8

그래프 기본 독해법

지식이 없는 성실은 허약하고 쓸모없다.
성실이 없는 지식은 위험하고 두려운 것이다.
— 사무엘 존슨

MediVa

들어가기

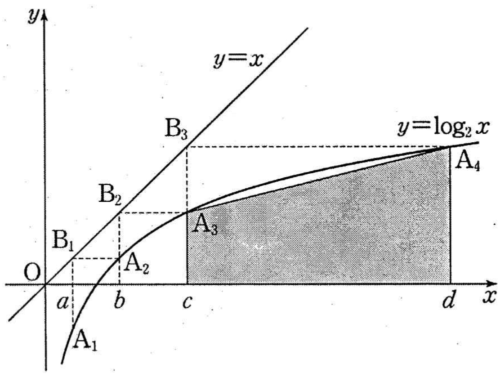
초등학교 시절이 좋았다. 그래프라 하면 막대그래프, 원그래프 나와서 계산도 대충 하고 이쁘게 색연필들고 그리던 시절이었다. 그러다가 중학교 가니까 히스토그램인가 하는 걸 배우고 함수를 배우더니 모눈종이 들고 그래프를 그렸다. 그러다가 고등학교 가니 대충 연필로 휙휙 그리고. 그래. 거기까진 좋다. 근데 시험지에 그래프가 나오니까 바로 멘탈이 붕괴된다. 으어.

그래프에 너무 겁먹을 것 없다. 왜냐하면 우리가 배운 함수가 그리 많지 않아서 그래프도 생각보다 많지 않기 때문이다. 수학 I 하고 미통기에서 배운 것을 생각해 보자. 뭐 배웠지? 지수함수·로그함수 배웠다. 또? 수 I 은 이게 끝이다. 미통기 가면서 미분에서 그래프 좀 그리게 됐는데, 그래봤자 다항함수다. 아, 함수의 극한과 연속성에서도 이상한 것 좀 나오긴 하지.

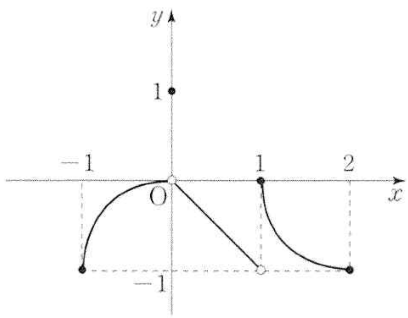
아무튼 별로 없다. 볼 것은

---

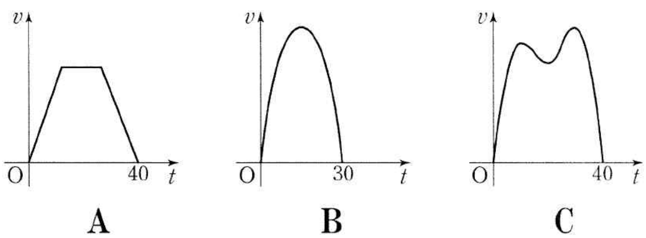
① 지수 로그 함수의 그래프



② 함수의 극한과 연속성에 나오는 불연속그래프



③ 미분에서 나오는 기타 그래프들



이런 건데, 문제는 그래프 안 그려주고 알아서 생각하라는 것이 많다는 거다. 일단 이 장에서는 수능에서 그래프 관련해서 나왔던 것들을 살펴보고, 수학(하) 내용에서 필요한 부분을 복습하면서 기본적인 그래프 문제를 다루는 것을 배울 것이다.

수학 시험의 기술

수학 I 이든, 미통기든 그래프에 관한 기본적인 이론은 알고 있어야 한다. 이것은 지수·로그 함수의 그래프 문제든 함수의 극한과 연속성 문제든, 미분 문제든 공통적으로 해당되는 것이다. 내가 지금부터 설명하려는 것은 수학(하) 과정에 나온 것이 주가 되고, 수능 시험에 나왔던 것들이다. 거창한 이론은 필요없다. 우리는 필요한 것부터 본다.

어찌보면 그래프 읽는 것은 사회탐구 문제 푸는 거랑 비슷하다.

[2012년 수능]
다음에서 주장하는 연구 방법을 적용하기에 적절한 연구가 <u>아닌</u> 것은?[3점]

사회 과학은 사회·문화 현상에 대한 논리적 이해와 설명을 추구한다. 어떤 학자들은 경험적인 검증을 수반한 과학적 방법을 통해 현상들 간의 인과 관계를 설명하는 법칙의 발견이 필요하다고 말한다. 하지만 이보다 더 중요한 것은 '구체적 현상을 어떻게 이해할 것인가'이다. 이를 위해서는 연구 대상에 대한 피상적인 관찰보다는 심층적인 이해가 요구된다. 법칙이 추상적일수록 인간 행위에 담긴 동기를 이해하거나 개성적 사회·문화 현상에 대한 설명력을 높이는 데 별로 소용이 없기 때문이다.

① 프로 야구 팬클럽 회원의 충성도 분포 연구
② 한국과 일본의 세시 풍속 의미에 대한 비교 연구
③ 동학 농민 운동에 나타난 민족 의식에 관한 연구
④ 현대 사회에서의 주술 행위에 대한 참여 관찰 연구
⑤ 도서 지역 주민들의 경제 행위에 대한 민속지적 연구

이건 2012년 수능 사회 문화 문제 중 하나인데, 사회탐구 좀 하는 여러분들은 이런 문제 어떻게 푸나?

사회 과학은 사회·문화 현상에 대한 논리적 이해와 설명을 추구한다. 어떤 학자들은 경험적인 검증을 수반한 과학적 방법을 통해 현상들 간의 인과 관계를 설명하는 법칙의 발견이 필요하다고 말한다. 하지만 이보다 더 중요한 것은 <u>**'구체적 현상을 어떻게 이해할 것인가'**</u>이다. 이를 위해서는 연구 대상에 대한 피상적인 관찰보다는 <u>**심층적인 이해**</u>가 요구된다. 법칙이 추상적일수록 인간 행위에 담긴 동기를 이해하거나 개성적 사회·문화 현상에 대한 설명력을 높이는 데 별로 소용이 없기 때문이다.

