=1$

$\{\alpha, \beta\}$ $\{\alpha \text{ or } \beta\}$ $\{\alpha \text{ or } \beta\}$

원소개수 2개

순서대로 뽑음 $\frac{6}{15} \times \frac{2}{14} = \frac{6 \cdot 2}{15 \cdot 14}$

$n(A)=1$ $n(B)=2$ $n(A \cap B)=1$

$\{\alpha \text{ or } \beta\}$ $\{\alpha, \beta\}$ $\{\alpha \text{ or } \beta\}$

$\frac{2}{14} \times \frac{6}{15} = \frac{6 \cdot 2}{15 \cdot 14}$

③의 경우 전부 불가능 → 이유 : 1, 4, 2 ⇒ 교집합 2개 불가능

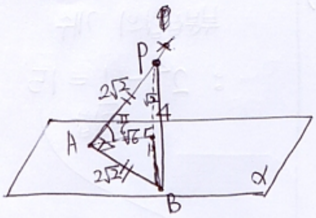
2, 2, 2 ⇒ 같은것 선택 불가

$\frac{6 \cdot 2}{15 \cdot 14} \times 2 = \boxed{\frac{4}{35}}$

답 : ③

개념 : 경우의수와 확률

15.



$\overline{PH} \perp \alpha$, $\overline{PA} \perp \overline{AB}$

$\rightarrow$ $\overline{AH} \perp \overline{AB}$

$\Downarrow$

두 평면이 이루는 각의 정의

: 교선에서 올려그은 두 수선이 이루는 각

$\overline{PA}$, $\overline{AH}$ 가 이루는 각

밑면 넓이 : $\frac{1}{2}\overline{AH} \times \overline{AB} = 2\sqrt{2} \times \sqrt{6} \times \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}$

높이 : $\sqrt{2} = \overline{PH}$

$\therefore$ 부피 : $2\sqrt{3} \times \sqrt{2} \times \frac{1}{3} = \boxed{\frac{2\sqrt{6}}{3}}$

답 : ④

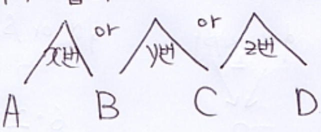
개념 : 삼수선의 정리

이면각의 정의

사면체의 부피

16. 상황 이해.

공을 2개씩 뽑아



$\Rightarrow$ 이런 식으로 집어넣는다.

넣는 방법 3가지 $\qquad \underline{x+y+z=5}$

$_3H_5 = {}_7C_5 = \boxed{21}$

답 : ①

개념 : 중복조합

참고) 경우의 수 문제 검산은

(정말 당연하지만) ① 중복? $\rightarrow$ 중복해서 센다면 더 많은 경우의 수

② 부족? $\rightarrow$ 부족하게 센다면 더 적은 경우의 수.

17. 빈칸문제)

상황 이해하기

$1 \sim (2n-1)$ 카드 → 3장뽑음 □ □ □ ⇒ 짝수 개수 확인 = X

순서대로 읽어가기 → 필요한 정보만 빼내기

(가) → 짝수가 적혀있는 카드 중에서 k장의 카드를 선택 후
$(n-1)$개 　 k장 　 $\Rightarrow {}_{n-1}C_k$

홀수가 적혀있는 카드 중에서 ((가) − k) 장의 카드 택
→ 이미 k장을 뽑았으므로 (3−k)장만 뽑기

(가) : 3

(나) → $P(X=2) = \dfrac{\text{(가)의 상황}}{\text{전체 경우의 수}} = \dfrac{{}_{n-1}C_2 \times {}_nC_1}{{}_{2n-1}C_3} = \boxed{\dfrac{3 \cdot n(n-2)}{2(2n-1)(2n-3)}}$ (나)

(다) → $k \cdot P(X=k)$ 전부 대입 후 덧셈

$$E(X) = \frac{\cancel{6}^{3}(2n-3)(n-1)}{\cancel{2}(2n-1)\cancel{(2n-3)}} = \frac{\boxed{3(n-1)}}{(2n-1)} \text{(다)}$$

$a = 3$ 　 $f(5) = \dfrac{\cancel{3} \cdot 5 \cdot \cancel{3}}{2 \cdot 9 \cdot 7} = \dfrac{5}{14}$ 　 $g(8) = 3(8-1) = 21$

$$a \times f(5) \times g(8) = 3 \times \frac{5}{\cancel{14}_{2}} \times \cancel{21}^{3} = \boxed{\frac{45}{2}}$$

