수능에서 논술까지 한번에!

한권으로 완성하는 수학

수학 II (상)

13개의 $Critical\ \ Point$로 수능 수학을 정복하고

33개의 심화특강으로 수능 수학의 풀이속도와 수리논술을 정복한다!

이해원 지음

All in One

저자 이해원

연세대학교 수학과
성광고등학교 졸업
2010 고려대학교 정보통신대학 합격
2011 연세대학교 이과대학 수학과 합격
2011 고려대학교 이과대학 수학과 합격
2012 고려대학교 사범대학 수학교육과 합격
2012 포카칩 모의평가 검토위원
2011 KICE 9월 모의평가 수학 100점
2012 KICE 대학수학능력시험 수학 100점
2012 Xi-story 자이스토리 수학 수기 저자
tbs 기적의 TV - 상담 받고 대학가자: 공부의 비법 <수리영역>편 출연

주요 저서
수능에서 논술까지 한번에! 한권으로 완성하는 수학 - 수학 II(상)
수능에서 논술까지 한번에! 한권으로 완성하는 수학 - 수학 II(하)
수능에서 논술까지 한번에! 한권으로 완성하는 수학 - 기하와 벡터
수리논술의 종지부를 찍다! Exclusive Integration - 적분과 실전
수능에서 논술까지 한번에! 한권으로 완성하는 수학 - 적분과 통계(상)
수능에서 논술까지 한번에! 한권으로 완성하는 수학 - 적분과 통계(하)

저자 이해원이 주로 활동하는 곳 - (닉네임: 난만한)
포만한 수리연구소 (pnmath.com)
오르비스 옵티무스 (orbi.kr)
공신닷컴 (gongsin.com)

이 책을 검토해주셔서 고맙습니다. 감사의 말을 전합니다.

곽호연(서울대학교 수학교육과)님 감사합니다.
김환철(연세대학교 컴퓨터과학과)님 감사합니다.
허혁재(연세대학교 컴퓨터과학과)님 감사합니다.
김희태(한양대학교 의예과)님 감사합니다.
윤현욱(서울대학교 의예과)님 감사합니다.
부승화(성균관대학교 반도체시스템공학부)님 감사합니다.
박천익(한양대학교 기계공학부)님 감사합니다.
한근희(중앙대학교 사범대학 부속고등학교)님 감사합니다.

한권으로 완성하는 수학을 펴내면서...

현재의 입시제도에서 성공적으로 대학교에 입학하기 위해서는 안타깝게도 수능과 논술을 모두 대비해야 합니다. 각 대학교에서 논술전형을 도입하기 시작하면서 학생들은 수능과 논술을 같이 준비해야하는 상황이 되었는데, 대부분의 학생들은 수리논술에 익숙하지 않아서 단 한 번의 서술조차 시도해보지 않은 경우가 많습니다.

또한 수리논술에서는 고교과정으로 이해는 할 수 있으나 평소에 수능 공부를 하면서 혼자서는 체득하기 힘든 개념이 제시문으로 나오는 경우가 많고, 또 그러한 개념으로 문제를 풀어야 하는 경우가 많습니다. 이런 이유로 대부분의 학생들이 논술 개념과 수능(교과서) 개념이 완전히 동 떨어져 있다고 생각해서, 수능 공부와 수리논술 공부를 별개로 생각합니다. 하지만 평소 수능 문제를 풀 때, 좀 더 논리적으로 서술해서 풀려고 노력하고, 문제의 깊은 곳에 숨겨져 있는 의미를 파악하는 연습을 하면 얼마든지 수능과 논술을 함께 대비할 수 있습니다. 하지만 학교나 학원을 다니기 바쁜 학생들의 입장에서 이러한 것을 제대로 공부할 기회가 없는 것이 사실입니다.

이 책에서는 먼저 수능 문제를 해결할 수 있는 $Critical\ \ Point$를 설명하고 있습니다.

여기서 공부하는 CP는 수능 문제를 해결하는 핵심이 됩니다. 또 이것을 실전에 적용하는 방법을 기출 예제에서 알려주고, 이를 스스로 연습할 수 있도록 기출 문제가 준비되어 있습니다.
그 이후 이 책의 하이라이트라고 할 수 있는 심화특강이 시작됩니다. 심화특강에서는 수능 문제를 빠르게 해결할 수 있는 이론과, 수능에서 논술로의 연결고리가 되는 개념을 매우 자세하게 알려줍니다. 이 부분을 완벽히 논리적으로 증명하고 이해한 후 다음 단계인 $Actual\ \ Fight$에 심화특강을 그대로 적용할 수 있는 수능형 문제(간혹 논술형 문제)가 준비되어 있습니다. 여기까지 왔으면 최종 단계인 논술 문제를 풀어야 합니다. 각 대학교의 기출 논술 문제와 각종 논술 문제가 들어가 있습니다. 여기까지 인내심을 가지고 모두 이해하고 공부한다면 수능에서는 원점수 100점을, 논술전형에서는 합격이라는 쾌거를 이룰 수 있을 것입니다.

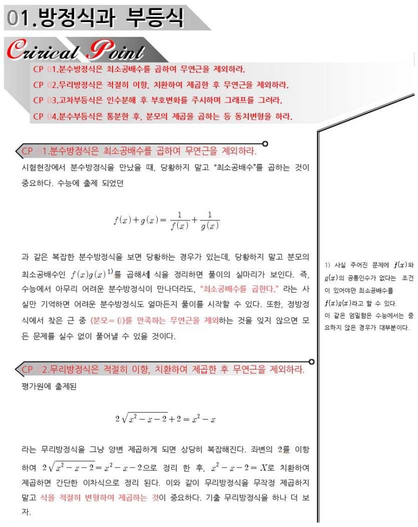
말 그대로 한 권으로 수능과 논술을 완성할 수 있습니다. 이 책은 수험생에게 **최고의 수능개념서이자 수능기출문제집**이고 **최고의 논술개념서이자 논술기출문제집**이 될 것입니다.
이 책으로 수학에 관련된 모든 것의 끝을 볼 수 있도록 구성했습니다.