→ 해석적 관점

① 프로 야구 팬클럽 회원의 <u>**충성도 분포(→ 실증적 관점)**</u> 연구
② 한국과 일본의 세시 <u>**풍속 의미(→ 해석적 관점)에 대한 비교**</u> 연구
③ 동학 농민 운동에 나타난 <u>**민족 의식(→ 해석적 관점)**</u>에 관한 연구
④ 현대 사회에서의 주술 행위에 대한 <u>**참여 관찰(→ 해석적 관점)**</u> 연구
⑤ 도서 지역 주민들의 경제 행위에 대한 <u>**민속지적 연구(→ 해석적 관점)**</u>

요렇게 하지 않나? 나도 배운 지 오래 되서 더 자세히 짚으면 할 말은 없지만 일단 문제에서 **단서를 찾고, 단서에서 당신들이 배운 것을 적용하고, 문제를 푸는 3단계 과정**을 거치지 않나?

수능 수학도 똑같다.

사탐	'구체적 현상을 어떻게 이해할 것인가', 심층적인 이해	해석적 관점	보기 관찰해서 답 찾기
수리	점 $(0, 1)$을 지날 때,	$b=f(a)$	대입해서 식 생성

사실 이거만 두고 보면 사탐이 더 어렵다. 사탐은 말이 바뀐다. 해석적 관점을 요러쿵 저러쿵 풀어놓는다. 문제마다 표현을 다르게 하니 그런 표현들 싸그리 정리해서 정리하고 외워 둬야 하는 거다. 근데 자연계에서 온 사람은 알겠지만 자연과학을 하는 인간들은 그런 걸 무지 싫어한다. 특히 우리 수학 하시는 분들은 웬만하면 표현을 거의 그대로 쓴다. 그 점을 유의해 두자. 그래서 표현 분석하는 것은 수학이 사탐보다 10배는 쉽다.

물론 여기서 끝나면 이렇게 수리영역 책 보고 있을 리는 없겠지. 수리영역이 어려운 이유는 뒤에 있다. 내가 "대입해서 식 생성"까지밖에 안 썼는데, 이걸로 끝이면 그건 사회탐구보다 쉬운 문제고, 수리영역스러운 문제는 거기서 끝이 아니다. 좀 어려운 문제는 요런 테크를 탄다.

[2012년 수능]

30. ① 자연수 a, b에 대하여 ② 곡선 $y=a^{x+1}$과 곡선 $y=b^{x}$이 직선 ③$x=t\,(t\geq 1)$와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 다음 조건을 만족시키는 ④ a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오. 예를 들어, $a=4$, $b=5$는 다음 조건을 만족시킨다. [4점]

> (가) ⑤ $2\leq a\leq 10$, $2\leq b\leq 10$
> (나) ⑥ $t\geq 1$인 어떤 실수 t에 대하여 ⑦ $\overline{\mathrm{PQ}}\leq 10$이다.

이 문제는 뒤에서 친절하게 해설하겠지만 표현 ①~⑦을 세밀하게 엮어 맞추고 중간에 빈 부분을 생각해서 계산을 정확히 해야 되니까 어렵다. 수리영역이 사회탐구와 다른 것이 표현들 사이사이를 엮어 나가는 과정이 필요하고, 그 과정에서 수학적 상상력이 필요한 것이다.

이걸 보면 수학에서 문제가 길면 어려울 것 같지만, 솔직히 수학에서 문제의 길이하고 문제의 어려움하고는 별개다. 교양서로도 나온 '페르마의 마지막 정리'를 보면 문제 길이는 별로 안 길다. 문제 자체로 어려워 보이지 않는다.

> $x^{n}+y^{n}=z^{n}\,(n\geq 3$인 자연수$)$를 만족하는 정수 x, y, z는 존재하지 않는다.

문제는 쉬워 보이는데 증명은 ...... 사이먼 싱의 <페르마의 마지막 정리>라는 책을 참고하자. 재밌는 책이다. 그 책을 읽고 나면 우리는 수능 수리영역만 풀고 수학 안해도 된다는 사실에 감사하게 될지도 모른다.

아 그래프 하다가 갑자기 사회탐구 이야기로 샜네. 수학에서 표현은 잘 안 변한다는 것. 그것에 주의하면서 문제를 풀자는 것이 나의 요지다.

그래프 기본 독해법 1
점 $A(a,\ b)$가 $y=f(x)$ 그래프 위에 있다. $y=f(x)$의 그래프가 점 $A(a,\ b)$를 지난다. $\rightarrow$ $b=f(a)$: A점을 $y=f(x)$에 대입한다.

아주아주아주아주아주아주 기본이 되는 내용이다. 그리고 이 표현은 시험에 나오는 표현이다.

[2007년 6월 평가원]

함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동시킨 그래프가 두 점 $(-1,\ 1),\ (0,\ 5)$를 지날 때,

[2008년 수능]

함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(0, 1)$을 지날 때,

[2009년 수능]

지수함수 $y=5^{x-1}$의 그래프가 두 점 $(a, 5),\ (3, b)$를 지날 때,

봤지? 이 표현이 그대로 나온다. 우리는 이 표현이 나오면 바로 대.입. 하자.

그래프 기본 독해법 2
점 A를 x축 방향으로 a 만큼 평행이동 : $(x,\ y) \rightarrow (x+a,\ y)$ 점 B를 y축 방향으로 b 만큼 평행이동 : $(x,\ y) \rightarrow (x,\ y+b)$ 도형 $y=f(x)$를 x축 방향으로 a 만큼 평행이동 : $y=f(x-a)$ 도형 $y=f(x)$를 y축 방향으로 b 만큼 평행이동 : $y-b=f(x)$ $\rightarrow$ 등호가 나오면 도형이라고 생각하자.