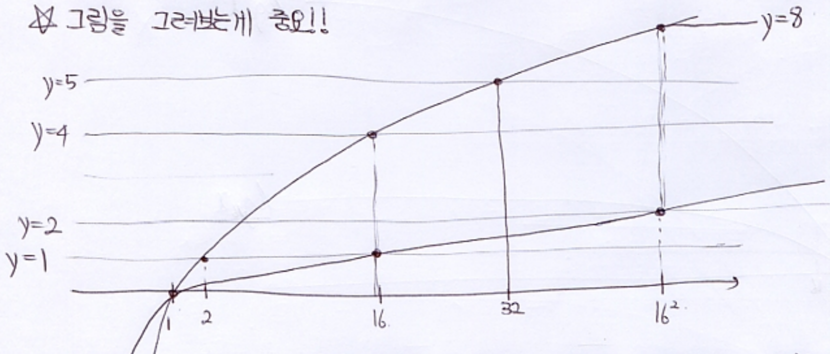
답 : ②

개념 : 경우의 수
$E(X)$

18. (가) 한 변의 길이가 n인 정사각형

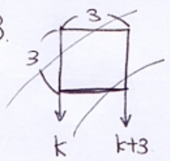
(나) $y=\log_2 x$ 와 $\log_{16} x$ 각각 서로 다른 두 점에서 만난다.

☆ 그림을 그려보는게 중요!!



* (가) 조건에서 각 꼭짓점의 좌표가 자연수이므로 자연수 좌표를 확인

1) n=3.



← 이런식. ⇒ 머릿속으로 정사각형을 그래프에 끼워넣기.

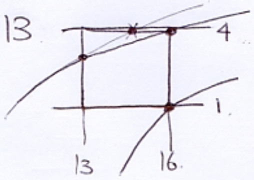
$1 \le k < 2$ → 불가능 (꼭짓점 좌표가 자연수일 수 없음)

$2 \le k < 16$ → 불가능 (〃)

⋮

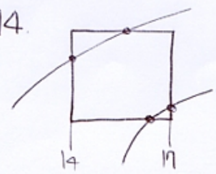
16 → 이 구간을 생각

k=13



(x) → 3개를 지남 (각각 2개여야 함)

k = 14

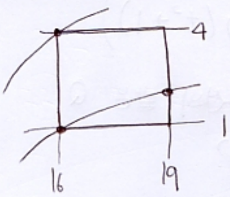


(o) → 만족

k=15

(o) → 만족

$k=16$

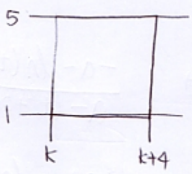


불가.

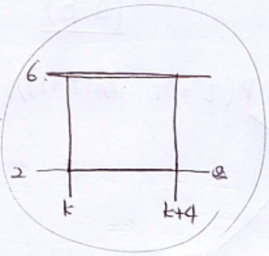
$16<k$ 일 때는 두 그래프 사이의 거리가
세로 길이인 3보다 멀어지기 때문에 불가.

$a_3 = 2$

2) $n=4$.



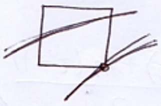
or



불가능.
(만나지 않음)

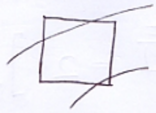
아까와 마찬가지로

$k=12$



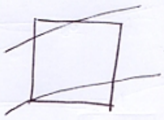
불가능

$13 \leqq k \leqq 15$



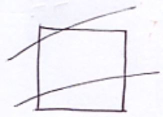
가능.

$k=16$.



$k=28$

~ $k=31$



가능.

$k=32$

불가능.

$\therefore\ 13 \leqq k \leqq 31$

$a_4 = 19$

답: $\boxed{21}$ ①.

19. 점 P $\left(x = t^3 + 2t \quad y = \ln(t^2+1)\right)$

점 P에서 $y=-x$에 내린 수선의 발은 Q

$t=1$ 일 때 점 Q의 속력은?

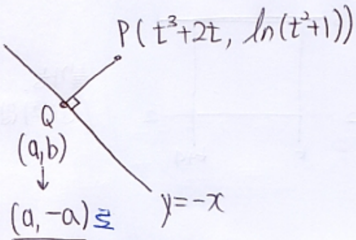
↓

점Q의 $\frac{dx}{dt}$ 와 $\frac{dy}{dt}$를 구해라!

