01

[풀이]

$\sqrt[3]{2}\times 2^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}=2$

답 ②

02

[풀이]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=3x^2-2$

$\therefore\ f'(1)=1$

답 ①

03

[풀이]

삼각함수의 정의에 의하여

$\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)+\tan^2\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+(-\sqrt{3})^2=\frac{3}{4}+3=\frac{15}{4}$

답 ④

04

[풀이]

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+9x+8}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+8)}{x+1}$

$=\lim_{x\to-1}(x+8)=7$

답 ②

05

[풀이]

확률의 덧셈정리에 의하여

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=\frac{2}{5}+\frac{4}{5}-\frac{9}{10}=\frac{3}{10}$

조건부 확률의 정의에 의하여

$\therefore\ \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{2}{5}}=\frac{3}{4}$

답 ⑤

06

[풀이]

$x\to0+$일 때, $f(x)$는 2보다 작은 값을 가지면서 2에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to0+}f(x)=2$

$x\to2-$일 때, $f(x)$는 0보다 작은 값을 가지면서 0에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to2-}f(x)=0$

$\therefore\ \lim_{x\to0+}f(x)+\lim_{x\to2-}f(x)=2+0=2$

답 ⑤

07

[풀이]

등차수열의 정의에 의하여

$a_3=a_2-3,\ a_7=a_2-3\times5=a_2-15$

이므로

$a_3a_7=(a_2-3)(a_2-15)=64,$

$a_2^2-18a_2-19=0,\ (a_2+1)(a_2-19)=0$

$\therefore\ a_2=19\ (\because a_2>a_3>\cdots>a_8>0)$

답 ③

08

[풀이1]

$a=1$을 주어진 부등식에 대입하면

$1<b<4$를 만족시키는 b의 값은 없다.

마찬가지의 방법으로

$a=3$: $3<b<12$, $b=4,\ 6,\ 8,\ 10$

$a=5$: $5<b<20$, $b=6,\ 8,\ 10$

$a=7$: $7<b<28$, $b=8,\ 10$

따라서 구하는 확률은

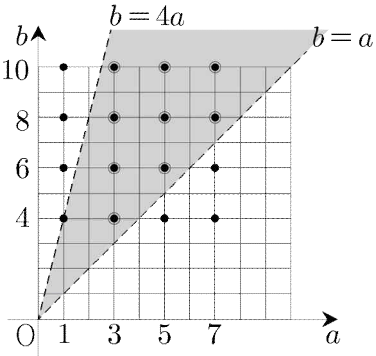
$\frac{0+4+3+2}{4\times4}=\frac{9}{16}$

답 ②

[풀이2]
좌표평면을 도입하여 문제를 해결할 수도 있다.

$1<\dfrac{b}{a}=$(두 점 $(0,\ 0)$, $(a,\ b)$를 잇는 직선의 기울기) <4

이므로 이 부등식을 만족시키는 점을 모두 찾으면 아래 그림과 같다.



따라서 구하는 확률은

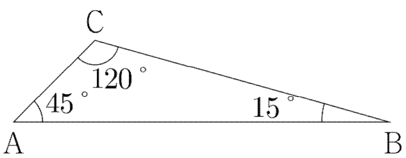
$\dfrac{9}{4\times4}=\dfrac{9}{16}$

답 ②

09

[풀이]
삼각형의 세 내각의 합은 180° 이므로

$\angle \mathrm{C}=180^\circ-(45^\circ+15^\circ)=120^\circ$



삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin45^\circ}=\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin120^\circ}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{8}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{8\sqrt{6}}{3}$

답 ③

10

[풀이]
함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=f(1)$, 즉 $1+a+b=b+4$에서 $a=3$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{bx-b}{x-1}=\lim\limits_{x\to1+}b=b$,

$\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{x^3+3x-4}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{(x-1)(x^2+x+4)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1-}(x^2+x+4)=6$

미분계수의 정의에 의하여

$b=6$

$\therefore\ a+b=3+6=9$

답 ④

[참고]
다음과 같이 b의 값을 유도해도 좋다. (시험장에서는 이 풀이를 따라야 시간을 절약할 수 있다.)

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=\begin{cases}3x^2+3 & (x<1)\\ b & (x>1)\end{cases}$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to1+}f'(x)=\lim\limits_{x\to1-}f'(x)$, 즉 $b=6$

11

[풀이]
이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$a_n=-\dfrac{-(n+5)}{n^2+6n+5}=\dfrac{n+5}{(n+1)(n+5)}=\dfrac{1}{n+1}$

등차수열의 합의 공식에 의하여

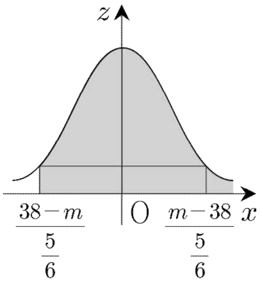
$\therefore\ \sum\limits_{k=1}^{10}\dfrac{1}{a_k}=\sum\limits_{k=1}^{10}(k+1)=\dfrac{2+11}{2}\times10=65$

답 ①

12

[풀이]
이 화사에서 일하는 플랫폼 근로자의 일주일 근무 시간을 X라고 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 5^2)$을 따른다. 그리고 임의추출한 36명의 일주일 근무 시간의

평균을 $\overline{X}$라고 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\frac{5}{6}\right)^2\right)$을 따른다.