이것도 계속 등장하는 표현이다. 주의할 것은 점의 평행이동과 도형의 평행이동은 부호가 반대라는 것! 이건 반드시 기억하고 있어야 한다.

평행이동은 그 자체로도 시험에 나오지만, 그래프를 살펴볼 때도 필요하다. $y=a^{x-m}$이런 그래프라면 단박에 $y=a^x$의 그래프를 x축 방향으로 m만큼 이동시켰다는 것을 눈치채야 한다. x축의 방향은 오른쪽을 말한다. 화살표 있는 쪽. y축은 위쪽이고.

주의할 것은 $y=a^{2x-4}$ 같은 그래프다. 이 친구는 a^{2x}의 그래프를 어떻게 이동시킨 것일까?
x축으로 4라고 하면 안 된다. **계수가 1인 x 옆에 붙은 마이너스를 봐야 한다**. 즉, $2x+4=2(x-2)$이므로, x축으로 2라는 것. 주의하자. x 앞에 뭐가 붙어 있으면 그 수로 식 전체를 묶어 주는 센스!

[2007년 6월 평가원]

함수 $y=2^x$의 그래프를 x축 방향으로 m만큼, y축 방향으로 n만큼 평행이동시킨 그래프가 ~

[2008년 수능]

~ 이 평행이동에 의하여 점 $A(1,\ f(1))$이 점 $A'(3,\ g(3))$으로 이동된다. ~

[2012년 수능]

곡선 $y=a^{x+1}$과 곡선 $y=b^x$이 ~

그래프 독해법 예제	지수함수와 로그함수

[2008년 6월 평가원]
함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동시킨 그래프가 함수 $y=\log_b x$의 그래프와 점 $(9, 2)$에서 만날 때, $10a+b$의 값을 구하시오. [4점]

<표현 잘라내기>

① x축의 방향으로 a만큼 평행이동
② 점 $(9, 2)$에서 만날 때

<독해법 적용>

① x축의 방향으로 a만큼 평행이동
→ 그래프 독해법 : 도형 $y=f(x)$를 x축 방향으로 a 만큼 평행이동 : $y=f(x-a)$
→ $y=\log_2(x-a)$

② 점 $(9, 2)$에서 만날 때
→ 점 (9, 2)에서 만나는 것은 점 (9, 2)를 지나는 것이다.
→ 그래프 독해법 : $b=f(a)$: A점을 $y=f(x)$에 대입한다
→ $2=\log_2(9-a)$
→ $9-a=2^2$
→ $a=5$

③ $y=\log_b x$의 그래프도 (9, 2)를 지나는 것이다.
→ $2=\log_b 9$
→ $b^2=9$
→ 로그 : 밑조건 $b>0$, $b\neq 1$
→ $b=3$ $(b\neq -3)$

<답 구하기>

④ $10a+b$ 구하기
→ 53

* 표현 “만난다”는 뒤에서 다시 설명합니다.

중간적용(1)

[2005년 6월 평가원]

1. 함수 $y=5^{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동 시켰더니 함수 $y=25\cdot 5^{2x}+2$의 그래프가 되었다. $m+n$의 값은? [3점]

① 2　② 1　③ 0
④ -1　⑤ -2

[2007년 6월 평가원]

2. 함수 $y=2^{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동시킨 그래프가 두 점 $(-1,\ 1)$, $(0,\ 5)$를 지날 때, m^2+n^2의 값을 구하시오. [3점]

[2008년 수능]

3. 함수 $f(x)=2^{x}$의 그래프를 x축 방향으로 m만큼, y축 방향으로 n만큼 평행이동시키면 함수 $y=g(x)$의 그래프가 되고, 이 평행이동에 의하여 점 $\mathrm{A}(1,\ \mathrm{f}(1))$이 점 $\mathrm{A}'(3,\ \mathrm{g}(3))$으로 이동된다. 함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(0,1)$을 지날 때, $m+n$의 값은? [3점]

① $\frac{11}{4}$　② 3　③ $\frac{13}{4}$
④ $\frac{7}{2}$　⑤ $\frac{15}{4}$

[2009년 수능]

4. 지수함수 $y=5^{x-1}$의 그래프가 두 점 $(a,5)$, $(3,b)$를 지날 때, $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

그래프 기본 독해법 3

x축에 대하여 대칭이동 : y 대신에 $-y$
y축에 대하여 대칭이동 : x 대신에 $-x$
원점에 대하여 대칭이동 : x 대신에 $-x$, y 대신에 $-y$
$y=x$에 대하여 대칭이동 : x와 y를 서로 바꾼다

평행이동이 나왔으니 대칭이동도 나와야지. 이 내용도 알아 둬야 한다. 점하고 도형하고 똑같다. 조심할 것은 x축 대칭이면 y 대신에 $-y$를 넣는 것. x 대신에 넣으면 큰일 난다.
여기서 $y=x$ 대칭은 특별한 의미가 있다. 나중에 다시 나오겠지만 $y=x$ 대칭은 역함수 관계에 있는 함수를 만드는 대칭이동이다. 예를 들자면 $y=a^x$와 $y=\log_a x$ $(a>1)$. 이 내용을 바탕으로 우리는 그래프도 그릴 수 있어야 한다.

[2006년 9월 평가원]
ㄱ. 함수 $y=a^{x-1}$의 그래프와 $y=1+\log_a x$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
[2008년 9월 평가원]
ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
[2009년 9월 평가원]
ㄴ. $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
[2011년 6월 평가원]
두 곡선 $y=a^{-x-2}$과 $y=\log_a(x-2)$가 ~

그리 어렵지는 않지만 이 내용들을 알고 있어야 이상한 함수의 그래프를 그릴 수 있으니 유의하자.