↓

점Q의 좌표를 구해라!! : 점 Q의 좌표만 구하면 끝

$\underline{(a, b)}$



$\underline{(a, -a)}$로 설정해야 편하게 풂

기울기 조건 $\dfrac{-a-\ln(t^2+1)}{a-(t^3+2t)} = 1$

$\therefore a = \dfrac{t^3+2t-\ln(t^2+1)}{2}$

$$Q\left(\frac{t^3+2t-\ln(t^2+1)}{2}, \frac{-(t^3+2t)+\ln(t^2+1)}{2}\right)$$

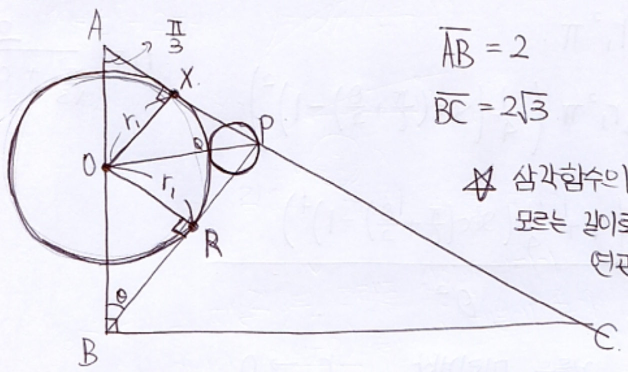
$$\frac{dx}{dt} = \frac{3t^2+2-\frac{2t}{t^2+1}}{2} = 2 \Big]_{t=1}$$

$$\frac{dy}{dt} = -2 \Big]_{t=1}$$

$\therefore$ 속력 $= \sqrt{4+4} = \boxed{2\sqrt{2}}$ 답 : ②

개념: 매개변수 미분
거리, 속도, 속력, 가속도

20.



$\overline{AB} = 2$

$\overline{BC} = 2\sqrt{3}$

☆ 삼각함수의 극한 문제에서는
모르는 길이로 아는 길이와
연관짓는 것이 중요함.
and
필요한 도형만
보기.

☆ 얻을 조건 전부 얻어서 쓰기

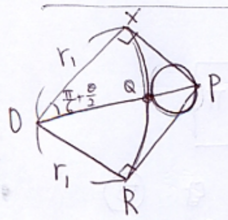
① 길이 조건 ⇒ $\angle A = \frac{\pi}{3}$

② 접하는 조건

$\overline{OX} = \overline{OR} = r_1$

$\therefore \begin{cases} \overline{OA} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot r_1 \\ \overline{OB} = \csc\theta \cdot r_1 \end{cases} \longrightarrow \overline{OA} + \overline{OB} = 2$

$$r_1 = \frac{2}{\frac{2}{\sqrt{3}} + \csc\theta} \Rightarrow f(\theta) = \pi\left(\frac{2}{\frac{2}{\sqrt{3}} + \csc\theta}\right)^2$$



$\overline{PQ}$ 길이를 구해야 하므로

$\underset{\text{알수있는 길이}}{\overline{OP}} - \underset{\text{아는 길이}}{\underline{\overline{OQ}}} = \overline{QP}$를 활용

($\overline{OQ} = r_1$)

$$\therefore \overline{QP} = r_1\left(\sec\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\theta}{2}\right) - 1\right)$$

$$g(\theta) = \left(\frac{r_1}{2}\left(\sec\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\theta}{2}\right) - 1\right)\right)^2 \pi$$

$\overline{OP}$ 구하기

$\angle XOR = \frac{\pi}{3} + \theta$

$\triangle XOP \equiv \triangle ROP$ (RHS합동

$\therefore \angle XOP = \frac{\pi}{6} + \frac{\theta}{2}$

$\therefore \overline{OP} = r_1 \cdot \sec\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\theta}{2}\right)$

$f(\theta) = r_1^2\pi$ $\qquad r_1 = \dfrac{2}{\frac{2}{\sqrt{3}} + \csc\theta}$

$g(\theta) = {}_4 r_1^2\pi\left(\dfrac{1}{4}\left(\sec\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\theta}{2}\right)-1\right)^2\right)$

$$\lim_{\theta\to0^+}\frac{r_1^2\pi\left(1+\frac{1}{4}\left(\sec\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\theta}{2}\right)-1\right)^2\right)}{\theta^2}$$

계산되는 것들은 미리계산 $\quad r_1 \to 0$

but 0으로 가는 것들은 남듬

$$\lim_{\theta\to0^+}\frac{r_1^2\pi\left(1+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)^2\right)}{\theta^2} = \lim_{\theta\to0^+}\frac{r_1^2\pi\left(\frac{19-4\sqrt{3}}{12}\right)}{\theta^2}$$

$$= \lim_{\theta\to0^+}\frac{\pi\left(\frac{2}{\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sin\theta}}\right)^2\cdot\left(\frac{19-4\sqrt{3}}{12}\right)}{\theta^2}$$