따라서 확률변수 $Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{5}{6}}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(\overline{X}\geq 38)=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{38-m}{\frac{5}{6}}\right)=0.9332(>0.5)$$

즉, $\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{m-38}{\frac{5}{6}}\right)=0.9332-0.5=0.4332$

$$\frac{m-38}{\frac{5}{6}}=1.5$$

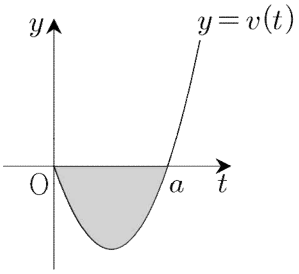
$\therefore\ m=39.25$

답 ③

13

[풀이]

함수 $y=v(t)$의 그래프는



$v(a)=0$이고, $t=a$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 점 P는 $t=a$일 때 움직이는 방향을 바꾼다.

$$\int_0^a|v(t)|dt=\int_0^a|t^2-at|dt$$

$$=\left[\frac{a}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^a=\frac{a^3}{6}=\frac{9}{2},\ a^3=3^3$$

$\therefore\ a=3$

답 ③

[참고]

정적분의 계산을 다음과 같이 단축시킬 수 있다.

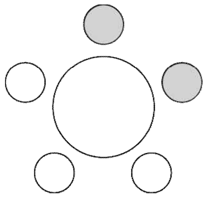
이차함수의 정적분에 대한 공식에 의하여

$$\int_0^a|v(t)|dt=\frac{1}{6}(a-0)^3=\frac{a^3}{6}\quad(\because S=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3)$$

14

[풀이1]

아래 그림처럼 두 학생 A, B는 이웃한 두 자리에 앉아야 한다.



구하는 경우의 수는

${}_6\mathrm{C}_3\times 2!\times 3!=240$

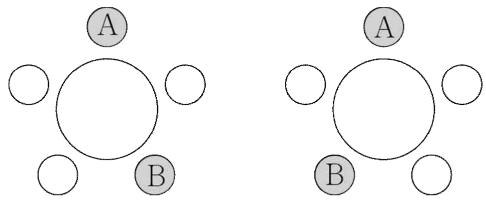
이때, ${}_6\mathrm{C}_3$은 두 학생 A, B를 제외한 6명의 학생 중에서 3명을 택할 경우의 수이고, $2!$은 두 학생 A, B가 앉을 자리를 결정하는 경우의 수이고, $3!$은 나머지 세 학생이 앉을 자리를 결정하는 경우의 수이다.

답 ④

[풀이2]

여집합을 이용하여 문제를 해결하자.

우선 아래 그림처럼 두 학생 A, B가 이웃한 두 자리에 앉지 못할 경우의 수를 구하자.



[경우1] [경우2]

경우의 수는

[경우1] ${}_6\mathrm{C}_3\times 3!=120$

[경우2] ${}_6\mathrm{C}_3\times 3!=120$

전체 경우의 수는

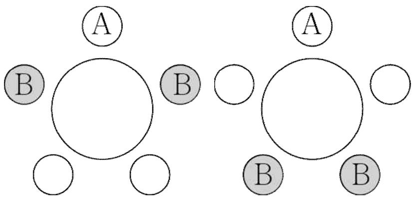
${}_6\mathrm{C}_3\times 4!=480$

따라서 구하는 경우의 수는

$480-(120+120)=240$

답 ④

[풀이3]



위의 그림에서 알 수 있듯이

두 학생 A, B가 서로 이웃할 확률과 그렇지 않을 확률은 각각

$\frac{1}{2}(=\frac{2}{4})$, $\frac{1}{2}(=\frac{2}{4})$

로 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

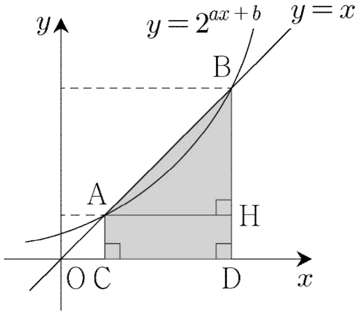
${}_6C_3\times 4!\times\frac{1}{2}=240$

답 ④

15

[풀이]

점 A에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 H라고 하자. 그리고 점 A의 x좌표를 a라고 하자.



직각이등변삼각형 ABH의 빗변의 길이가 $6\sqrt{2}$이므로

$\overline{AH}=\overline{BH}=6$

$(\square\text{ACDB}$의 넓이$)=\frac{a+(a+6)}{2}\times 6=30$, $a=2$

두 점 A, B의 좌표는 각각

$A(2,\ 2)$, $B(8,\ 8)$ $(\because 8=2+6)$

두 점 A, B는 곡선 $y=2^{ax+b}$과 직선 $y=x$의 교점이므로

$2^{2a+b}=2$, $2^{8a+b}=8=2^3$

$2a+b=1$, $8a+b=3$

연립방정식을 풀면

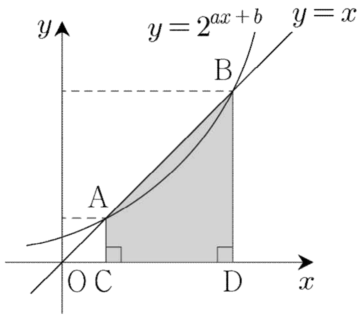
$a=b=\frac{1}{3}$

$\therefore\ a+b=\frac{2}{3}$

답 ④

[참고]

다음과 같이 두 점 A, B의 좌표를 구해도 좋다.