그래프 기본 독해법 4

$x=a$에 대하여 대칭이동 : x 대신에 $2a-x$
$y=b$에 대하여 대칭이동 : y 대신에 $2b-y$
$(a,\ b)$에 대하여 대칭이동 : x 대신에 $2a-x$, y 대신에 $2b-y$

자주 나오지는 않는다. 그래도 나온 적이 있으니 알아 두자.

[2009년 수능]
(가) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

만약 이 공식이 생각나지 않는다면 직접 그림을 그려서 생각해도 좋다. 점 A를 $x=2$에 대해 대칭시킨 점 A'이 있으면 두 점의 중점은 대칭축 $x=2$ 위에 있을 테니까.

중간적용(2)

[2002년 수능 변형]

1. 지수함수의 그래프에 대한 〈보기〉의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

< 보 기 >

ㄱ. $y=2^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면 $y=\dfrac{1}{2^x}$의 그래프가 된다.

ㄴ. $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 $y=2^x$의 그래프보다 아래에 놓이게 된다.

ㄷ. $y=\sqrt{2}\cdot 2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 평행이동하여 $y=2^x$의 그래프를 얻을 수 있다.

ㄹ. $y=2^{x-1}$의 그래프를 직선에 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 $y=\log_2 2x$의 그래프를 얻을 수 있다.

ㅁ. $y=2^x$의 그래프와 $y=\dfrac{4}{2^x}$의 그래프는 $x=2$에 대하여 대칭이다.

[2009년 수능]

2. 두 지수함수 $f(x)=a^{bx-1}$, $g(x)=a^{1-bx}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프는
직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

(나) $f(4)+g(4)=\dfrac{5}{2}$

두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은? (단, $0<a<1$)[3점]

① 1 ② $\dfrac{9}{8}$ ③ $\dfrac{5}{4}$

④ $\dfrac{11}{8}$ ⑤ $\dfrac{3}{2}$

그래프 기본 독해법 5

정의역의 모든 원소 x에 대해

① $f(-x)=f(x)$면 y축 대칭(우함수) : x^n(n은 짝수), $\cos x$

② $f(-x)=-f(x)$면 원점 대칭(기함수) : x^n(n은 홀수), $\sin x$, $\tan x$

기함수, 우함수라는 말은 교육과정에서 다루지 않는 말이라 수능에서는 $f(-x)=f(x)$, $f(-x)=-f(x)$라는 말로 표현한다. 다루지만 않고 시험에는 자주자주 나온다. 기함수를 $f(-x)+f(x)=0$이라고 써도 알아챌 수 있으리라 믿는다.

[2012년 수능]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킨다.

[2008년 6월 평가원]

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=f(x)$ 이다.

[2009년 9월 평가원]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.

이 내용이 미분이나 적분에서 중요한 이유는, 미지수의 수를 확 줄여주기 때문이다. 만약 문제에서 구하라는 함수가 $y=ax^3+bx^2+cx+d$라고 하고, $f(-x)=-f(x)$라는 말이 나왔다고 해 보자. 그러면 원점 대칭이니까 홀수 차수인 항만 살아남아야 한다. 따라서 $b=d=0$이 되어서 구할 문자는 a, c로 압축되게 된다.

미분과 관련해서 이 정리도 알아두자.

미분과 관련한 정리

정의역의 모든 원소 x에 대해

$f(-x)=f(x)$면 $-f'(-x)=f'(x)$ → $f(x)+f'(-x)=0$

→ $x=0$ 대입하면 $f'(0)=0$

$f(-x)=-f(x)$면 $-f'(-x)=-f'(x)$ → $f'(-x)=f'(x)$

시험에도 나왔다.

[2007년 6월 평가원]

ㄴ. 모든 실수 x 에 대하여 $g(x)=g(-x)$ 이면 $g'(0)=0$ 이다.

적분과 관련해서는 앞에 한 번 썼다. 복습하자.

적분과 관련한 정리

정의역의 모든 원소 x에 대해

$f(-x)=f(x)$이면 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$

$f(-x)=-f(x)$이면 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$

그래프 독해법 예제	극대와 극소

[2008년 6월 평가원]

사차함수 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+6$ 이 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$ 의 값을 구하시오. [4점]

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=f(x)$ 이다.
(나) 함수 $f(x)$ 는 극솟값 -10 을 갖는다.

〈표현 잘라내기〉

① (가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=f(x)$ 이다.
② 함수 $f(x)$ 는 극솟값 -10 을 갖는다.

〈독해법 적용〉

① (가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=f(x)$ 이다.
→ $f(-x)=f(x)$면 y축 대칭(우함수) : x^n (n은 짝수), $\cos x$
→ 짝수 차수 항만 남아야 한다.
→ $a=0,\ c=0$

② 함수 $f(x)$ 는 극솟값 -10 을 갖는다.
→ $f'(x)=0$인 x를 구해야 한다.
→ $f'(x)=4x^3+2bx=0$
→ $2x(x^2+2b)=0$
→ $x=0$ 또는 $x=\pm\sqrt{-\frac{b}{2}}$ $(b<0)$ (만약 $b<0$이 아니면 $x=0$ 대입할 수밖에 없는데, 그러면 6이 나오니까 절대로 극솟값이 -10이 될 수 없다.)