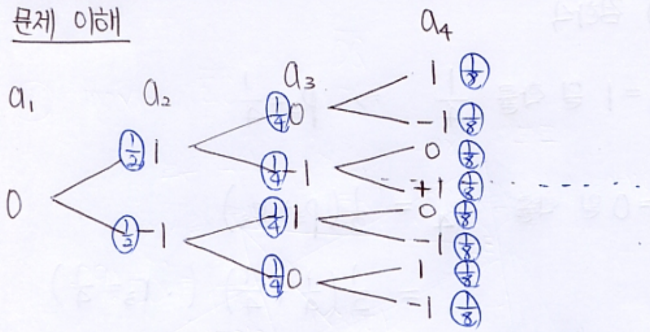
$$= \lim_{\theta\to0^+}\frac{\pi\left(\frac{2\sin\theta}{\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta+1}\right)^2\left(\frac{19-4\sqrt{3}}{12}\right)}{\theta^2}$$

$$= 4\pi\cdot\frac{19-4\sqrt{3}}{12} = \boxed{\frac{19-4\sqrt{3}}{3}\pi}$$

답: 5

개념: 삼각함수의 극한

21. <u>문제 이해</u>



if a_n 에서 1이 나올 확률 p_n $\left\langle \begin{array}{l} 0 : \frac{1}{2}p_n \\ -1 : \frac{1}{2}p_n \end{array}\right.$

0이 나올 확률 q_n $\left\langle \begin{array}{l} 1 : \frac{1}{2}q_n \\ -1 : \frac{1}{2}q_n \end{array}\right.$ 이라 하면 $(p_n+q_n+r_n=1)$

-1이 나올 확률 r_n $\left\langle \begin{array}{l} 1 : \frac{1}{2}r_n \\ 0 : \frac{1}{2}r_n \end{array}\right.$

주사위를 굴려서 나오는 a_{n+1}은 자기 자신이 될수 없기에

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{2}r_n$$
$$q_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}r_n$$
$$r_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}q_n$$

이라는 점화식이 성립한다.

And 대입을 몇개만 해도 문제가 풀린다.

ㄱ. $a_2=1$ 일 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다. (O)

∵ 주사위 던져서 홀수가 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

ㄴ. $a_3=1$ 일 확률과 $a_4=0$ 일 확률은 서로 같다. (O)

* 두 가지 방법

1) 대입

$a_3=1$ 일 확률 → $\frac{1}{4}$ (위의 수형도 참고)

$a_4=0$ 일 확률 → $\frac{1}{8}\times 2 = \frac{1}{4}$

2) 점화식

$a_3=1$ 일 확률 $\frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ $p_3=\frac{1}{4}$

$a_4=0$ 일 확률 $q_4 = \frac{1}{2}(p_3+r_3)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) \quad (\because r_3=\frac{1}{4})$

$= \frac{1}{4}$ (O)

~~ㄷ~~. $a_9=0$ 일 확률이 p이면 $a_{11}=0$ 일 확률은 $\frac{1-p}{4}$ 이다.

*대입해서도 나온다.

$a_9=0$ 일 확률 $\rightarrow q_9 = p$.

$a_{11}=0$ 일 확률 $\rightarrow q_{11} = \frac{1}{2}(p_{10}+r_{10}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(q_9+r_9+p_9+q_9)\right)$

$= \frac{1}{4}(p_9+r_9+2q_9)$

$= \frac{1}{4}((1-q_9)+2q_9)$

$= \frac{1}{4}(1+q_9) = \boxed{\frac{1}{4}(1+p)}$

답: $\boxed{ㄱ, ㄴ}$ ③

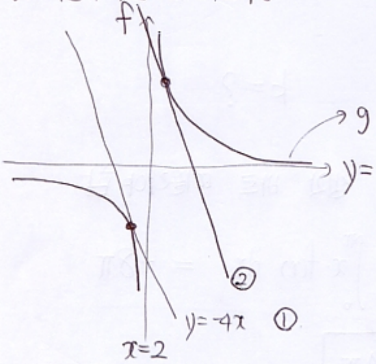
22. $(2x+1)^5$ x^3의 계수

$\longrightarrow$ ${}_5C_3 \cdot 2^3 \cdot 1^2 = \boxed{80}$

답: 80

개념: 이항정리

23. ☆ 대충이라도 그려보기!