두 점 A, B의 x좌표를 각각 p, q로 두자.

$\overline{AC}=p$, $\overline{BD}=q$이고,

$\overline{CD}=q-p=6\left(\because \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=\sqrt{2}\right)$ $\cdots$㉠

이므로

$(\square\text{ACDB}$의 넓이$)=\frac{p+q}{2}\times 6=30$

즉, $p+q=10$ $\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하면

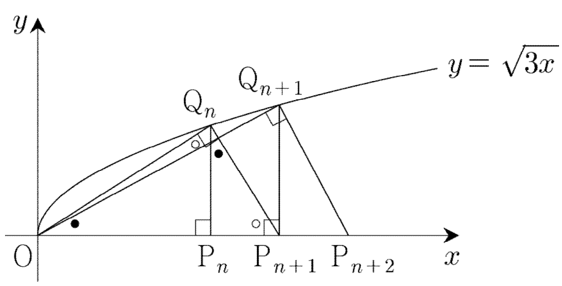
$p=2$, $q=8$

따라서 두 점 A, B의 좌표는 각각

$A(2,\ 2)$, $B(8,\ 8)$

16

[풀이]



모든 자연수 n에 대하여 점 P_n의 좌표를 $(a_n,\ 0)$이라 하자.

$\overline{\mathrm{OP}_{n+1}}=\overline{\mathrm{OP}_n}+\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$이므로

$a_{n+1}=a_n+\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$ …㉠

이다. 삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$과 삼각형 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$이 닮음이므로

$\overline{\mathrm{OP}_n} : \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} : \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$

이고, 점 Q_n의 좌표는 $(a_n,\ \sqrt{3a_n})$이므로

$a_n : \sqrt{3a_n}=\sqrt{3a_n} : \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=\boxed{3}$ …㉡

이다. ㉡을 ㉠에 대입하면

$a_{n+1}=a_n+3$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공차가 3인 등차수열이다.

일반항 $a_n=3n-2$이므로

$a_{n+1}=3n+1$,

$\sqrt{3a_n}=\sqrt{3(3n-2)}=\sqrt{9n-6}$

이다. 따라서 삼각형 $\mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{Q}_n$의 넓이 A_n은

$$A_n=\frac{1}{2}\times\left(\boxed{3n+1}\right)\times\sqrt{9n-6}$$

이다.

(가): $p=3$

(나): $f(n)=3n+1$

$\therefore\ p+f(8)=28$

답 ⑤

17

[풀이]

$$S(x)=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{AC}}=(\log_2 x)\left(\log_4\frac{16}{x}\right)$$

$$=(\log_2 x)\left(2-\frac{1}{2}\log_2 x\right)$$

이때, $\log_2 x=t(0<t<4)$로 두면

$$S(x)=t\left(2-\frac{1}{2}t\right)=-\frac{1}{2}(t-2)^2+2$$

함수 $S(x)$는 $t=2(x=4)$일 때 극댓값(최댓값) 2를 가진다.

즉, $a=4,\ M=2$

$\therefore\ a+M=4+2=6$

답 ①

18

[풀이]

이차함수 $f(x)$의 그래프의 대칭축이 직선 $x=1$이므로

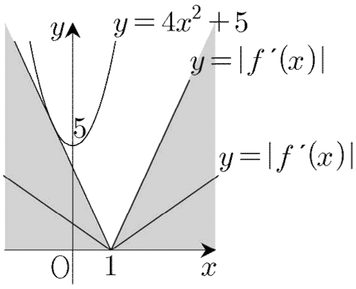
$f(x)=a(x-1)^2+b\ (a\neq 0)$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=2a(x-1)$

이를 문제에서 주어진 부등식에 대입하면

$|2a(x-1)|\leq 4x^2+5$



위의 그림처럼 직선 $y=-|2a|(x-1)$이 곡선 $y=4x^2+5$에 접할 때, $|2a|$와 a는 모두 최댓값을 갖는다. 접점의 x좌표를 t로 두면

접점의 y좌표: $-|2a|(t-1)=4t^2+5$ …㉠

접점에서의 기울기: $-|2a|=8t\ (t<0)$ …㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$4t^2-8t-5=0,\ (2t-5)(2t+1)=0,\ t=-\frac{1}{2}$$

이를 ㉡에 대입하면

$a=2$

따라서 a의 최댓값은 2이다.

답 ②

[참고]

이차방정식의 판별식을 이용하여 a의 최댓값을 구할 수도 있다.

이차방정식

$4x^2+5=-|2a|(x-1)$,

$4x^2+2|a|x+5-2|a|=0$

의 판별식을 D라고 하자.

$D/4=|a|^2-4\times(5-2|a|)=0$,

$|a|^2+8|a|-20=0,\ (|a|+10)(|a|-2)=0$

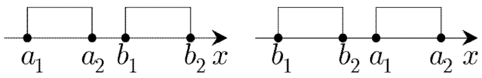
$|a|=2,\ a=\pm 2$

따라서 a의 최댓값은 2이다.

19

[풀이1]

우선 $A\cap B=\varnothing$일 확률을 구하자. 이때, 확률을 p라고 하자.



