2021학년도 6월 직전 우주설 전승원 모의평가 문제지

수학 영역
(가 형)

성명		수험번호						-				

○ 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정확히 기재하시오.

아마추어는 걱정하는 대로, 프로는 상상하는 대로 된다.

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형 (홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 정답에 ‘0’이 포함되면 그 ‘0’도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점, 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

우 주 설 전 승 원 모 의 평 가

제 2 교시

수학 영역(가 형)

5지선다형

1. $2^a = 3^b$를 만족시키는 양의 실수 a, b에 대하여 $2^{\frac{a}{b}}$의 값은? [2점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

2. 함수 $f(x) = x + e^{2x}$에 대하여 $f'(0)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$의 값은? [2점]

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

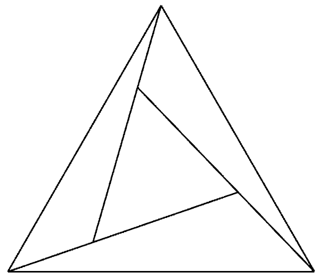
4. 두 사건 A, B가 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A^C) = \frac{4}{5},\ \mathrm{P}(B) = \frac{2}{3}$$

일 때, $\mathrm{P}(A^C \cap B^C)$의 값은? (단, A^C는 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{2}{15}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{4}{15}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

5. 그림과 같이 정삼각형 내부에 합동인 둔각삼각형 3개와 정삼각형이 있다. 서로 다른 4가지 색을 모두 사용하여 한 영역에 한 가지 색만을 칠할 때, 색칠한 결과로 나올 수 있는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

6. $0 < \alpha < \beta < \frac{3}{2}\pi$인 α, β에 대하여

$\sin\alpha : \cos\alpha : \tan\beta = 4 : 3 : 5$

를 만족시킬 때, $\cos(\alpha+\beta)$의 값은? [3점]

① $-\frac{\sqrt{2}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{10}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{2}}{10}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{5}$

7. 함수 $f(x) = \left(x^2 + \frac{k}{2x}\right)^6$에 대하여, $f'(x)$의 전개식에서 x^2의 계수가 60이 되도록 하는 자연수 k의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

8. $0 \le \theta < 2\pi$일 때, 다음 조건을 만족시키는 모든 θ의 값의 합은? [3점]

> (가) $\sin\theta \times \cos\theta \ge 0$
> (나) 좌표평면에서 각 θ가 나타내는 동경과 각 7θ가 나타내는 동경이 서로 일치한다.

① 2π ② $\frac{7}{3}\pi$ ③ $\frac{8}{3}\pi$ ④ 3π ⑤ $\frac{10}{3}\pi$

9. 직선 $x=k$가 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_{\frac{1}{2}}(4-x)$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2$가 되도록 하는 서로 다른 모든 실수 k의 값의 곱은? (단, $0<k<4$) [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

10. $0 \le \theta < 2\pi$일 때, 모든 실수 x에 대하여

$$(\sin\theta)x^2-2(\cos\theta)x+3\sin\theta \ge 0$$

이 항상 성립하도록 하는 모든 θ의 값의 범위는 $\alpha \le \theta \le \beta$이다. $\alpha+3\beta$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{3}\pi$ ② 2π ③ $\frac{7}{3}\pi$ ④ $\frac{8}{3}\pi$ ⑤ 3π

11. 전체집합 $U=\{1,2,3,4,5\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여

$A \cup B \neq U,\ n(A \cap B)=2$

를 만족시키는 두 집합 A, B의 모든 순서쌍 (A, B)의 개수는? [3점]

① 190 ② 210 ③ 230 ④ 250 ⑤ 270

12. 함수 $f(x)=\sin x$에 대하여

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)+f(a+h)}{h}=b$$

일 때, $a+b$의 값은? (단, a와 b는 $0<a<2\pi$, $b\neq 0$인 상수이다.) [3점]

① $\frac{5}{4}\pi-\sqrt{2}$ ② $\frac{5}{4}\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{5}{4}\pi+\sqrt{2}$ ④ $\frac{7}{4}\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}\pi+\sqrt{2}$