$f' = g'$

$-4 = -\frac{1}{(x-2)^2}$

$x = \frac{3}{2}$ or $\frac{5}{2}$

① ②

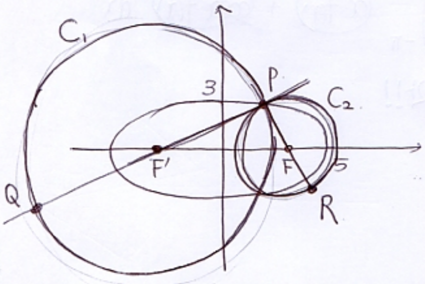
접점: $\left(\frac{3}{2}, -6\right)$ $\left(\frac{5}{2}, -10\right)$

⇒ g에 대입

① $a=4$. ② $a=12$

답: $\boxed{16}$ 개념: 접선의 방정식

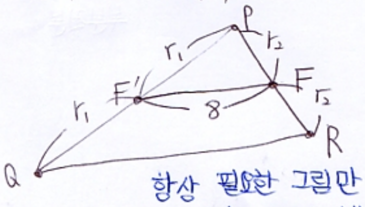
24.



☆ 그림 그리기.

C_1의 반지름 r_1 C_2의 반지름 r_2

타원의 정의에 의해 $r_1 + r_2 = 10$ ⇒ $\cancel{\overline{PF'}}$ $\overline{PQ} + \overline{PR} = 20$.



항상 필요한 그림만
따로 생각하거나 빼주기

닮음에 의하여 $\overline{QR} = 16$.

∴ 답: $20+16 = \boxed{36}$

개념: 타원의 정의, 닮음

25. 연속함수 $f(x)$

(가) $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ 기함수, 원점대칭 함수.

(나) $f(\pi) = 0$

(다) $\int_0^{\pi} x^2 f'(x)\, dx = -8\pi$

$\int_{-\pi}^{\pi} (x+\cos x) f(x)\, dx = k\pi$ $k=?$

※ (다) 조건을 보면 부분적분을 해야한다는 생각 바로 떠올라야 함

$\int_0^{\pi} x^2 f'(x)\, dx = \underline{x^2 f(x) \Big]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} x \cdot f(x)\, dx} = -8\pi$

정리하면, $\boxed{\int_0^{\pi} x \cdot f(x)\, dx = 4\pi}$

구해야 할 것

$\int_{-\pi}^{\pi} (\overset{기}{x} + \overset{우}{\cos x}) \overset{기}{f(x)}\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \overset{우}{x \cdot f(x)} + \overset{기}{\cancel{\cos x \cdot f(x)}}^{\,0.}\, dx$

※ 구간이 대칭이므로 기함수 우함수 생각!!

참고) 기 × 기 = 우
우 × 기 = 기
우 × 우 = 우

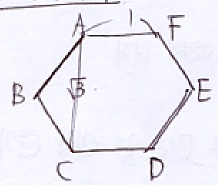
$= 2\int_0^{\pi} x \cdot f(x)\, dx = 8\pi$

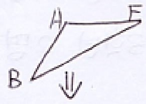
답 $\boxed{k=8}$

개념 : 우함수, 기함수의 적분
부분적분

26.

상황 생각하기 → 만들어질 수 있는 모든 삼각형

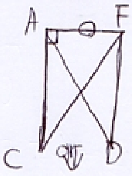


① 

넓이: $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$

6개의 변 중
붙어있는 2개의 변만 선택해도 ⇒ 총 6개가 생김
삼각형 만들어짐

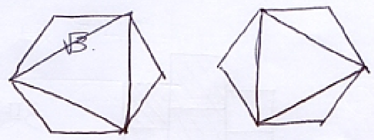
${}_6C_3 = 20$ ⇒ 총 삼각형 개수

② 

넓이: $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

밑변을 정한 후
반대쪽의 두 꼭짓점 중
하나 선택 → 6개의 밑변 × 2 = 12개

발상은
사람마다
다를 수 있음

③ 

넓이: $\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\sqrt{3})^2 =$

2개

X	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$
P	$\frac{6}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{2}{20}$

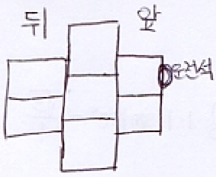
$$P\left(X \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{12}{20} + \frac{2}{20} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$

$p+q=17$

답: $\boxed{17}$

개념: 그냥 경우의 수...

27.



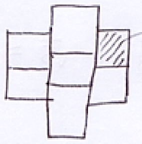
1학년 2명 → 같은 줄 이웃

2학년 2명

3학년 2명 → 한명은 운전석 앉기.

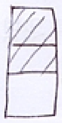
★ 필수 조건 먼저 만족 시키기. and 한 번에 너무 많은 것 생각 않기

1) 운전석 앉히기. → 2가지 경우.

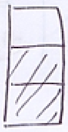


2) 1학년 같은 줄 앉히기

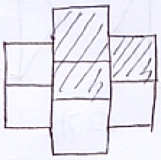
① 중간 줄에



or



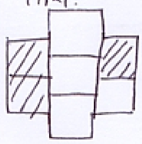
2가지 × 2 (1학년끼리 자리 바꾸기) = 4가지



3명 남음 → 맘대로.