논술문제에 대한 풀이 방법은 다양할 수 있습니다. 저의 풀이가 가장 좋은 풀이가 아닐 수 있고, 더 다양하고 좋은 풀이가 있을 수 있음을 알고 있습니다. 서로의 의견을 공유하고 싶다면 언제든지 포만한 수리 연구소(pnmath.com)에 글을 남겨 주시면 제 모든 수학 내공을 쏟아서 같이 고민하겠습니다. 또한 책에 대해 궁금한 점이나 잘 이해가 안 되는 것을 이 홈페이지에 찾아오셔서 질문하시면 제가 언제든지 **텍스트** 혹은 **동영상 강의**로 답변을 해드리겠습니다.

마지막으로 감사드려야 할 분이 너무 많습니다. 제가 이렇게 수학적으로 성장할 수 있도록 기틀을 마련해주신 성광고등학교의 문충환 선생님, 이 책의 가능성을 믿고 책을 출판해준 오르비의 박성준 사장님, 집필하는 동안 지겹다고 뻴글(?)을 쓰는 나를 받아준 오르비의 수많은 회원분들, 수학을 좋아하는 포만한 수리연구소의 회원분들, 연세대학교 수학과의 동기들, 내가 정말 아끼는 경북대학교 전자공학과의 친구들, 또한 가장 사랑하는 아버지, 어머니, 누나, 옆에서 책 쓰는 것을 제일 많이 지켜본 동생 정현이 까지 모두에게 감사하다는 말을 전하고 싶습니다.
마지막으로 이 책이 있을 수 있도록 해준 검토자분들에게 다시 한 번 감사하다는 말을 전합니다.

이 해 원

이 책의 구성 및 특징



01.방정식과 부등식

Critical Point

CP 01.분수방정식은 최소공배수를 곱하여 무연근을 제외하라.
CP 02.무리방정식은 적절히 이항, 치환하여 제곱한 후 무연근을 제외하라.
CP 03.고차부등식은 인수분해 후 부호변화를 주시하며 그래프를 그려라.
CP 04.분수부등식은 통분한 후, 분모의 제곱을 곱하는 등 동치변형을 하라.

CP 01.분수방정식은 최소공배수를 곱하여 무연근을 제외하라.

시험현장에서 분수방정식을 만났을 때, 당황하지 말고 "최소공배수"를 곱하는 것이 중요하다. 수능에 출제 되었던

$$f(x)+g(x)=\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{g(x)}$$

과 같은 복잡한 분수방정식을 보면 당황하는 경우가 있는데, 당황하지 말고 분모의 최소공배수인 $f(x)g(x)$[1]를 곱해서 식을 정리하면 풀이의 실마리가 보인다. 즉, 수능에서 아무리 어려운 분수방정식이 만나더라도, "최소공배수를 곱한다." 라는 사실만 기억하면 어려운 분수방정식도 얼마든지 풀이를 시작할 수 있다. 또한, 정방정식에서 찾은 근 중 (분모$=0$)를 만족하는 무연근을 제외하는 것을 잊지 않으면 모든 문제를 실수 없이 풀어낼 수 있을 것이다.

1) 사실 주어진 문제에 $f(x)$와 $g(x)$의 공통인수가 없다는 조건이 있어야만 최소공배수를 $f(x)g(x)$라고 할 수 있다. 이 같은 엄밀함은 수능에서는 중요하지 않은 경우가 대부분이다.

CP 02.무리방정식은 적절히 이항, 치환하여 제곱한 후 무연근을 제외하라.

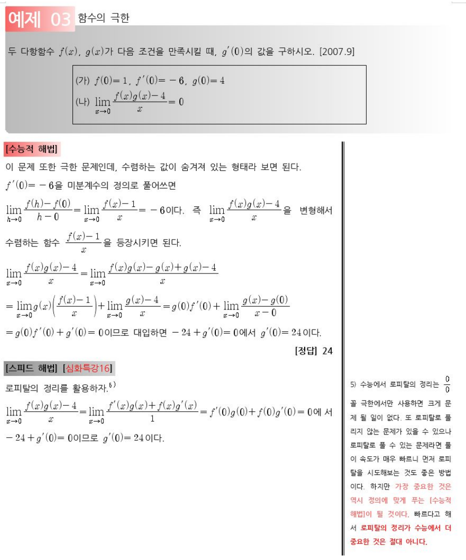
평가원에 출제된

$$2\sqrt{x^2-x-2}+2=x^2-x$$

라는 무리방정식을 그냥 양변 제곱하게 되면 상당히 복잡해진다. 좌변의 2를 이항하여 $2\sqrt{x^2-x-2}=x^2-x-2$으로 정리 한 후, $x^2-x-2=X$로 치환하여 제곱하면 간단한 이차식으로 정리 된다. 이와 같이 무리방정식을 무작정 제곱하지 말고 식을 적절히 변형하여 제곱하는 것이 중요하다. 기출 무리방정식을 하나 더 보자.

수능 $\mathcal{C}ritical\ \ \mathcal{P}oint$

수능 수학에서 가장 중요한 핵심이 설명되어 있다. 심화특강에서 다양한 수학적 이론을 배우게 되면 **[분석 및 해제]**의 **[스피드 해법]**과 같은 숙달된 풀이를 할 수 있게 되지만 결국 수능 수학에서는 여기서 배우는 $Critical\ \ Point$와 이것을 적용시킨 풀이인 **[수능적 해법]**이 가장 중요하다.



예제 03 함수의 극한

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $g'(0)$의 값을 구하시오. [2007.9]

(가) $f(0)=1$, $f'(0)=-6$, $g(0)=4$
(나) $\lim_{x\to0}\frac{f(x)g(x)-4}{x}=0$

[수능적 해법]

이 문제 또한 극한 문제인데, 수렴하는 값이 숨겨져 있는 형태라 보면 된다.

$f'(0)=-6$을 미분계수의 정의로 풀어쓰면

$\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}=-6$이다. 즉 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)g(x)-4}{x}$을 변형해서 수렴하는 함수 $\frac{f(x)-1}{x}$을 등장시키면 된다.

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)g(x)-4}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)g(x)-g(x)+g(x)-4}{x}$

$=\lim_{x\to0}g(x)\left(\frac{f(x)-1}{x}\right)+\lim_{x\to0}\frac{g(x)-4}{x}=g(0)f'(0)+\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$

$=g(0)f'(0)+g'(0)=0$이므로 대입하면 $-24+g'(0)=0$에서 $g'(0)=24$이다.