13. 2이상의 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$을

$\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)$의 n제곱근중 실수의 개수

로 정의할 때, $\sum_{n=2}^{m} a_n = 16$을 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합은? [3점]

① 37 ② 39 ③ 41 ④ 43 ⑤ 45

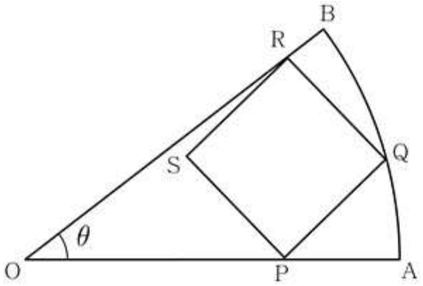
14. 모든 항이 음이 아닌 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 2$이고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $(a_{n+1} - a_n)^2 + (a_{n+1} - a_n) - 6 = 0$
(나) 임의의 자연수 m에 대하여 $a_k = 0$을 만족시키는 자연수 k가 닫힌구간 $[5m-4, 5m]$에 적어도 하나 존재한다.
(다) $a_3 \neq a_8$이다.

$\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은? [4점]

① 15 ② 20 ③ 25 ④ 30 ⑤ 35

15. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OAB에 대하여 꼭짓점 P, Q, R이 각각 선분 OA, 호 AB, 선분 OB 위에 있고 $\angle \mathrm{OPS} = \angle \mathrm{APQ}$인 정사각형 PQRS의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^n} = m$일 때, $m+n$의 값은?
(단, n은 자연수이고 m은 0이 아닌 상수이다.) [4점]

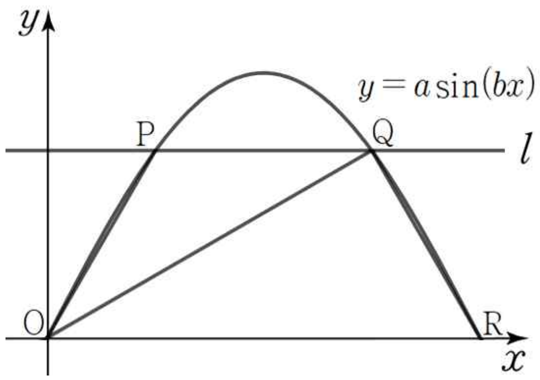


① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

16. 그림과 같이 $0 \le x \le \frac{\pi}{b}$일 때, 함수 $y = a\sin(bx)$의 그래프가 x축과 평행한 어떤 직선 l과 만나는 서로 다른 두 점을 P, Q와 x축 위의 점 $\mathrm{R}\left(\frac{\pi}{b}, 0\right)$에 대하여 각각 아래의 조건을 만족시킨다.

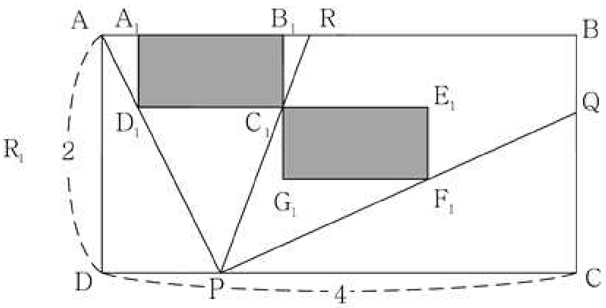
(가) 삼각형 OPQ는 $\overline{\mathrm{PO}} = \overline{\mathrm{PQ}}$인 이등변 삼각형이다.
(나) 삼각형 OQR은 $\angle \mathrm{OQR} = \frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.

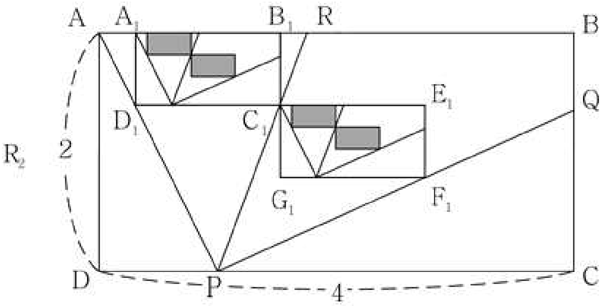
$\frac{ab}{\pi}$의 값은? [4점]