위와 같이 $a_2<b_1$ 또는 $b_2<a_1$이면 $A\cap B=\varnothing$이다.
그리고 이 역도 성립한다. (즉, 필요충분조건이다.)

$$p=\frac{{}_6C_4\times 2}{{}_6C_2\times{}_6C_2}=\frac{2}{15}$$

이때, 분모의 ${}_6C_2$, ${}_6C_2$는 각각 두 순서쌍 $(a_1,\ a_2)$, $(b_1,\ b_2)$를 결정하는 경우의 수, 분자의 ${}_6C_4\times 2$는 순서쌍 $(a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2)$ 또는 $(b_1,\ b_2,\ a_1,\ a_2)$를 결정하는 경우의 수이다.

따라서 구하는 확률은

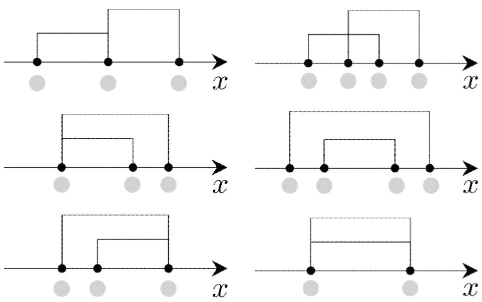
$$1-p=1-\frac{2}{15}=\frac{13}{15}$$

답 ⑤

[풀이2]

여집합을 이용하지 않고 문제를 해결해 보자.

$A\cap B\neq\varnothing$인 경우를 모두 그려보면 다음과 같다.



확률은 각각

$$\frac{{}_6C_3\times 2}{{}_6C_2\times{}_6C_2}=\frac{8}{45},\quad \frac{{}_6C_4\times 2}{{}_6C_2\times{}_6C_2}=\frac{2}{15},$$

$$\frac{{}_6C_3\times 2}{{}_6C_2\times{}_6C_2}=\frac{8}{45},\quad \frac{{}_6C_4\times 2}{{}_6C_2\times{}_6C_2}=\frac{2}{15},$$

$$\frac{{}_6C_3\times 2}{{}_6C_2\times{}_6C_2}=\frac{8}{45},\quad \frac{{}_6C_2}{{}_6C_2\times{}_6C_2}=\frac{1}{15}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{8}{45}+\frac{2}{15}+\frac{8}{45}+\frac{2}{15}+\frac{8}{45}+\frac{1}{15}=\frac{13}{15}$$

답 ⑤

20

[풀이]

두 조건 (나), (다)에서 주어진 두 등식을 다시 쓰면

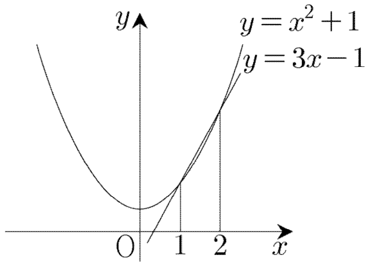
$f(x)+g(x)=(x^2+1)+(3x-1)$, (두 수의 합)

$f(x)\times g(x)=(x^2+1)\times(3x-1)$ (두 수의 곱)

이므로

$\{f(x),\ g(x)\}=\{x^2+1,\ 3x-1\}$

곡선 $y=x^2+1$과 직선 $y=3x-1$의 두 교점의 x좌표는 1, 2이므로, 이 두 함수의 그래프는 다음과 같다.

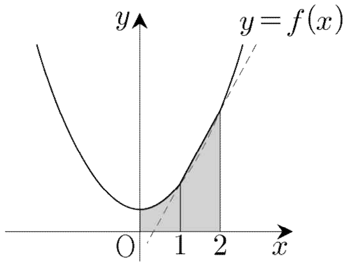


조건 (가)에 의하여

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & (x\le 1,\ x\ge 2)\\ 3x-1 & (1<x<2)\end{cases}$$

함수 $f(x)$의 그래프는



정적분의 성질에 의하여

$$\therefore\ \int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1+\frac{2+5}{2}\times 1$$

$$=\frac{4}{3}+\frac{7}{2}=\frac{29}{6}$$

답 ③

[참고]

곱셈공식이나 이차방정식의 근과 계수와의 관계, 이차방정식의 근의 공식을 이용해도

$\{f(x),\ g(x)\}=\{x^2+1,\ 3x-1\}$

임을 보일 수 있다. 하지만 계산 분량이 늘어나므로 이

문제에서는 권장되는 풀이가 아니다.

21

[풀이]

$a_1 = a$, $a_2 = b$로 두자.

문제에서 주어진 귀납적 정의를 이용하면 아래의 표를 완성할 수 있다.

<table>
<tr><th>a_1</th><th>a_2</th><th>a_3</th><th>a_4</th><th>a_5</th><th>a_6</th></tr>
<tr><td rowspan="3">a</td><td rowspan="3">b</td><td rowspan="3">2</td><td rowspan="2">$2b+2$
$(b \le 2)$</td><td>$2b+6$
$(0 \le b \le 2)$</td><td>$6b+10$
$(0 \le b \le 2)$</td></tr>
<tr><td>$2b+4$
$(b < 0)$</td><td>$6b+8$
$(b < 0)$</td></tr>
<tr><td>$b+2$
$(b > 2)$</td><td>$b+6$
$(b > 2)$</td><td>$3b+10$
$(b > 2)$</td></tr>
</table>

우선 b의 값을 구하자.