함수 $f(x)$가 미분가능하고, $f'(a)=0$일 때, $x=a$의 좌우에서
① $f'(x)$의 부호가 − → + 이면 극대
② $f'(x)$의 부호가 + → − 이면 극소

인 것을 생각해 보면서 증감표 작성해도 되고, 귀찮으면 $x=0$일 때는 안 되니까 $x=\pm\sqrt{-\frac{b}{2}}$ 대입하면 될 것이다 라고 넘겨짚어도 된다. $f(-x)=f(x)$ 랬으니까 $x=\sqrt{-\frac{b}{2}}$ 나 $x=-\sqrt{-\frac{b}{2}}$ 나 뭘 대입해도 된다.

$$f\left(\pm\sqrt{-\frac{b}{2}}\right)=\frac{b^2}{4}-\frac{b^2}{2}+6=-10$$

$$\rightarrow -\frac{b^2}{4}=-16\ ,\ b^2=16\ \Rightarrow\ b=-8\ (\because\ b<0)$$

따라서 $f(x)=x^4-8x^2+6$ ⇨ $f(3)=81-72+6=15$

그래프 기본 독해법 6

$y=f(x)$의 그래프가 y축과 만난다 : $x=0$ 대입
$y=f(x)$의 그래프가 x축과 만난다 : $y=0$ 대입

이제부터 '만난다' 시리즈가 나올 것이다. 사람의 삶에서 만남이 중요하듯이 수학에서도 만남은 중요하다. 그리고 만남은 시험에 나오게 되고. 수학에서 두 그래프가 어떤 점에서 만난다는 것은 두 그래프 모두 그 점을 지난다는 것이다. 이것은 인간의 만남에서 서로 공통된 부분이 있어야 한다는 것과 같다.

y축은 $x=0$인 직선이라고 볼 수 있다. 그렇기 때문에 서로 $x=0$인 것을 공유하는데, 우리가 보고자 하는 것은 $y=f(x)$이므로, $x=0$을 대입하면 된다. 반대로 x축은 $y=0$이므로, $y=0$을 대입하면 된다.

[2009년 6월 평가원]
두 곡선 $y=3^{x+m}$, $y=3^{-x}$이 y축과 만나는 점을 각각 A, B라고 하자.
[2012년 9월 평가원]
점 $(0,\ -4)$에서 곡선 $y=x^3-2$에 그은 접선이 x축과 만나는 점의 좌표를 $(a,\ 0)$이라 할 때, ~

x축과 만나는 점의 x좌표값을 x절편, y축과 만나는 점의 y좌표값을 y절편이라고 하는데, 그것을 구하라는 문제이다.

그래프 기본 독해법 7

① $y=k$와 $y=f(x)$의 그래프가 $A(a,\ b)$에서 만난다
→ a는 방정식 $k=f(x)$의 근, $b=k$
② $x=k$와 $y=f(x)$의 그래프가 $A(a,\ b)$에서 만난다
→ $a=k$, $b=f(a)$

비슷한 내용으로 이제는 x축, y축과 평행한 직선과 만나는 점을 묻는 것이다. 역시 대입의 문제이다. 확실히 알아 둬야 할 것은, 두 그래프가 서로 만나서 생기는 교점은 두 그래프 중 어느 것에도 대입해도 된다는 것이다.

[2007(나) 9월/평가원 23]
자연수 n에 대하여 두 함수 $y=2^x$, $y=\log_2 x$의 그래프가 직선 $x=n$과 만나는 교점의 y좌표
[2008(나) 9월/평가원 14]
ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$는 한 점에서 만난다.
[2012년 수능]
자연수 a, b에 대하여 곡선 $y=a^{x+1}$과 곡선 $y=b^x$이 직선 $x=t(t\geq 1)$와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자.

주로 $x=k$, $y=k$를 대입하여 구하는 식으로 나오지만 2012년 수능처럼 그래프를 이동시켜 가면서 구해야 하는 경우도 있다. x축, y축과 다른 점은 직선 $x=k$, $y=k$가 k에 따라서 이동할 수 있다는 점이다. 그렇기 때문에 직선을 이동시켜 가면서 교점의 개수를 구하거나 교점 간의 거리를 살펴보는 기술이 필요하다. 아래 예제에서 다룬다. 이동시키는 것은 그래프(2)에서 좀 더 자세히 다루겠다.

그래프 기본 독해법 8
$y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 $A(a,\ b)$에서 만난다 $\rightarrow$ 방정식 $f(x)=g(x)$의 해가 $a,\ b=f(a)=g(a)$ $\ast$ 그래프 대신 두 직선, 두 곡선이라는 말을 쓰기도 한다.

마지막으로 곡선과 곡선이 만나는 경우다. 사실 6, 7은 모두 8에 포함되는 내용이지만 수능에서 물어보는 내용이 다른 편이기 때문에 따로 분류하였다. 그 만큼 중요하다는 것이다.

[2006년 9월 평가원]

ㄴ. 함수 $y=-a^x$의 그래프와 함수 $y=\log_{\frac{1}{a}}x$의 그래프는 만난다.

[2007년 수능]

함수 $y=k\cdot 3^x\ (0<k<1)$의 그래프가 두 함수 $y=3^{-x}$, $y=-4\cdot 3^x+8$의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자.

[2008년 6월 평가원]

두 함수 $y=2^x$, $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x+k$의 그래프가 서로 다른 두 점$\mathrm{A}$, B에서 만난다.

[2011년 6월 평가원]

곡선 $y=2^x-1$ 위의 점 $A(2,\ 3)$을 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=\log_2(x+1)$과 만나는 점을 B라 하자.

역시 교점은 두 그래프를 모두 지난다는 것을 이용할 수 있고, $f(x)=g(x)$로 방정식을 세워서 교점의 x좌표를 구할 수 있다.

표현 “만난다”는 그래프에서 가장 핵심이 되는 표현이라고 할 수 있다. “만난다”는 말은 연립방정식을 함축하고 있다. $y=f(x)$, $y=g(x)$라는 식은 함수이기도 하지만, x, y에 관한 방정식으로도 볼 수 있다. 이 두 방정식을 모두 만족하는 점이 바로 교점이다. 그리고 교점은 $y=f(x)$와 $y=g(x)$를 연립하여 나오는 것으로 생각해 볼 수 있다. 간단해 보이는 내용이지만 고등학교 수학에서 가장 중요한 내용 중 하나이다. 그 말은 시험에도 꽤나 나온다는 말이다. 특히 극대·극소와 방정식에서 많이 등장하는데, 그래프(2)에서 자세히 다루겠다.