② 뒷 줄에

1가지.



3명남음 → 맘대로

∴ 계산 $= 2 \times (2\times2 + 1\times2) \times {}_4P_3 = \boxed{288}$

답: $\boxed{288}$

개념: 경우의 수

28. $f(x) = (x^3-a)e^x$

$f(x) = t$ 의 실근의 개수 $g(t)$ → 불연속점 2개 ⇒ 만족시키는 a의 합?

$a \le 10$

자연수.

⇓

명령어 ⇒ 그래프를 그려라.

$f(x) = (x^3-a)e^x$ ⟶ 절편 $x=\sqrt[3]{a}$ 만 존재

$f'(x) = (x^3+3x^2-a)e^x$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^{-}$ $\quad \left.\begin{matrix} x^3 \to -\infty \\ e^x \to 0^{+} \end{matrix}\right) \to 0^{-}$

⇒ 그래프 그리기 힘듦

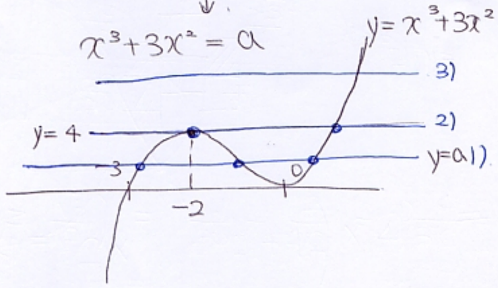
why? 극값이 몇개 있는지 모름

⇒ solution. 극값의 개수를 임의로 지정

$\underline{x^3+3x^2-a=0 \text{ 의 실근의 개수}}$ = $f(x)$의 극값의 개수.