$6b+10=19$ $(0 \le b \le 2)$: $b=\dfrac{3}{2}$ (○)

$6b+8=19$ $(b<0)$: $b=\dfrac{11}{6}$ (×)

$3b+10=19$ $(b>2)$: $b=3$ (○)

이제 a의 값을 구하자.

$a \le b$일 때, $a_3 = 2a+b=2$에서

$b=\dfrac{3}{2}$이면 $a=\dfrac{1}{4}$(○), $b=3$이면 $a=-\dfrac{1}{2}$(○)

$a > b$일 때, $a_3 = a+b=2$에서

$b=\dfrac{3}{2}$이면 $a=\dfrac{1}{2}$(×), $b=3$이면 $a=-1$(×)

따라서 구하는 값은

$-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{4}$

답 ②

22

[풀이]

주어진 다항식의 일반항은

${}_8\mathrm{C}_r x^{8-r}3^r$

이므로 $x^{8-r}=x^7$에서 $r=1$

따라서 x^7의 계수는 ${}_8\mathrm{C}_1 \times 3 = 24$이다.

답 24

23

[풀이]

적분을 하면

$$f(x)=\int f'(x)dx=-\frac{1}{4}x^4+3x+C$$

(단, C는 적분상수)

$f(2)=2+C=10$에서 $C=8$

$\therefore$ $f(0)=C=8$

답 8

24

[풀이]

로그의 성질에 의하여

$\log_5 40+\log_5 \dfrac{5}{8}=\log_5\left(40\times\dfrac{5}{8}\right)$

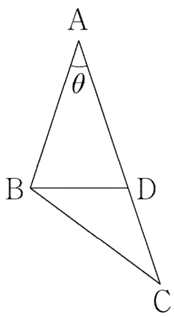
$=\log_5 5^2 = 2\log_5 5 = 2$

답 2

25

[풀이1]

$\angle \mathrm{DAB}=\theta$로 두자.



삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{6^2+6^2-(\sqrt{15})^2}{2\times6\times6}=\frac{19}{24}$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BC}}^2=6^2+10^2-2\times6\times10\times\cos\theta=41$

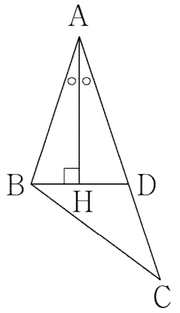
$\therefore$ $\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{41}$, $k^2=41$

답 41

[참고] 교육과정 외

삼각함수의 반각의 공식을 이용하여 $\cos\theta$의 값을 구할 수도 있다.

$\angle \mathrm{DAB}=\theta$로 두자. 그리고 점 A에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



(단, $\circ=\dfrac{\theta}{2}$)

직각삼각형 ABH에서

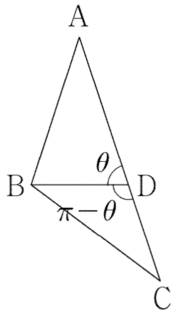
$\overline{\mathrm{BH}}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$이므로 $\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sqrt{15}}{12}$

삼각함수의 반각의 공식에 의하여

$\cos\theta=1-2\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{19}{24}$

[풀이2]

$\angle \mathrm{ADB}=\theta$로 두면 $\angle \mathrm{CDB}=\pi-\theta$이다.



삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{6^2+(\sqrt{15})^2-6^2}{2\times6\times\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{15}}{12}$$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BC}}^2=(\sqrt{15})^2+4^2-2\sqrt{15}\times4\times\cos(\pi-\theta)$

$=41$

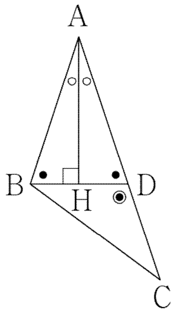
$(\because \cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{15}}{12})$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{41},\ k^2=41$

답 41

[풀이3]

$\angle \mathrm{DAB}=\theta$로 두자. 그리고 점 A에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



(단, $\circ=\dfrac{\theta}{2}$, $\bullet=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}$, $\odot=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta}{2}$)

직각삼각형 ABH에서

$\overline{\mathrm{BH}}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$이므로 $\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sqrt{15}}{12}$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BC}}^2=(\sqrt{15})^2+4^2-2\sqrt{15}\times4\times\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)$

$=41$

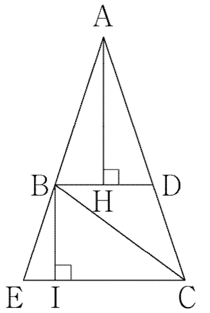
$(\because\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta}{2}\right)=-\sin\dfrac{\theta}{2})$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{41},\ k^2=41$

답 41

[풀이4]

선분 AB의 연장선과 ‘점 C를 지나고 직선 BD에 평행한 직선’이 만나는 점을 E라고 하자. 그리고 두 점 A, B에서 두 선분 BD, EC에 내린 수선의 발을 각각 H, I라고 하자.