[2008년 6월 평가원]

6. 두 함수 $y=2^x$, $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x+k$의 그래프가 서로 다른 두 점A, B에서 만난다. 선분 AB의 중점의 좌표가 $\left(0,\ \frac{5}{4}\right)$일 때, 상수 k의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

<표현 잘라내기>

① 두 함수 $y=2^x$, $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x+k$의 그래프가 서로 다른 두 점A, B에서 만난다.

② 선분 AB의 중점의 좌표

<독해법 적용>

① 두 함수 $y=2^x$, $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x+k$의 그래프가 서로 다른 두 점A, B에서 만난다.

→ 방정식 $f(x)=g(x)$의 해 A, B의 x좌표

→ $2^x=-\left(\frac{1}{2}\right)^x+k$

→ $2^x=-2^{-x}+k$

→ 지수방정식의 해법 적용 : $a^x=t$로 치환하여 다항방정식을 푼다.

→ $2^x=t$로 치환하면 : $t=-\frac{1}{t}+k \Rightarrow t^2-kt+1=0$

② 선분 AB의 중점의 좌표

→ 중점의 x좌표는 방정식 $2^x=-2^{-x}+k$의 두 개의 근을 더해서 2로 나눈 것이다.

→ $2^x=-2^{-x}+k$의 두 근을 α, β라고 하면 $\frac{\alpha+\beta}{2}=0$

→ 교점이므로 구해진 x를 $y=2^x$에 대입하면 y좌표가 나온다. 중점의 y좌표가 $\frac{5}{4}$므로 $\frac{2^\alpha+2^\beta}{2}=\frac{5}{4}$

이차방정식의 근과 계수와의 관계

$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$의 두 근을 α, β라 하면,

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$, $|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|\alpha|}$

* 치환하는 경우 근도 함께 치환한다.

→ 치환하는 경우 근도 함께 치환하므로, $2^x=t$: α, $\beta \Rightarrow 2^\alpha$, 2^β

→ 치환된 방정식 $t^2-kt+1=0$의 두 근은 2^α, 2^β

→ 위에서 $2^\alpha+2^\beta=\frac{5}{2}$라고 했고, 근과 계수의 관계 적용하면 $2^\alpha+2^\beta=k$

→ $k=\frac{5}{2}$ → 답 ⑤

중간적용(3)

[2009년 6월 평가원]

1. 두 곡선 $y=3^{x+m}$, $y=3^{-x}$이 y축과 만나는 점을 각각 A, B라고 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=8$일 때, m의 값은? [3점]

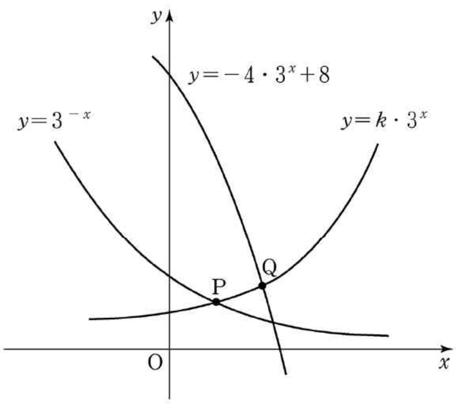
① 2　② 4　③ 6
④ 8　⑤ 10

[2007년 9월 평가원]

2. 자연수 n에 대하여 두 함수 $y=2^x$, $y=\log_2 x$의 그래프가 직선 $x=n$과 만나는 교점의 y좌표를 각각 a, b라 하자. $a+b$가 세 자리의 자연수일 때, $a+b$의 값을 구하시오. [4점]

[2007년 수능]

3. 함수 $y=k\cdot 3^x$ $(0<k<1)$의 그래프가 두 함수 $y=3^{-x}$, $y=-4\cdot 3^x+8$의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 점 P와 점 Q의 x좌표의 비가 1 : 2일 때, $35k$의 값을 구하시오. [4점]



[2006년 9월 평가원]

4. $a>1$일 때, 〈보기〉에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. 함수 $y=a^{x-1}$의 그래프와 함수 $y=1+\log_a x$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

ㄴ. 함수 $y=-a^x$의 그래프와 함수 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$의 그래프는 만난다.

ㄷ. 함수 $y=ka^x$의 그래프와 함수 $y=\log_a x$의 그래프가 만나도록 하는 양의 실수 k가 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2008년 9월 평가원]

5. $0<a<1$인 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} a^x & (x<0) \\ -x+1 & (0\le x<1) \\ \log_a x & (x\ge 1) \end{cases}$$

일 때, 〈보기〉에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $\{f(-3)\}^5=f(-15)$

ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$는 한 점에서 만난다.

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

그래프 기본 독해법 9

절댓값 기호가 있는 그래프 그리는 방법

① $y=f(|x|)$의 그래프
— $x \geq 0$인 부분 ⇒ $y=f(x)$
— $x<0$인 부분 ⇒ $y=f(-x)$ — y축 대칭

② $|y|=f(x)$의 그래프
— $y \geq 0$인 부분 ⇒ $y=f(x)$
— $y<0$인 부분 ⇒ $-y=f(x)$ —x축 대칭

③ $y=|f(x)|$의 그래프
x축 아래 부분을 접어 올린다.

④ $|y|=f(|x|)$의 그래프
1사분면은 그대로 두고, 그 외의 부분은 1사분면을 대칭이동 시켜서 그린다.

이 내용은 나오면 어렵다. 그래프 그리는 것이 어려워지기 때문이고, 그 다음 교점을 구하라고 아주 어질어질하기 때문이다. 여기서는 기본적인 독해법을 다루므로 문제는 여기서 풀기는 어렵다. 문제는 뒤에서 다룰 것이고 우리는 이론을 공부해 두자.