[정답] 24

[스피드 해법] [심화특강16]

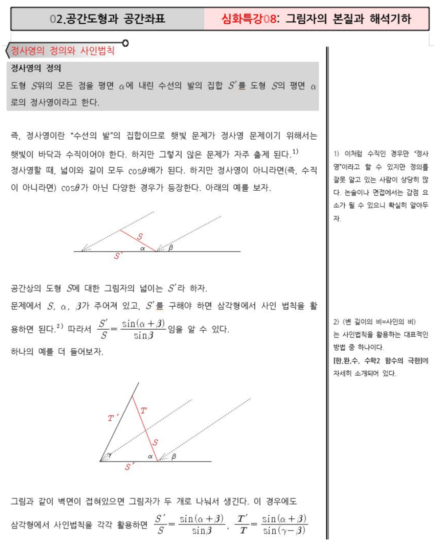
로피탈의 정리를 활용하자.[5]

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)g(x)-4}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}{1}=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)=0$에서 $-24+g'(0)=0$이므로 $g'(0)=24$이다.

5) 수능에서 로피탈의 정리는 $\frac{0}{0}$꼴 극한에서만 사용하면 크게 문제 될 일이 없다. 또 로피탈로 풀리지 않는 문제가 있을 수 있으나 로피탈로 풀 수 있는 문제라면 풀이 속도가 매우 빠르니 먼저 로피탈을 시도해보는 것도 좋은 방법이다. 하지만 가장 중요한 것은 역시 정의에 맞게 푸는 [수능적 해법]이 될 것이다. 빠르다고 해서 **로피탈의 정리가 수능에서 더 중요한 것은 절대 아니다.**

기출예제 & 기출문제

일단 기출예제에서 직접 수능 $\mathcal{C}ritical\ \ \mathcal{P}oint$를 어떻게 적용시키는지 **[수능적 해법]**에서 알려준다. 또한 심화특강을 다 배운 후에 적용할 수 있는 풀이인 **[스피드 해법]**또한 제공한다. 이는 심화특강의 개념을 모두 이해하고 공부한 후에 이해할 수 있는 풀이가 되겠다. 또한 직접 적용해볼 수 있도록 수능, 평가원, 교육청 기출문제가 준비되어 있다.



02.공간도형과 공간좌표 | 심화특강08: 그림자의 본질과 해석기하

정사영의 정의와 사인법칙

정사영의 정의

도형 S위의 모든 점을 평면 α에 내린 수선의 발의 집합 S'를 도형 S의 평면 α로의 정사영이라고 한다.

즉, 정사영이란 "수선의 발"의 집합이므로 햇빛 문제가 정사영 문제이기 위해서는 햇빛이 바닥과 수직이어야 한다. 하지만 그렇지 않은 문제가 자주 출제 된다.[1] 정사영할 때, 넓이와 길이 모두 $\cos\theta$배가 된다. 하지만 정사영이 아니라면(즉, 수직이 아니라면) $\cos\theta$가 아닌 다양한 경우가 등장한다. 아래의 예를 보자.

공간상의 도형 S에 대한 그림자의 넓이는 S'라 하자.
문제에서 S, α, β가 주어져 있고, S'를 구해야 하면 삼각형에서 사인 법칙을 활용하면 된다.[2] 따라서 $\frac{S'}{S}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$임을 알 수 있다.
하나의 예를 더 들어보자.

그림과 같이 벽면이 접혀있으면 그림자가 두 개로 나눠서 생긴다. 이 경우에도 삼각형에서 사인법칙을 각각 활용하면 $\frac{S'}{S}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$, $\frac{T'}{T}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\gamma-\beta)}$

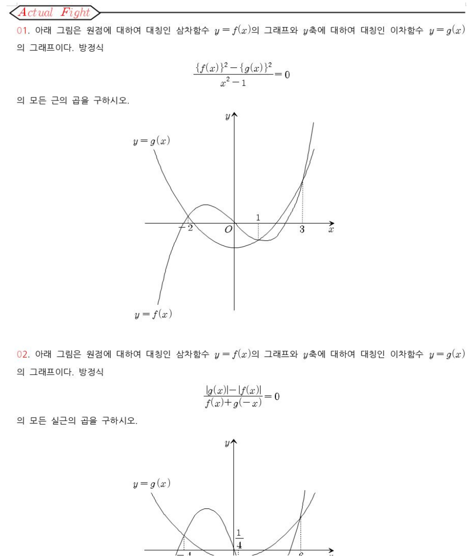
1) 이처럼 수직인 경우만 "정사영"이라고 할 수 있지만 정의를 잘못 알고 있는 사람이 상당히 많다. 논술이나 면접에서는 감점 요소가 될 수 있으니 확실히 알아두자.

2) (변 길이의 비=사인의 비)는 사인법칙을 활용하는 대표적인 방법 중 하나이다. **[한.완.수. 수학2 함수의 극한]**에 자세히 소개되어 있다.

심화특강

이 책의 하이라이트가 되는 파트이다.

수능 문제를 "논리적으로" 빠르게 해결할 수 있는 이론과 수능에서 논술로 연결되는 이론, 논술 문제를 해결할 수 있는 이론까지 모두 알려준다. 이 부분을 공부하고 이해하면 기출예제와 **[분석 및 해제]**에 있는 **[스피드 해법]**을 스스로 구사할 수 있는 실력을 키울 수 있다. 간혹 과학내용과의 연계 또한 다루고 있다.


Actual Fight

01. 아래 그림은 원점에 대하여 대칭인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 y축에 대하여 대칭인 이차함수 $y=g(x)$의 그래프이다. 방정식

$$\frac{\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2}{x^2-1}=0$$

의 모든 근의 곱을 구하시오.

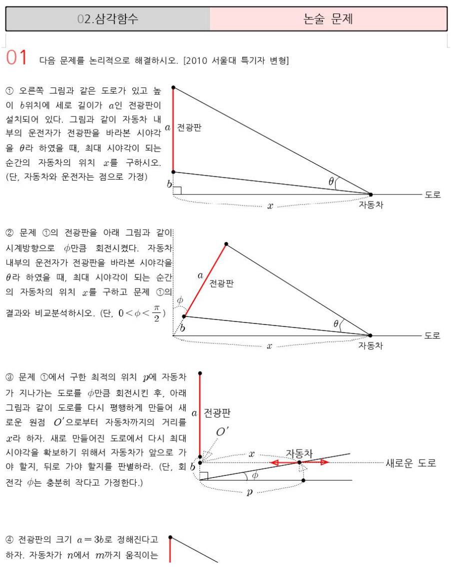
02. 아래 그림은 원점에 대하여 대칭인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 y축에 대하여 대칭인 이차함수 $y=g(x)$의 그래프이다. 방정식

$$\frac{|g(x)|-|f(x)|}{f(x)+g(-x)}=0$$

의 모든 실근의 곱을 구하시오.