직각삼각형 ABH에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{\sqrt{129}}{2}$

서로 닮음인 두 삼각형 ABD, AEC에 대하여

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{AH}}:\overline{\mathrm{BI}}$, 즉 $6:4=\dfrac{\sqrt{129}}{2}:\overline{\mathrm{BI}}$

$\overline{\mathrm{BI}}=\dfrac{\sqrt{129}}{3}$

마찬가지의 방법으로

$\overline{\mathrm{EI}}=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$이므로 $\overline{\mathrm{IC}}=\dfrac{4\sqrt{15}}{3}$

직각삼각형 BIC에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\therefore\ \overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{129}}{3}\right)^2+\left(\dfrac{4\sqrt{15}}{3}\right)^2}=\sqrt{41},\ k^2=41$

답 41

26

[풀이]

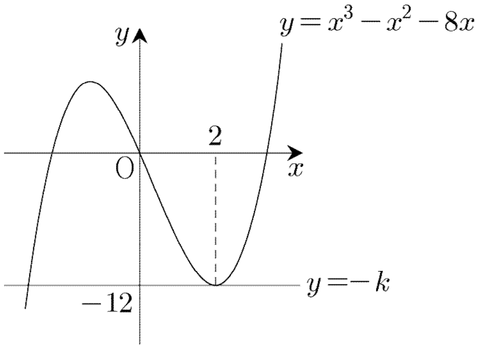
곡선 $y=x^3-x^2-8x$와 직선 $y=-k(<0)$의 교점의 개수가 2일 때의 양수 k의 값을 구하면 된다.

$y'=3x^2-2x-8=(3x+4)(x-2)$

$y'=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{4}{3}$ 또는 $x=2$

삼차함수의 증가와 감소를 표로 정리하면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{4}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	-12 극소	$\nearrow$



위의 그림처럼 $-k=-12$, 즉 $k=12$일 때 곡선과 직선의 교점의 개수는 2이다.

$\therefore\ k=12$

답 12

27

[풀이1]

$Y=10X+1$로 두어도 답을 구하는데 지장이 없다.

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-(\mathrm{E}(X))^2=5-2^2=1$

$\therefore\ \mathrm{E}(Y)+\mathrm{V}(Y)$

$=\mathrm{E}(10X+1)+\mathrm{V}(10X+1)$

$=10\mathrm{E}(X)+1+10^2\mathrm{V}(X)$

$=10\times2+1+10^2\times1=121$

답 121

[풀이2]

좀 더 엄밀한 풀이를 알아보자.

문제에서 주어진 조건에 의하여

$a+b+c+d=1$ (확률의 합은 1)

$\mathrm{E}(X)=a+2b+3c+4d=2$

$\mathrm{E}(X^2)=a+4b+9c+16d=5$

이므로

$\mathrm{E}(Y)=11a+21b+31c+41d$

$=10(a+2b+3c+4d)+(a+b+c+d)$

$=10\times2+1=21$

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{E}(Y^2)-(\mathrm{E}(Y))^2$

$=11^2a+21^2b+31^2c+41^2d-21^2$

$=100(a+4b+9c+16d)$

$+20(a+2b+3b+4d)$

$+(a+b+c+d)-21^2$

$=100\times5+20\times2+1-21^2$

$=100$

$\therefore\ \mathrm{E}(Y)+\mathrm{V}(Y)$

$=21+100=121$

답 121

28

[풀이]

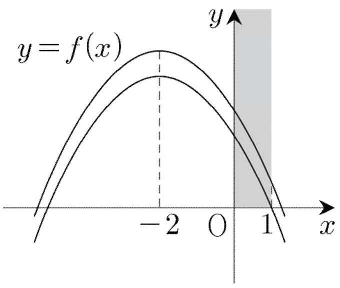
함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int f(t)dt=f(x)$

구간 $[0,\ 1]$에서 함수 $g(x)$가 증가하므로

이 구간에서 $g'(x)\geq0(f(x)\geq0)$이어야 한다.

함수 $f(x)=-(x+2)^2+a+4$의 그래프는



위의 그림에서

$f(1) \geq 0$, 즉 $a-5 \geq 0$, $a \geq 5$

따라서 a의 최솟값은 5이다.

답 5

29

[풀이1]

우선 흰 공 4개를 세 상자에 넣는 경우를 생각하자.

$4=4+0+0$ $\cdots$(경우1)

$=3+1+0$ $\cdots$(경우2)

$=2+2+0$ $\cdots$(경우3)

$=2+1+1$ $\cdots$(경우4)

각 경우에 대하여 공이 0개 또는 1개가 담긴 상자에 검은 공을 넣어서 모든 상자에 공이 2개 미만으로 담기는 경우가 없도록 하자.

	상자	상자	상자	남는 검은 공
(경우1)	○○ ○○	●●	●●	●●
(경우2)	○○ ○	○●	●●	●● ●
(경우3)	○○	○○	●●	●● ●●
(경우4)	○○	○●	○●	●● ●●

이제 남은 검은 공을 넣는 경우의 수와 상자를 결정하는 경우의 수는

(경우1): $a+b+c=2$ (단, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$)

해의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_2={}_{3+2-1}\mathrm{C}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$이고,

상자를 결정하는 경우의 수는 3이다.

(경우2): $a+b+c=3$ (단, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$)

해의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_3={}_{3+3-1}\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$이고,

상자를 결정하는 경우의 수는 $3!$이다.

(경우3): $a+b+c=4$ (단, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$)

해의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_4={}_{3+4-1}\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=15$이고,

상자를 결정하는 경우의 수는 3이다.