↓

$x^3+3x^2 = a$

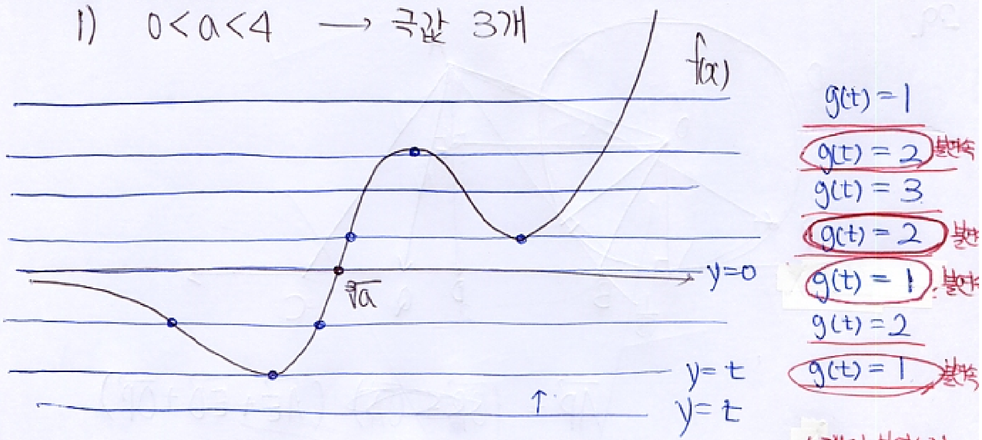


극값 3개 1) $0 < a < 4$ 교점의 개수가 3개이므로 $f(x)$의 극값은 3개 존재

극값 1개
2) $a = 4$ 교점의 개수는 2개이지만 $x=-2$에서 중근을 가지므로 좌우 부호변화가 생기지 않으므로 극값은 하나 존재

3) $4 < a \le 10$ 교점의 개수 1개 → 극값 1개

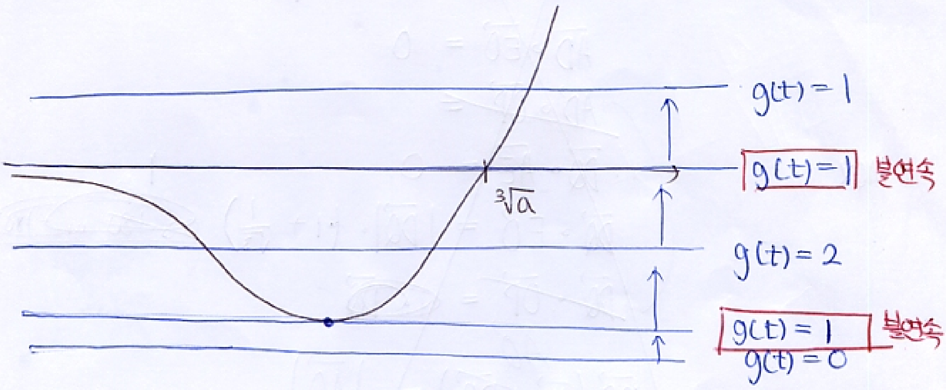
1) $0<a<4$ ⟶ 극값 3개



4개의 불연속점

⇒ 만족 X

2) $4 \le a \le 10$ ⟶ 극값 1개



2개의 불연속점

⇒ 만족 O

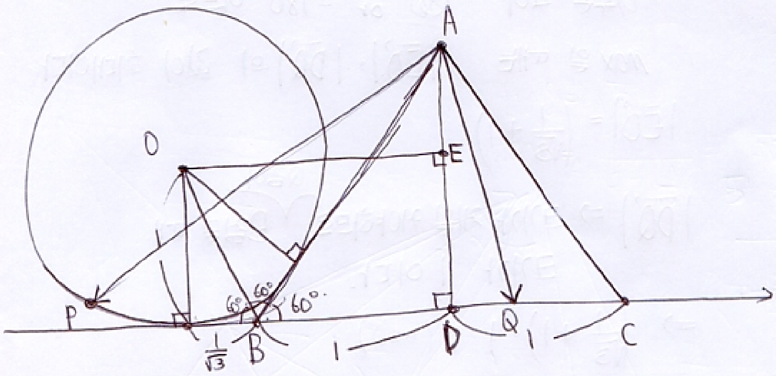
∴ $4 \le a \le 10$ 모두 만족

⇒ a값의 합 = $\boxed{49}$

답: 49

개념: 그래프 그리기
새로운 함수의 정의

29.



$\overrightarrow{AP} \circ \overrightarrow{AQ}$ 의 최대, 최소?

$\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$ 모두 크기와 방향이 모두 변하기 때문에

좀 더 편한 벡터로 바꿀 생각을 해야한다. → 크기나 방향 둘 하나 고정.

시작점을 원의 중심 or 꼭짓점

or 수직관계가 되는 벡터를 (x축, y축에 평행한 벡터) → 내적 = 0

ex) $\overrightarrow{AP} \circ \overrightarrow{AQ} = (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{AQ})$

$= (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OA})$

⋮

방법은 많고 그 중 제일 적합한 것을 선택

$\therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OP})(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DQ})$

$= \overrightarrow{AE} \circ \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{EO} \circ \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EO} \circ \overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{OP} \circ \overrightarrow{DQ}$

$= \underline{\overrightarrow{AE} \circ \overrightarrow{AD}} + \underline{\overrightarrow{EO} \circ \overrightarrow{DQ}} + \underline{\overrightarrow{OP}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AQ})}$

$= \underbrace{(\sqrt{3}-1)\sqrt{3}}_{\text{방향같음}} + \underbrace{0}_{\text{수직}} + \underbrace{0}_{\text{수직}} + \underbrace{\overrightarrow{EO} \circ \overrightarrow{DQ}}_{\text{Q의 위치에 따라 값이 다름☆}} + \underbrace{\overrightarrow{OP}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AQ})}_{\text{P, Q에 따라 값이 다름☆}}$

∴ 나머지는 전부 상수이므로

$\overrightarrow{EO} \circ \overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{OP}(\overrightarrow{AQ})$의 max 와 min을 구하면 됨

① max : $\vec{EO} \circ \vec{DQ}$ 의 경우

이루는 각이 $0°$ or $180°$ 이므로

max 일 때는 $|\vec{EO}| \cdot |\vec{DQ}|$ 의 값이 최대이다.

$|\vec{EO}| = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right)$

$|\vec{DQ}|$ ⇒ 크기가 제일 커야하므로 Q점이 B점일 때

크기가 1 이다.

$\Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right) \cdot 1 \cdot 1\ (\cos 0°)$

$\vec{OP} \circ \vec{AQ}$ 의 경우

$\vec{OP}$는 크기가 1이고 방향은 제한이 없으므로

최대는 $\vec{AQ}$와 방향이 같을 때이다.

$\vec{AQ}$의 경우 위에서 Q점이 B에 올 때 최대였는데

$\vec{AQ}$ 또한 최대이므로 2의 값을 가진다.

$\Rightarrow\ 2 \cdot 1.$

② min : $\vec{EO} \circ \vec{DQ}$의 경우

이루는 각이 $180°$ 이고 $|\vec{DQ}|$ 가 1이고

Q가 C점에 왔을 때 이다

$\Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right) 1 \cdot \overset{\cos 180°}{(-1)}$

$\vec{OP} \circ \vec{AQ}$의 경우

$\vec{OP}$와 $\vec{AQ}$의 방향이 정반대일 때이다.