Actual Fight

심화특강에서 배운 이론을 적용할 수 있는 교육청, 사관학교, 경찰대 기출문제, 또 다양한 연습문제, 기출변형문제가 준비되어 있다. 여기 있는 문제를 풀면서 심화특강에서 공부한 수능 수학을 빨리 푸는 스킬과 개념을 다시 한 번 확인할 수 있으며 적용 능력을 키울 수 있다.


02.삼각함수	논술 문제

01 다음 문제를 논리적으로 해결하시오. [2010 서울대 특기자 변형]

① 오른쪽 그림과 같은 도로가 있고 높이 b위치에 세로 길이가 a인 전광판이 설치되어 있다. 그림과 같이 자동차 내부의 운전자가 전광판을 바라본 시야각을 θ라 하였을 때, 최대 시야각이 되는 순간의 자동차의 위치 x를 구하시오. (단, 자동차와 운전자는 점으로 가정)

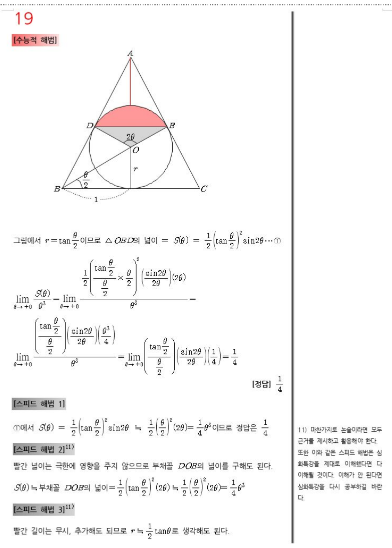
② 문제 ①의 전광판을 아래 그림과 같이 시계방향으로 ϕ만큼 회전시켰다. 자동차 내부의 운전자가 전광판을 바라본 시야각을 θ라 하였을 때, 최대 시야각이 되는 순간의 자동차의 위치 x를 구하고 문제 ①의 결과와 비교분석하시오. (단, $0<\phi<\frac{\pi}{2}$)

③ 문제 ①에서 구한 최적의 위치 p에 자동차가 지나가는 도로를 ϕ만큼 회전시킨 후, 아래 그림과 같이 도로를 다시 평행하게 만들어 새로운 원점 O'으로부터 자동차까지의 거리를 x라 하자. 새로 만들어진 도로에서 다시 최대 시야각을 확보하기 위해서 자동차가 앞으로 가야 할지, 뒤로 가야 할지를 판별하라. (단, 회전각 ϕ는 충분히 작다고 가정한다.)

④ 전광판의 크기 $a=3b$로 정해진다고 하자. 자동차가 n에서 m까지 움직이는

논술 문제

앞서 심화특강을 모두 이해하고 제대로 공부했다면 이제 논술문제를 해결할 차례다. 서울대학교, 연세대학교, 고려대학교, 서강대학교, 한양대학교, 포항공과대학교, 홍익대학교 등 다양한 주요대학의 논술 기출 문제를 포함하고 있으며, 이 부분까지 완벽하게 공부하면 수능과 논술을 모두 대비할 수 있다.


19

[수능적 해법]

그림에서 $r=\tan\frac{\theta}{2}$이므로 $\triangle OED$의 넓이 $= S(\theta) = \frac{1}{2}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^2\sin2\theta\cdots$①

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\times\frac{\theta}{2}\right)^2\left(\frac{\sin2\theta}{2\theta}\right)(2\theta)}{\theta^3}=$$

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\left(\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)\left(\frac{\sin2\theta}{2\theta}\right)\left(\frac{\theta^3}{4}\right)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to+0}\left(\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)\left(\frac{\sin2\theta}{2\theta}\right)\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$$

[정답] $\frac{1}{4}$

[스피드 해법 1]

①에서 $S(\theta)=\frac{1}{2}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^2\sin2\theta \fallingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{2}\right)^2(2\theta)=\frac{1}{4}\theta^3$이므로 정답은 $\frac{1}{4}$

[스피드 해법 2][11]

빨간 넓이는 극한에 영향을 주지 않으므로 부채꼴 DOE의 넓이를 구해도 된다.

$S(\theta)\fallingdotseq$ 부채꼴 DOE의 넓이$=\frac{1}{2}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^2(2\theta)\fallingdotseq\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{2}\right)^2(2\theta)=\frac{1}{4}\theta^3$

[스피드 해법 3][11]

빨간 길이는 무시, 추가해도 되므로 $r\fallingdotseq\frac{1}{2}\tan\theta$로 생각해도 된다.

11) 마찬가지로 논술이라면 모두 근거를 제시하고 활용해야 한다. 또한 이와 같은 스피드 해법은 심화특강을 제대로 이해했다면 다 이해될 것이다. 이해가 안 된다면 심화특강을 다시 공부하길 바란다.

분석 및 해제

다른 시중 책의 해설과는 확연히 구분되는 파트이다.

먼저 **"기출문제"**에 대해서는 *Critical Point*을 적용한 **[수능적 해법]**과 심화특강을 적용한 **[스피드 해법]** 두 가지의 해법을 제공하고 더 다양한 풀이가 있다면 그 또한 모두 공개한다. (왼쪽 예제에서 네 가지 풀이를 하고 있다.)

그리고 "*Actual Fight*"에 대한 해제에서는 심화특강을 배운 그대로 적용하는 **[스피드 해법]**만을 제공하게 된다. 여기서 **[수능적 해법]**은 반드시 스스로 해보아야 한다.

마지막으로 **"논술문제"**에 대해서는 논리적 해법을 제공한다.

이 책을 통한 수험생들의 궁극적인 목표

반드시 읽어볼 것

1

 이 책은 교과서, 익힘책 등의 기본서를 익히고 있다는 전제하에 집필되었다.
하지만 그 기본서 이후의 수능 100점, 수능문제를 빨리 푸는 방법, 논술전형 합격까지의 모든 과정을 이 책 하나가 맡고 있다. 따라서 독자는 **기본서**와 **"이 책"** 딱 두 권으로 논술과 수능을 모두 대비하면 된다.