(경우4): $a+b+c=4$ (단, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$)

해의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_4={}_{3+4-1}\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=15$이고,

상자를 결정하는 경우의 수는 3이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times3+10\times3!+15\times3+15\times3=168$

답 168

[참고]

다음과 같은 계산도 가능하다. (하지만 권장 풀이는 아니다.)

우선 검은 공 6개를 세 상자에 넣는 경우를 생각하자.

$6=6+0+0$ $\cdots$(경우1)

$=5+1+0$ $\cdots$(경우2)

$=4+2+0$ $\cdots$(경우3)

$=4+1+1$ $\cdots$(경우4)

$=3+3+0$ $\cdots$(경우5)

$=3+2+1$ $\cdots$(경우6)

$=2+2+2$ $\cdots$(경우7)

각 경우에 대하여 공이 0개 또는 1개가 담긴 상자에 흰 공을 넣어서 모든 상자에 공이 2개 미만으로 담기는 경우가 없도록 하자.

	상자	상자	상자	남는 흰 공
(경우1)	●● ●● ●●	○○	○○	×
(경우2)	●● ●● ●	●○	○○	○
(경우3)	●● ●●	●●	○○	○○
(경우4)	●● ●●	●○	●○	○○
(경우5)	●● ●	●● ●	○○	○○
(경우6)	●● ●	●●	●○	○○ ○
(경우7)	●●	●●	●●	○○ ○○

이제 남은 흰 공을 넣는 경우의 수와 상자를 결정하는 경우의 수는

(경우1): 상자를 결정하는 경우의 수는 3이다.

(경우2): $a+b+c=1$ (단, $a\geq 0$, $b\geq 0$, $c\geq 0$)

해의 개수는 ${}_3H_1={}_{3+1-1}C_1={}_3C_1=3$이고,

상자를 결정하는 경우의 수는 $3!$이다.

(경우3): $a+b+c=2$ (단, $a\geq 0$, $b\geq 0$, $c\geq 0$)

해의 개수는 ${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=6$이고,

상자를 결정하는 경우의 수는 $3!$이다.

(경우4): $a+b+c=2$ (단, $a\geq 0$, $b\geq 0$, $c\geq 0$)

해의 개수는 ${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=6$이고,

상자를 결정하는 경우의 수는 3이다.

(경우5): $a+b+c=2$ (단, $a\geq 0$, $b\geq 0$, $c\geq 0$)

해의 개수는 ${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=6$이고,

상자를 결정하는 경우의 수는 3이다.

(경우6): $a+b+c=3$ (단, $a\geq 0$, $b\geq 0$, $c\geq 0$)

해의 개수는 ${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_2=10$이고,

상자를 결정하는 경우의 수는 $3!$이다.

(경우7): $a+b+c=4$ (단, $a\geq 0$, $b\geq 0$, $c\geq 0$)

해의 개수는 ${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_2=15$이고,

상자를 결정하는 경우의 수는 1이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$3+3\times 3!+6\times 3!+6\times 3+6\times 3+10\times 3!+15\times 1$

$=168$

[풀이2]

여집합의 관점에서 문제를 해결해보자. (이 역시 권장 풀이는 아니다.)

우선 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않도록 세 상자에 공을 넣는 경우의 수를 구하자.

상자	상자	상자	
0	0	≥ 2	(경우1)
1	0	≥ 2	(경우2)
1	1	≥ 2	(경우3)
0	≥ 2	≥ 2	(경우4)
1	≥ 2	≥ 2	(경우5)

각각에 대한 경우의 수는

(단, ○는 흰 공이고, ●는 검은 공이다.)

(경우1): 3

(×, ×, ≥ 2)

(경우2): $2\times 3!=12$

(○, ×, ≥ 2), (●, ×, ≥ 2)

(경우3): $2\times 3+3!=12$

(○, ○, ≥ 2), (●, ●, ≥ 2), (○, ●, ≥ 2)

(경우4): $({}_2H_4\times{}_2H_6-6)\times 3=87$

전체에서 다음의 경우들을 제외

(×, ×, ≥ 2), (×, ≥ 2, ×),

(×, ○, ≥ 2), (×, ≥ 2, ○),

(×, ●, ≥ 2), (×, ≥ 2, ●)

(경우5):

$\{({}_2H_3\times{}_2H_6-6)+({}_2H_4\times{}_2H_5-6)\}\times 3=138$

전체에서 다음의 경우들을 제외

(○, ×, ≥ 2), (○, ≥ 2, ×),

(●, ×, ≥ 2), (●, ≥ 2, ×),

(○, ○, ≥ 2), (○, ≥ 2, ○),

(●, ●, ≥ 2), (●, ≥ 2, ●),

(●, ○, ≥ 2), (●, ≥ 2, ○),

(○, ●, ≥ 2), (○, ≥ 2, ●)

따라서 구하는 경우의 수는

${}_3H_4\times{}_3H_6-(3+12+12+87+138)$

$={}_6C_2\times{}_8C_2-252=168$

답 168

30

[풀이]

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 양수로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다. (즉, 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수일 때에도 동일한 결과를 얻는다.)

우선 조건 (가)를 생각하자.