시험에 자주 나오는 것은 ①, ③의 내용이다. ①의 내용은 중요한 것은 $x=0$인 곳 오른쪽 부분을 왼쪽으로 대칭해서 그래프가 그려지는 것이고, ③의 내용은 $y=0$인 곳 위쪽 부분을 아래로 대칭이동해서 그래프를 그리라는 것을 말한다. 딱 봐도 그래프가 복잡해질테고, 여기에 방정식이나 미분 같은 내용을 집어넣으면 공포의 도가니가 될 것이다. 훩훩

[2009(나) 6월]
함수 $y=\log_2|5x|$의 그래프와 함수 $y=\log_2(x+2)$의 그래프가 만나는 ~
[2011년 수능]
두 곡선 $y=|\log_2 x|$와 $y=2^x$이 만나는 점을 ~
[2012년 수능]
방정식 $|f(x)|=2$의 서로 다른 실근의 개수가 4일 때 ~
[2010년 6월 평가원]
함수 $|f(x)-f(1)|$은 오직 $x=a(a>2)$에서만 미분가능하지 않다.
[2011년 수능]
함수 $|f(x)-t|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

어떻게 여기서 다룰 수 있는 문제가 없다. 너무 어려운 문제들뿐이다. 여기서는 그래프 그리는 연습 정도만 하자. 조심할 것은 $\frac{|x|}{x}$처럼 절댓값 없는 것이랑 같이 나온 경우는 대칭이동이 아니고 $x \geq 0$, $x<0$일 때로 구간을 나누어서 그리는 것을 요구한다는 것이다.

절댓값은 뒤에서 또 다루겠지만 그래프에서 나오든 다른데서 나오든 나오는 순간 여러분을 패닉으로 만들어 버릴 수 있는 위력의 존재라는 것을 잊지 말자.

그래프 기본 독해법 10
주기성 모든 실수 x에 대하여 $f(x+c)=f(x)$를 만족시킨다. (c는 양수) → 주기가 c인 주기함수 * 복+붙 되는 그래프의 양 끝을 주목한다.

주기성도 빼먹을 수 없다. 그래프 길게 그리기도 귀찮고 해서 내는 것 — 은 아니고, 여러분의 "수학적 사고력"을 측정하기 위함이겠다.

[2010년 6월 평가원] 함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$ 를 만족시키고, [2010년 9월 평가원] 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$일 때, [2010년 수능] (나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$이다.

2010년 1년 동안 나왔다. 우왕ㅋ굳ㅋ 참고로 2010년 수능은 내가 치렀던 수능이다. 그 땐 몰랐는데 다시 보니까 2010년 수능에 주기성이 나올 수밖에 없었구나. ——ㅋ

주기성이 나오면 주목해야 할 것은 **양 끝 부분**이다. 주기성이라는 말은 그래프가 계속 반복된다는 것이다. 이를테면 $-1 \leqq x < 1$에서 그래프가 $y=x^2$이라고 하자. 그러면 이 그래프가 $1 \leqq x < 3$, $-3 \leqq x < -1$에서도 똑같이 반복된다는 것이다. 이 때 주목해야 할 점은 바로 $x=-1$, $x=1$ 같이 그래프 두개를 잇는 점이다. 그 점에서 불연속인지 연속인지, 미분가능한지 물어볼 것이다.

[2009년 6월 평가원]

1. 함수 $y=\log_2|5x|$의 그래프와 함수 $y=\log_2(x+2)$의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라고 하자. 두 그래프를 개략적으로 그려 보시오.

[2010(나) 6월 평가원]

2. 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$를 만족시키고,

$f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|+1 \quad \left(-\frac{1}{2} \le x < \frac{3}{2}\right)$ 이다. $y=f(x)$의 그래프를 개략적으로 그려 보시오.

그래프 기본 독해법 11
점 A에서 x축과 평행한 직선을 그어서 ~와 만나는 점을 B라 할 때 : A와 B의 y좌표가 같다 점 A에서 y축과 평행한 직선을 그어서 ~와 만나는 점을 B라 할 때 : A와 B의 x좌표가 같다 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 B라 할 때 : A와 B의 x좌표가 같다 점 B에서 y축에 내린 수선의 발을 B라 할 때 : A와 B의 y좌표가 같다

휴~ 이제 거의 다 왔다. 이 내용은 간단하지만 문제에 나오면 쉽지 않다. x축에 평행한 직선을 그려 보면 어떻게 되는지 그래프에서 살펴보면 위에 써진 설명을 이해할 수 있다. 위에 있는 설명을 외우기보다는 알아두고, 그래프에서 확인하는 것이 좋다.

[2008년 6월 평가원] 점 B에서 직선 $y=a$에 내린 수선의 발을 E, 점 C에서 직선 $y=b$에 내린 수선의 발을 F라 하자. [2009년 6월 평가원] 한 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^{x-3}$과 만나는 점을 B라 하자. [2011년 9월 평가원] $y=\log_2 x$의 그래프 위의 점 C에 대하여 선분 AC가 y축에 평행하고 ~

지수함수와 로그함수에서 유독 자주 나오는 내용이다. 뒤에서 그래프 연습을 할 것이다. 기본 독해법 11을 이용해서 문제에서 제시된 점들의 좌표를 알아내는 것이 필요하다.

그래프 기본 독해법 12
직선 $y=x$ 위의 점은 x좌표와 y좌표가 같다

당연한 내용인데 그래프에서 나오면 쉽지만은 않다. 그래프 기본 독해법 11과 연계해서 나오는 내용으로, 여러분의 눈을 어지럽게 할 수 있다. 점화식과 연계하여 서울대학교 수리논술에서도 나온 내용이다. 어헣헣