2

 이 책의 가장 큰 특징 중 하나는 **[분석 및 해제]**에서 **[수능적 해법]**과 **[스피드 해법]** 두 가지 해법을 제공하고, 필요할 때는 그 외의 **다양한 해법**을 제공하는 것이다.
여기서 **[수능적 해법]**이란 $Critical\ \ Point$을 적용한 교과서에 입각한 풀이가 된다.
그리고 **[스피드 해법]**은 심화특강을 적용한 수학적 지식이나 이론을 활용한 빠른 풀이이고 간혹 매우 심화적인 내용까지 동원해서 수능문제를 해결하는 해법이다.
 다양한 심화특강을 배우고 또 그 이론을 터득하면 스스로 **[스피드 해법]**을 구사하게 되는데 실제 수능 현장에서 가장 중요한 것은 이러한 심화내용이 아닌 $Critical\ \ Point$와 **[수능적 해법]**이 된다. **[스피드 해법]**을 활용하면 수능 현장에서 **"시간 단축"**을 얻어낼 수 있지만 간혹 문제가 미궁에 빠질 수 있다. 하지만 **[스피드 해법]**에 대한 **"확신"**이 있다면 시험현장에서 그러한 풀이를 사용해서 시간을 단축하면 된다.
 즉 수험생에게 내가 요구하는 것은 **[수능적 해법]**과 **[스피드 해법]**을 모두 공부하고 시험 현장에서는 **[수능적 해법]**위주로 생각을 하면 되고, 만약 **[스피드 해법]**에 대한 확신이 있다면 그 해법을 시험현장에서 사용해서 시간 단축을 이끌어 내는 것이다.
 물론 그러한 확신이 생기려면 이 책을 매우 많이 반복하고 또 완벽하게 이해해야 한다. 또한 그렇게 공부를 해야 **[논술 문제]**까지 해결하는 능력이 길러질 것이고 그것이 내가 여러분들에게 궁극적으로 요구하는 것이 된다.
그렇게 될 때까지 이 책을 끝없이 반복하길 바란다.

3

 모르는 문제가 나왔을 땐 일단 넘어가고, 책을 한 번 다 공부한 후 다시 나중에 풀어보는 것이 효율적이다. 이와 같이 세 번, 네 번 해도 문제 풀리지 않는다면 **[분석 및 해제]**를 보거나 포만한 수리연구소 (pnmath.com)에 찾아와서 난만한 Q&A에 와서 질문을 하면 **텍스트**나 **동영상 강의**의 답변을 받아볼 수 있다.

4

포만한 수리연구소 (pnmath.com)에서 **무료 동영상 강의**를 제공한다.
이해가 안 되는 개념은 강의를 보면 훨씬 공부하기 편할 것이다.

Contents

수학II (상)

All in One

수학자의 명언

데카르트 (Descartes, 1596~1650)

“나에겐 만물이 수학으로 환원된다.”

01

방정식과 부등식

수능에서 논술까지 한번에!

한권으로 완성하는 수학

이 단원에서 배울 내용

- 수능 *Critical Point* 01~04
- 기출예제 & 기출문제
- 심화특강01: 동치전개와 고차부등식
- 심화특강02: 분수식의 정리방법
- 심화특강03: 분점과 실생활문제
- 심화특강04: 절댓값 그래프의 논리
- 심화특강05: 가우스 그래프의 논리
- 심화특강06: 무리함수 그래프의 논리
- 심화특강07: 분수함수와 합성 자기장
- 심화특강08: 방정식 근의 변형
- 논술문제

저자의 잔소리

수많은 심화특강을 공부하고, [스피드 해법]을 익히더라도
결국 수능에서 가장 중요한 것은 *Critical Point*임을 명심해.

01.방정식과 부등식

Critical Point

CP 01.분수방정식은 최소공배수를 곱하여 무연근을 제외하라.

CP 02.무리방정식은 적절히 이항, 치환하여 제곱한 후 무연근을 제외하라.

CP 03.고차부등식은 인수분해 후 부호변화를 주시하며 그래프를 그려라.

CP 04.분수부등식은 통분한 후, 분모의 제곱을 곱하는 등 동치변형을 하라.

CP 01.분수방정식은 최소공배수를 곱하여 무연근을 제외하라.

시험현장에서 분수방정식을 만났을 때, 당황하지 말고 "최소공배수"를 곱하는 것이 중요하다. 수능에 출제 되었던

$$f(x)+g(x)=\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{g(x)}$$

과 같은 복잡한 분수방정식을 보면 당황하는 경우가 있는데, 당황하지 말고 분모의 최소공배수인 $f(x)g(x)$[1]를 곱해서 식을 정리하면 풀이의 실마리가 보인다. 즉, 수능에서 아무리 어려운 분수방정식이 만나더라도, **"최소공배수를 곱한다."** 라는 사실만 기억하면 어려운 분수방정식도 얼마든지 풀이를 시작할 수 있다. 또한, 정방정식에서 찾은 근 중 **(분모$=0$)를 만족하는 무연근을 제외**하는 것을 잊지 않으면 모든 문제를 실수 없이 풀어낼 수 있을 것이다.

1) 사실 주어진 문제에 $f(x)$와 $g(x)$의 공통인수가 없다는 조건이 있어야만 최소공배수를 $f(x)g(x)$라고 할 수 있다. 이 같은 엄밀함은 수능에서는 중요하지 않은 경우가 대부분이다.

CP 02.무리방정식은 적절히 이항, 치환하여 제곱한 후 무연근을 제외하라.