$\Rightarrow\ 2 \cdot 1 \cdot (-1)$

$\therefore$ max : $(\sqrt{3}-1)\sqrt{3} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right)(+1) + 2 \cdot 1.$

min : $(\sqrt{3}-1)\sqrt{3} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right)(-1) + 2 \cdot 1\ (-1)$

max + min $= 6-2\sqrt{3}$ $\quad a=6 \quad b=-2$

$\therefore\ \boxed{a^2+b^2 = 40.}$

30. $f(x) = x^3 + ax^2 - ax - a$ 의 역함수 존재

$n \cdot g'(n) = 1$ 을 만족시키는 실수 a의 개수를 a_n이라 할 때

$\sum_{n=1}^{27} a_n = ?$

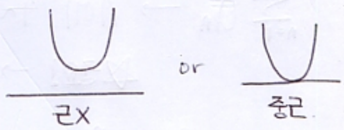
☆ 주어진 조건을 뽑아내 어떤 개념을 쓸 것인가?

1) $f(x)$의 역함수 존재 = 일대일 대응 함수 = 단조 증가 (계속 증가) or 단조 감소 (계속 감소)

최고차항 계수 1인 삼차함수이기 때문

$\Rightarrow f'(x) \geq 0$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax - a \geq 0$



$\frac{D}{4} = a^2 + 3a \leq 0$

$\boxed{-3 \leq a \leq 0}$ 기본적인 a의 범위

2) $n \cdot g'(n) = 1$ 을 만족시키는 실수 a의 개수를 a_n.

역함수의 기울기 (개념)

$\boxed{g'(n) = \frac{1}{n}} \rightarrow$ if $\underbrace{f(k) = n}_{①}$, $\boxed{\underbrace{f'(k) = n}_{②}}$

역수관계

① $k^3 + ak^2 - ak - a = n$

② $3k^2 + 2ak - a = n$

→ 모르는 문자 3개인데 식은 2개이므로 문자를 줄이는 방향으로!

①-② : $k^3 + (a-3)k^2 - 3ak = 0$

$\rightarrow k(k^2 + (a-3)k - 3a) = k(k-3)(k+a) = 0$

$\therefore$ $k=0$, $k=3$, $k=-a$ 일 때 $g'(n) = \frac{1}{n}$이 성립!

⇒ 이 때의 a의 값이 중요하므로 a를 알아보기

$k=0 \longrightarrow$ ①식에 대입

$$\boxed{a=-n}$$

$k=3 \longrightarrow$ ①식에 대입

$$\boxed{27+5a=n}$$

$k=-a \longrightarrow$ ①식에 대입

$$\boxed{a^2-a=n}$$

$$\underline{-3 \le a \le 0}$$

$\sum_{n=1}^{27} a_n \rightarrow$ n에 1~27까지 넣어봄

☆중요! → 그냥 막 n에 값을 넣지 말고 한 번 생각하고 넣기!

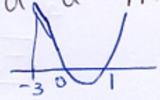
$a=-n$

$-3 \le a \le 0$
이므로
$n=1, 2, 3$일 때만
성립 가능

$27+5a=n$

$-3 \le a \le 0$
$12 \le 27+5a \le 27$
⇓
$12 \le n \le 27$
일 때만 성립가능

$a^2-a=n$



$0 \le a^2-a \le 12$
$1 \le n \le 12$
일 때만 성립 가능

참고) 많이 할 수 있는 실수

$1 \le n \le 3 \longrightarrow a=-n,\ a^2-a=n$ 일 때 존재
$a_n=2$

$4 \le n \le 11 \longrightarrow a^2-a=n$ 일 때 존재.
$a_n=1$.

$n=12 \longrightarrow 27+5a=n,\ a^2-a=n$ 일 때 존재
$a_n=2$

$13 \le n \le 27 \longrightarrow 27+5a=n$ 일 때 존재
$a_n=1$

$\therefore\ 2\times3 + 8\times1 + 2 + 15\times1 = \boxed{31개} \rightarrow (\times)$

※ $\boxed{31\text{개}}$가 틀린 이유 !!

a_n의 정의 중요! ⇒ a_n은 a 값의 개수.

∴ 식만 가지고 결정하는 것이 아니고

a의 값을 중심으로 결정해야 한다. ☆ ⇒ 겹치는 게 없는지 확인

$n=12 \longrightarrow$ $21+5a=n$, $a^2-a=n$

이때 $a=-3$ 이때 $a=-3$

a의 값은 하나이므로

$\boxed{a_n=1}$

∴ 답 : $\boxed{30\text{개}}$

By. 양념장

from Orbi.