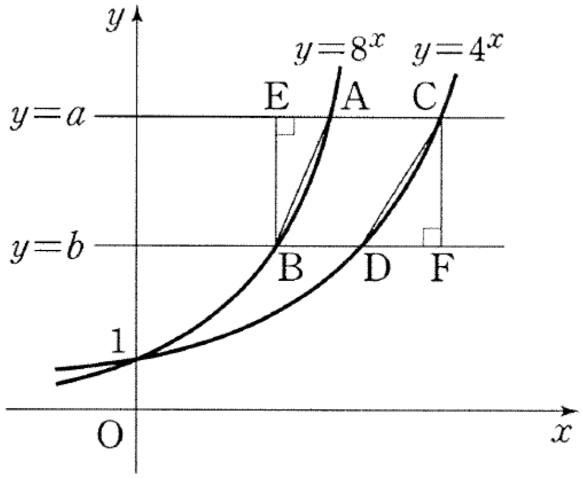
[2009년 수능] $0<a<\frac{1}{2}$인 상수 a에 대하여 직선 $y=x$가 곡선 $y=\log_a x$와 만나는 점을 (p, p) [2010년 6월 평가원] 그림과 같이 함수 $y=\log_2 x$의 그래프 위의 한 점 A_1에서 y축에 평행한 직선을 그어 직선 $y=x$와 만나는 점을 B_1이라 하고

역시 점의 좌표를 보는 것이 가장 중요하다. 그래프 훈련 다음에 원본 문제를 풀어 보자.

중간적용(4)

[2008년 6월 **평가원 변형**]

1. 그림과 같이 함수 $y=8^x$의 그래프가 두 직선 $y=a$, $y=b$와 만나는 점을 각각 A,B라 하고, 함수 $y=4^x$의 그래프가 두 직선 $y=a$, $y=b$와 만나는 점을 각각 C,D라 하자. 점 B에서 직선 $y=a$에 내린 수선의 발을 E, 점 C에서 직선 $y=b$에 내린 수선의 발을 F라 하자.



그래프 독해법 연습	**시험에 나왔던 그래프 살펴보기**

1. A, B, C, D, E, F의 y좌표를 a와 b를 이용해서 나타내어 보자.

2. A의 x좌표를 t라고 할 때, E점의 y좌표는 어떻게 되는가?

3. 2번의 상황에서 B점의 x좌표는 어떻게 되는가?

4. 3번의 상황에서 F점의 y좌표는 어떻게 되는가?

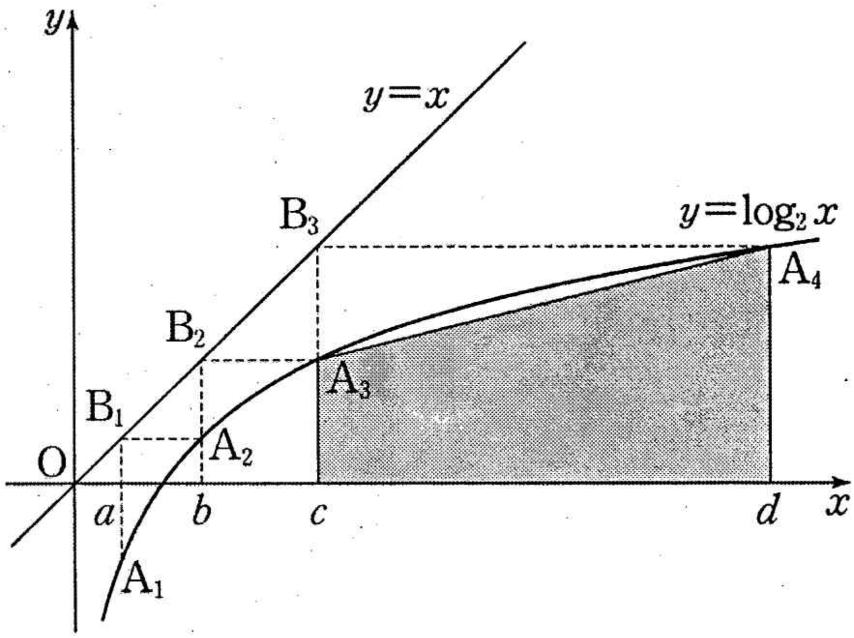
조건 이용하여 문제 풀기	**시험에 나왔던 그래프 살펴보기**

삼각형 AEB의 넓이가 20일 때, 삼각형 CDF의 넓이는?(단, $a>b>1$이다.)

① 26 ② 28 ③ 30 ④ 32 ⑤ 34

[2010년 6월 평가원 변형]

2. 그림과 같이 함수 $y=\log_2 x$의 그래프 위의 한 점 A_1에서 y축에 평행한 직선을 그어 직선 $y=x$와 만나는 점을 B_1이라 하고, 점 B_1에서 x축에 평행한 직선을 그어 이 그래프와 만나는 점을 A_2라 하자. 이와 같은 과정을 반복하여 점 A_2로부터 점 B_2와 점 A_3을, 점 A_3으로부터 점 B_3와 점 A_4를 얻는다. 네 점 A_1, A_2, A_3, A_4의 x좌표를 차례로 a, b, c, d라 하자.



그래프 독해법 연습	시험에 나왔던 그래프 살펴보기

1. A_2의 x좌표는 b이다. B_2의 x좌표는 몇인가?

2. B_2는 직선 $y=x$ 위에 있다. A_3의 y좌표는 몇인가?

3. $\log_2 d$의 값은 몇인가?

조건 이용하여 문제 풀기	시험에 나왔던 그래프 살펴보기

네 점 $(c,\ 0)$, $(d,\ 0)$, $(d,\ \log_2 d)$, $(c,\ \log_2 c)$를 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이를 함수 $f(x)=2^x$을 이용하여 a, b로 나타낸 것과 같은 것은?

① $\frac{1}{2}\{f(b)+f(a)\}\{(f\circ f)(b)-(f\circ f)(a)\}$

② $\frac{1}{2}\{f(b)-f(a)\}\{(f\circ f)(b)+(f\circ f)(a)\}$

③ $\{f(b)+f(a)\}\{(f\circ f)(b)+(f\circ f)(a)\}$

④ $\{f(b)+f(a)\}\{(f\circ f)(b)-(f\circ f)(a)\}$

⑤ $\{f(b)-f(a)\}\{(f\circ f)(b)+(f\circ f)(a)\}$