평가원에 출제된

$$2\sqrt{x^2-x-2}+2=x^2-x$$

라는 무리방정식을 그냥 양변 제곱하게 되면 상당히 복잡해진다. 좌변의 2를 이항하여 $2\sqrt{x^2-x-2}=x^2-x-2$으로 정리 한 후, $x^2-x-2=X$로 치환하여 제곱하면 간단한 이차식으로 정리 된다. 이와 같이 무리방정식을 무작정 제곱하지 말고 **식을 적절히 변형하여 제곱하는 것**이 중요하다. 기출 무리방정식을 하나 더 보자.

$$\sqrt{f(x)-x}=2f(x)-2x-1$$

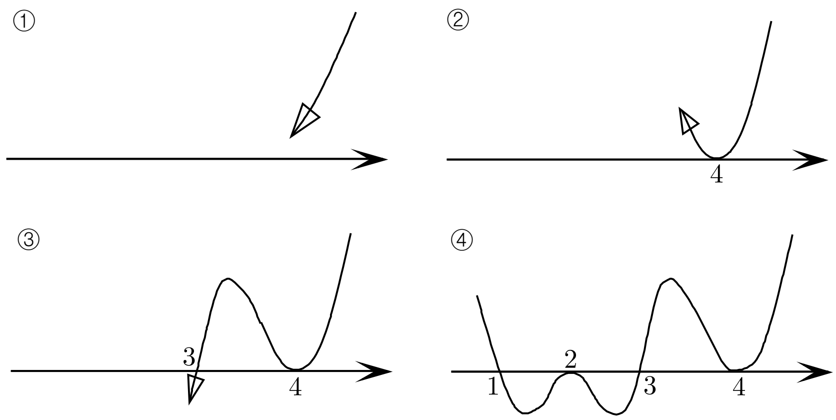
을 그냥 제곱하기에는 우변의 항이 3개라서 상당히 복잡해질 것임을 추측할 수 있다. 여기서 $f(x)-x=X$라고 치환하면 좀 더 간단하게 식을 전개해나갈 수 있다. 또한 분수방정식과 마찬가지로 무연근을 제외시켜야 하는데, **가장 처음에 주어진 방정식에 대입하여 제외시키는 것**이 무리방정식의 무연근을 제외하는 올바른 방법이 된다.

CP 03.고차부등식은 인수분해 후 부호변화를 주시하며 그래프를 그려라.

부등식 $(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4 \geqq 0$을 풀어보자.

$f(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$라 하면, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$이므로

주어진 함수 $f(x)$의 그래프를 오른쪽 끝부터 그려보자.



①→② : 여기서 $f(4.1)$, $f(3.9)$를 생각해보면 $(x-4)^4$의 부호는 바뀌지 않으므로 $f(x)$의 부호 또한 바뀌지 않는다.

②→③ : $f(3.1)$에서 $f(2.9)$로 갈 때, $(x-3)^3$의 부호가 바뀌므로 $f(x)$의 부호 또한 바뀐다.

③→④ : 마찬가지로 $(x-2)^2$에서 부호는 그대로, $(x-1)$에서의 부호는 바뀐다.

이처럼 $f(x)=0$을 만족하는 실근 근처에서 부호변화를 조사하면서 그래프를 그리면 된다.[2] 따라서 그림 ④에서 보듯이 정답은 $x \leqq 1$, $x=2$, $x \geqq 3$이 된다.

연습으로 부등식 $(x^2-x+1)(x^2-5x+6)(|x|-3)|x-4| \geqq 0$을 그래프를 활용하여 풀어보아라.[3]

CP 04.분수부등식은 통분한 후, 분모의 제곱을 곱하는 등 동치변형을 하라.

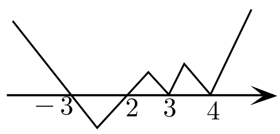
두 평가원 기출 분수부등식

$$\frac{3}{x+4}-\frac{1}{x-2} \geqq 1 \ , \quad \frac{x}{f(2x)-1} \geqq \frac{1}{2}$$ [4]

앞의 문제는 매우 쉬워 보이고, 뒤의 문제는 매우 어려워 보일 수 있다. 하지만 기본 원리에 맞게, 한쪽으로 모두 이항해서 통분한 후 분모의 제곱을 곱하여 고차부등식 형태로 동치변형을 하면 똑같은 방식으로 풀 수 있다. 또한 분수방정식과 마찬가지로 변형한 고차부등식의 실근 중 (분모$=0$)를 만족하는 x값 제외하는 것을 잊지 않으면 실수 없이 기출문제를 풀어낼 수 있을 것이다.

2) 심화특강01에서 더 자세하게 배울 수 있다.

3) $x \leqq -3$, $x \geqq 2$



그림처럼 부호변화가 중요하지 자세한 개형은 중요하지 않다.

4) 앞의 식은 통분하여 정리하면

$(x^2-8)(x-2)(x+4) \leqq 0$

$(x \neq 2, -4)$

라는 동치식을 얻을 수 있고,

뒤의 식은 통분하여 정리하면

$\{(2x+1)-f(2x)\}\{f(2x)-1\} \geqq 0$

$(f(2x) \neq 1)$

라는 동치식을 얻을 수 있다.

예제 01 분수방정식

분수방정식

$$\frac{x^2+x+1}{x-2}-\frac{x+2}{x-1}=\frac{3}{(x-1)(x-2)}-2$$

의 모든 실근의 합은? [2009.6]

[수능적 해법]

양변에 최소공배수 $(x-1)(x-2)$를 곱하여 식을 정리하자.

$(x^2+x+1)(x-1)-(x+2)(x-2)=3-2(x-1)(x-2)$에서

$x^3+x^2-6x+4=0$[1], $(x-1)(x^2+2x-4)=0$인데 $x=1$은 무연근 이므로 이차방정식 $x^2+2x-4=0$의 두 실근이 곧 분수방정식의 근이 된다. 따라서 근과 계수의 관계에 따라 두 실근의 합은 -2가 된다.

[스피드 해법] [심화특강02]

일단 모든 분수식을 정리하자.

$$\frac{x^2+x+1}{x-2}=\frac{7}{x-2}+x+3 \text{ [2]}, \quad \frac{x+2}{x-1}=\frac{3}{x-1}+1$$

$\dfrac{3}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{-3}{x-1}+\dfrac{3}{x-2}$이므로 주어진 식에 대입하면

$\dfrac{-4}{x-2}=x+4\ (x\neq 1)$이다. 또한 양변에 $(x-2)$를 곱하여 정리하면

$x^2+2x-4=0\ (x\neq 1,\ 2)$이므로 두 실근의 합은 -2가 된다.

[정답] -2

1) $x=1$로 조립제법을 해서 인수분해하는 것이 가장 빠르다.

2) x^2+x+1을 $x-2$로 나누는 것이 핵심인데, 일차식으로 나누는 것이므로 조립제법이 가장 좋다. 단순히 나눗셈을 하는 것은 느린 방법이다.