① $\frac{\sqrt{6}}{6}$ ② $\frac{\sqrt{6}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ④ $\frac{5\sqrt{6}}{12}$ ⑤ $\frac{\sqrt{6}}{2}$

17. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{BC}}=2$인 직사각형 ABCD이 있다. 선분 CD의 $3:1$의 내분점을 P라 하고 P에 대하여 $\angle\mathrm{APQ}=\frac{\pi}{2}$가 되도록 하는 선분 BC위의 점을 Q라 하고, 각 APQ를 이등분하는 직선이 선분 AB와 만나는 점을 R이라 하자. 선분 AR위에 점 $\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1$과 선분 PR위의 점 C_1, 선분 PA위의 점 D_1을 $\overline{\mathrm{A_1B_1}}:\overline{\mathrm{B_1C_1}}=2:1$이 되도록 직사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$을 잡고, 선분 PQ위의 점 F_1에 대하여 점 $\mathrm{B}_1, \mathrm{C}_1, \mathrm{G}_1$이 한 직선상에 있고 $\overline{\mathrm{C_1E_1}}:\overline{\mathrm{E_1F_1}}=2:1$이 되도록 직사각형 $\mathrm{C_1E_1F_1G_1}$을 잡는다. 이때, 직사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$와 직사각형 $\mathrm{C_1E_1F_1G_1}$를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 직사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$과 직사각형 $\mathrm{C_1E_1F_1G_1}$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]





⋮ ⋮

① $\frac{396}{239}$ ② $\frac{398}{239}$ ③ $\frac{400}{239}$ ④ $\frac{402}{239}$ ⑤ $\frac{404}{239}$

18. 수열 $\{S_n\}$은 $S_1=\frac{2}{3}$이고 모든 자연수 n에 대하여

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{4k^2+3k+n}{4k^3+(4n+2)k^2+2kn}\ (n\geq 1)$$을 만족시킨다.

다음은 S_n을 구하는 과정이다.

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_{n,k}$이라고 하면

$$a_{n,k}=\frac{4k^2+3k+n}{4k^3+(4n+2)k^2+2kn}=\frac{2k(2k+1)+(k+n)}{2k(2k+1)(k+n)}$$

$$=\frac{1}{k+n}+\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+1}$$이 성립한다.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{4k^2+3k+n}{4k^3+(4n+2)k^2+2kn}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+n}+\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n}-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)+\boxed{(가)}$$

이 때, $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k}-\boxed{(나)}\right)$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(a_{n,k}-\boxed{(다)}\right)$$

가 성립하므로 $\sum_{k=1}^{n}\frac{4k^2+3k+n}{4k^3+(4n+2)k^2+2kn}=\boxed{(가)}$

위의 (가),(나),(다)에 알맞은 식을 각각 $f(n), g(k), h(k)$이라 할 때, $\frac{h(10)}{f(10)\times g(20)}$의 값을 구하시오. [4점]

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{20}$ ③ $\frac{1}{21}$ ④ $\frac{1}{40}$ ⑤ $\frac{1}{41}$

19. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적힌 6개의 공이 들어 있는 주머니에서 공을 하나 꺼내어 다음 규칙에 따라 A 또는 B가 점수를 얻는 게임을 한다. (단, 한 번 꺼낸 공은 주머니에 다시 넣지 않는다.)

(ⅰ) A또는 B중 먼저 9점 이상을 얻는 사람이 승리하며, 승자가 결정될 때 까지 공을 꺼내는 시행을 반복한다.
(ⅱ) 홀수가 적힌 공을 꺼내면 A만 공에 적힌 수만큼 점수를 얻는다.
(ⅲ) 짝수가 적힌 공을 꺼내면 B만 공에 적힌 수만큼 점수를 얻는다.

이 게임에서 A가 승리하였을 때, 주머니에 남아 있는 공이 1개일 확률은? [4점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{5}{12}$ ④ $\frac{11}{24}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

20. 좌표평면에서 지수함수 $y=a^x$의 그래프와 직선 $y=x$는 두 점 $\mathrm{P}(a_1, a_1)$, $\mathrm{Q}(a_2, a_2)$에서 만나고, 지수함수 $y=b^x$의 그래프와 직선 $y=2x$는 두 점 $\mathrm{R}(b_1, 2b_1)$, $\mathrm{S}(b_2, 2b_2)$에서 만난다. <보기>에서 옳은 것을 있는 대로 고른 것은? (단, $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$) [4점]

<보 기>

ㄱ. $a=b$이면, $a_1 > b_1$이다.