$f(1)=f(3)=0$이고,

함수 $f(x)$가

닫힌구간 $[1,\ 3]$에서 연속이고

열린구간 $(1,\ 3)$에서 미분가능하므로

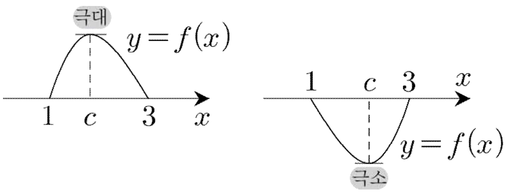
롤의 정리에 의하여

$f'(c)=0$

인 c가 구간 $(1,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.

그런데 조건 (나)에 의하여 c는 유일하다.

요컨대 롤의 정리에 의해 함수 $f(x)$는 구간 $(1,\ 3)$에서 극값을 갖는다. (아래 그림)

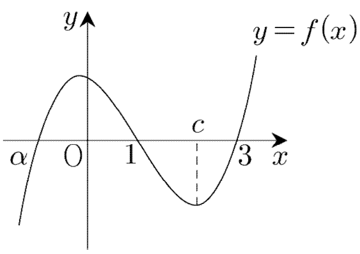


조건 (나)에 의하여

$1\le x<c$, $c<x$일 때, $f'(x)\ne 0$

이고, $f'(c)=0$이므로

함수 $f(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



(단, $f(\alpha)=0$, $\alpha<1$)

함수 $f(x)$의 방정식을 다음과 같이 두자.

$f(x)=k(x-\alpha)(x-1)(x-3)$ (단, $k>0$)

함수 $f(a-x)$의 방정식은

$f(a-x)=k(a-\alpha-x)(a-1-x)(a-3-x)$

두 방정식 $f(x)=0$, $f(a-x)=0$의 해집합을 각각 A, B라고 하면

$A=\{\alpha,\ 1,\ 3\}$,

$B=\{a-\alpha,\ a-1,\ a-3\}$

(이때, $a-\alpha>a-1>a-3$)

다음의 필요충분조건이 성립한다.

'$A=B$ $\Leftrightarrow$ 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.'

왜냐하면 $A=B$이면

$g(x)=|k^2(x-\alpha)^2(x-1)^2(x-3)^2|$

$=k^2(x-\alpha)^2(x-1)^2(x-3)^2$

이기 때문이다. (이 역도 성립한다.)

이제 $A=B$인 상수 a의 값을 구하자.

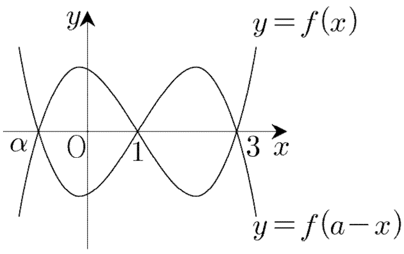
$\alpha=a-3$, $1=a-1$, $3=a-\alpha$

을 연립하면

$a=2$, $\alpha=-1$

이때, $A=B=\{-1,\ 1,\ 3\}$

두 함수 $f(x)$, $f(a-x)$의 그래프는



(단, $\alpha=-1$)

두 함수 $f(x)$, $f(a-x)$의 방정식은

$f(x)=k(x+1)(x-1)(x-3)$,

$f(a-x)=-k(x+1)(x-1)(x-3)=-f(x)$

$$\therefore\ \frac{g(4a)}{f(0)\times f(4a)}=\frac{(f(8))^2}{f(0)\times f(8)}$$

$$=\frac{k\times 9\times 7\times 5}{3k}=105$$

답 105

[참고1]

α의 값을 다음과 같이 빠르게 구할 수 있다.

다음의 필요충분조건을 생각할 수 있다.

$A=B$

$\Leftrightarrow$

두 삼차함수 $f(x)$, $f(a-x)$의 그래프는 x축 위의 서로 다른 세 점에서 만난다.

$\Leftrightarrow$

삼차함수 $f(x)$의 변곡점이 x축 위에 있다. $\cdots$(*)

$\Leftrightarrow$

삼차함수 $f(a-x)$의 변곡점이 x축 위에 있다.

(*)에 의하여

$\frac{\alpha+3}{2}=1$

$\therefore\ \alpha=-1$

[참고2]

미분계수의 정의를 이용하여 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 미분가능 할 조건을 따져보자.

• 함수 $g(x)$의 $x=1$에서의 미분가능성

$\lim_{x\to1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1+}\left|\frac{k(x-1)Q(x)f(a-x)}{x-1}\right|$

(이때, $Q(x)=(x+\alpha)(x-3)$)

$=\lim_{x\to1+}|kQ(x)f(a-x)|$

$=|kQ(1)f(a-1)|$

마찬가지의 방법으로

$\lim_{x\to1-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=-|kQ(1)f(a-1)|$

미분계수의 정의에 의하여

$|kQ(1)f(a-1)|=-|kQ(1)f(a-1)|$

즉, $kQ(1)f(a-1)=0$에서

$f(a-1)=0$ ($\because k\neq0$, $Q(1)\neq0$)

• 함수 $g(x)$의 $x=\alpha$, $x=3$에서의 미분가능성

위와 마찬가지의 방법으로

$f(a-\alpha)=0$, $f(a-3)=0$

이상에서

$\{\alpha,\ 1,\ 3\}=\{a-\alpha,\ a-1,\ a-3\}$

이고, $a=2$, $\alpha=-1$을 얻는다.