2	1	1	1
		2	6
	1	3	7

이므로

$x^2+x+1=(x-2)(x+3)+7$

예제 02 무리방정식

n이 자연수일 때, x에 대한 무리방정식

$\sqrt{4n+x}+\sqrt{4n-x}=2n$

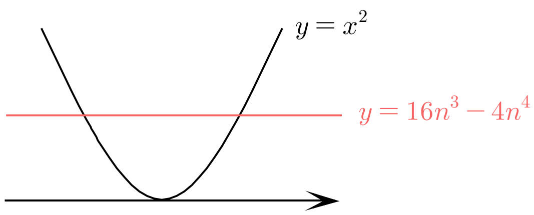
이 실수해를 갖도록 하는 모든 n의 값의 합을 구하시오. [2009.6]

[수능적 해법]

이항한 식 $\sqrt{4n+x}=2n-\sqrt{4n-x}\cdots$①의 양변을 제곱하면

$2n\sqrt{4n-x}=2n^2-x$가 된다. 여기서 또 양변을 제곱하면

$x^2=16n^3-4n^4\cdots$②이 되는데, x는 실수이므로 $x^2=16n^3-4n^4\geq 0$이 되어야 한다.



그림에서 보듯이 $16n^3-4n^4\geq 0$에서 정방정식의 실근이 존재한다.

따라서 $4n^3(4-n)\geq 0$에서 $n\leq 4$인데, 무연근을 제외시켜야 한다.

②에서 $x=2n\sqrt{4n-n^2}$ 임을 알 수 있고, ①에 대입해보면

$\sqrt{4n+2\sqrt{n^2(4n-n^2)}}=2n-\sqrt{4n-2\sqrt{n^2(4n-n^2)}}$ 인데,

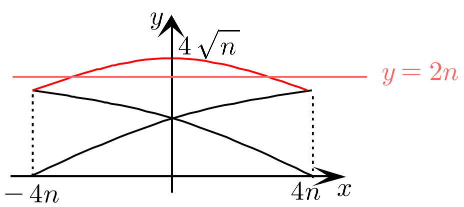
이중근호[3]를 풀면 $\sqrt{4n-n^2}+n=2n-\left|\sqrt{4n-n^2}-n\right|$이다.

여기서 $n=1,2,3,4$를 넣어보면 $n=1$일 때는 만족하지 않음을 알 수 있다.

따라서 정답은 $2+3+4=9$

[스피드 해법] [심화특강06, 21, 23]

$\sqrt{4n+x}+\sqrt{4n-x}=2n$에서 $y=\sqrt{4n+x}+\sqrt{4n-x}$의 그래프를 그려보자.[4]



그림에서 보듯이 $2\sqrt{2}\sqrt{n}\leq 2n\leq 4\sqrt{n}$을 만족할 때 실근을 가진다.

양변을 $2\sqrt{n}$으로 나누면 $\sqrt{2}\leq\sqrt{n}\leq 2$이므로 $n=2,3,4$

따라서 정답은 $2+3+4=9$ **[정답] 9**

***예제02에 대한 조언**

수능적 해법(정석 해법)으로 가면 문제가 어렵다고 생각할 수 있는데, 이것이 정말 기본문제와 다를 바가 없다는 것을 알아야 한다.

첫 번째, 적절히 이항하여 제곱을 하여 정방정식 ②를 유도했다.

두 번째, 정방정식 ②에서 실근이 있어야, 무리방정식의 실근 또한 있으므로 ②가 실근을 가질 조건을 찾았다.

세 번째, 정방정식의 실근 x를 찾아서 주어진 무리방정식에 대입하여 무연근인지 확인한다.

여기서 여러분들이 깨달아야 하는 것은 아무리 어려운 수능문제라도 결국은 쉬운 문제와 같은 원리, 즉 교과서의 기본 원리(**이 책에서는** Critical Point **라고 한다.**)로 모두 해결할 수 있다는 것이다.

어려운 문제를 수능현장에서 만났을 때, 절대 당황하지 말고 Critical Point를 떠올리는 것이 중요하다. **[스피드 해법]의 풀이는 수능에서는 좋은 풀이가 되지 못하는 경우가 많다. 항상 정석을 떠올리는 연습이 되어 있어야 현장에서 당황하지 않고 제대로 된 점수를 받을 것이다. 수능 현장에서 [스피드 해법]을 사용하고 싶다면 그것에 확신을 가질만한 실력[논리적 능력]을 가질 때 까지 이 책을 복습하길 바란다.**

3) 이중근호

$\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

$\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}=\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right|$

절댓값을 빼먹는 경우가 많으니 주의하자.

4) 심화특강04에서 논리적으로 그리는 방법을 설명하겠다. 외우는 것이 아니다.

예제 03 고차부등식, 분수부등식

x에 대한 분수부등식

$$\frac{x(x-n)}{(x-1)(x+n-1)} \leqq 0$$

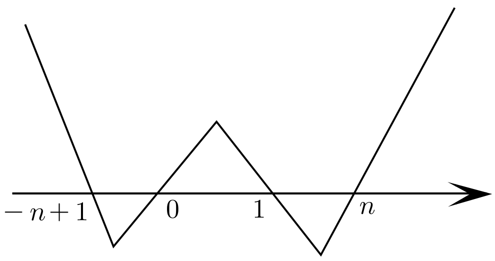
을 만족시키는 정수 x가 100개가 되도록 하는 자연수 n의 값을 구하시오. [2006.6]

[수능적 해법]

$$\frac{x(x-n)}{(x-1)(x+n-1)} \leqq 0$$

$\Leftrightarrow \ (x+n-1)x(x-1)(x-n) \leq 0 \ \ (x \neq 1, x \neq -n+1)$

이므로 오른쪽 고차부등식을 풀기 위해 그래프의 개형을 그리자.

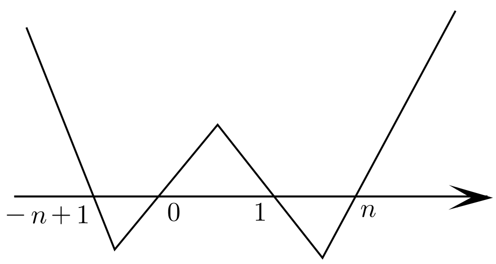


그림에서 보듯이 실근은 $-n+1 < x \leqq 0$, $1 < x \leqq n$이므로

정수의 개수는 $-n+1 < x \leqq 0$에서 $n-1$개[4], $1 < x \leqq n$에서 $n-1$개 이므로 총 $2n-2$개가 된다. 그런데 $2n-2=100$이므로 $n=51$이 된다.