ㄴ. $b=a^2$일 때, $a_1 b_2 = a_2 b_1$이다.

ㄷ. 원점 O에 대하여 $b > a^2$일 때 $\angle \mathrm{OPR} > \frac{\pi}{4}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 정수 a에 대하여 구간 $(0,\ \infty)$에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}\ln x & (0<x<e)\\ -a+\ln(2x^2) & (x\geq e)\end{cases}$$

일 때, $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=m(x-e)+b$가 만나는 점의 개수를 $g(m)$이라 하자. $a+b>2+\ln 2$이고 함수 $g(m)$이 양의 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $b=p+\dfrac{q}{e^2}-\ln r$이다. $p+q+r$의 값은? (단, p, q, r은 자연수고, $2<e<2\sqrt{2}$이다.) [4점]

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

단답형

22. ${}_3\mathrm{H}_4+{}_4\mathrm{H}_3$의 값을 구하시오. [3점]

23. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1+a_9=22$일 때, $\sum_{n=4}^{6}a_n$의 값을 구하시오. [3점]

24. 한 개의 동전을 4번 던질 때, 앞면이 나오는 횟수가 뒷면이 나오는 횟수랑 같을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

25. 모든 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k+1} = n^2 + 1$$

일 때, $a_2 + \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n}$ 의 값을 구하시오. [3점]

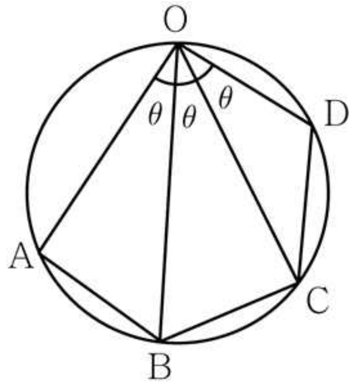
26. 1부터 $3n$까지의 자연수가 각각 한 개씩 적힌 공 $3n$개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때, 3의 배수가 나오는 사건을 A, 5의 배수가 나오는 사건을 B라 하자. 두 사건 A, B가 서로 독립이 되도록 하는 100이하의 자연수 n의 개수를 구하시오. [4점]

27. 무한수열 $\left\{(x+1)\left(\frac{kx}{x^2+1}\right)^{n-1}\right\}$이 모든 실수 x에 대하여 수렴하도록 하는 모든 정수 k의 개수를 구하시오. [4점]

28. 그림과 같이 원 위의 서로 다른 점 O, A, B, C, D가 다음 조건을 만족한다.

(가) $\angle \mathrm{AOB} = \angle \mathrm{BOC} = \angle \mathrm{COD} = \theta$
(나) 세 삼각형 COD, 삼각형 BOC, 삼각형 AOB의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3라 하면, $S_1 : S_2 : S_3 = 2 : 4 : 3$이다.

$\cos^2\theta = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



29. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow Y$의 개수를 구하시오. [4점]

함수 f의 치역의 임의의 원소 a, b에 대하여 $a-b \neq 2$이다.

30. 삼차함수 $f(x)=\frac{1}{16}x^2(12-x)$과 연속함수 $g(x)$가 있다. 미분가능한 함수 $h(x)$가 $t>0$인 t에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\{h(x)-f(x)\}\times\{h(x)-f(x-g(t))+t\}=0$ (나) $x=a$에서 $h(x)$가 극값을 가지는 a의 개수는 4개다. (다) $t=k$일 때 x에 대한 방정식 $h(x)=0$의 실근의 개수가 3개인 k는 유일하다.

$k+99g'\left(\frac{7}{8}\right)$의 값을 구하시오. [4점]

2021학년도 우주설 전승원 모의평가

발행일 : 2020년 6월 14일
퍼낸이 : 정재민(우주설), 전승원

지은이 : 정재민(우주설), 전승원

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.