[스피드 해법] [심화특강01]

$\dfrac{x(x-n)}{(x-1)(x+n-1)} \leqq 0$에서 바로 그래프를 그려도 상관없다. 사실 양수인지 음수인지 부호가 중요한 것이기 때문이다. 즉 $x=-n+1$,$x=0$, $x=1$, $x=n$이 네 점에서 부호가 바뀌는지 그대로인지만 파악하면 여전히 개형은



이라 할 수 있으므로 같은 결론을 내릴 수 있다. 물론 분모$=0$가 되는 값은 제외시켜야 한다. 즉 분수식인 상태에서 바로 그래프를 그려내는 것도 시간을 단축시키는 하나의 방법이 되겠다.

[정답] 51

4) 정수 a, b에 대하여
$a \leqq x \leqq b$을 만족하는 정수 x의 개수는 $b-a+1$개
$a \leqq x < b$, $a < x \leqq b$를 만족하는 정수 x의 개수는 $b-a$개
$a < x < b$를 만족하는 정수 x의 개수는 $b-a-1$개
쉬워 보이지만 숙달이 되어 있어야 수능에서 당황하지 않고 개수를 셀 수 있다. 반드시 숙달시켜 두자.

예제 04 분수부등식

분수부등식

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-8}\leq 0$$

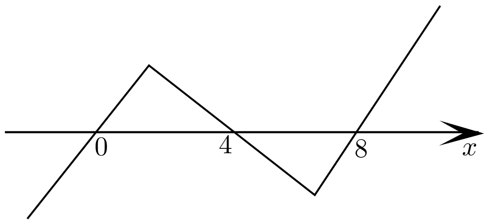
을 만족시키는 모든 자연수 x의 합을 구하시오. [2011.9]

[수능적 해법]

통분을 이용하면 $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-8}=\frac{2x-8}{x(x-8)}\leq 0$이다.

$$\frac{2x-8}{x(x-8)}\leq 0 \Leftrightarrow x(x-4)(x-8)\leq 0 \ \ (x\neq 0, x\neq 8)$$

이므로 그래프를 그리자.



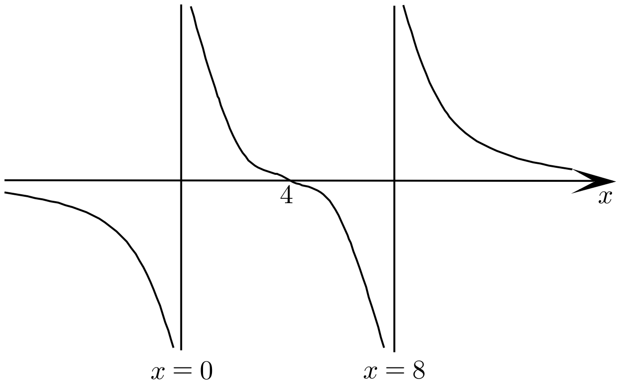
그림에서 보듯이 만족하는 자연수는 $4, 5, 6, 7$이므로 정답은 22

[스피드 해법] [심화특강07]

$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-8}$이라 하면 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to 8+0}f(x)=\infty$,

$\lim_{x\to 8-0}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to +0}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to -0}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to -\infty}f(x)=0$

이므로 개형을 그려보자.[5)]



그림에서 보듯이 만족하는 자연수는 $4, 5, 6, 7$이므로 정답은 22

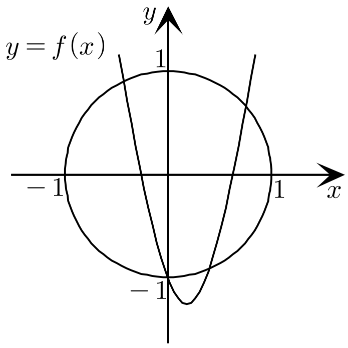
[정답] 22

5) 일단, 극한으로 이해하면서 그래프를 그렸지만, 심화특강에서 좀 더 자세하고 일반화된 이론을 배워보자.

01 오른쪽 그림은 좌표평면에서 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 1인 원과 점 $(0,-1)$을 지나는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프를 나타낸 것이다. 방정식

$$\frac{1}{f(x)+1}-\frac{1}{f(x)-1}=\frac{2}{x^2}$$

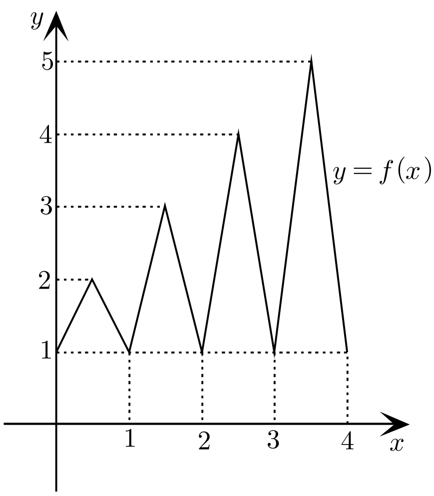
의 서로 다른 실근 x의 개수는? [2009]



01.

Critical Point	심화특강
01	01, 06

02 구간 $[0,4]$에서 정의된 연속함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



방정식 $\sqrt{f(x)-x}=2f(x)-2x-1$의 실근의 개수를 구하시오. [2009.9]

02.

Critical Point	심화특강
02	01

03 방정식 $\sqrt{|x-1|}=x-k$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 상수 k의 값의 범위는 $a<k<b$이다. $100a+b$의 값을 구하시오. [2009.4]

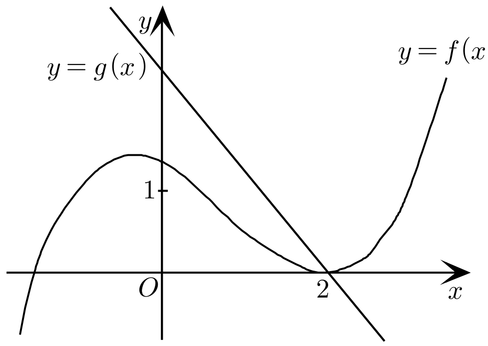
03.

Critical Point	심화특강
02	01, 04

04 그림과 같이 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $P(2,0)$에서 x축에 접하고 일차함수 $y=g(x)$의 그래프와 한 점 P에서만 만난다.
$1<f(0)<g(0)$일 때, 방정식

$$f(x)+g(x)=\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{g(x)}$$

의 실근의 개수는? [2010]



04.

Critical Point	심화특강
01	01, 05, 21