

2021학년도 대학수학능력시험 수학 영역 대비

『녹색지대 모의고사』 N제

【출제 및 해설】 이재종 <wowhd93@naver.com>

【이용 안내】

- 이 저작물은 크리에이티브 커먼즈 저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국 라이선스에 따라 이용할 수 있습니다.
- 이 문서는 기출제된 녹색지대 모의고사 6회분까지의 문제를 편집한 것으로, 3점과 4점 문항의 대부분을 수록하였습니다.
【수록 문항 수】 (수학) 64Q (수학II) 49Q (확률과 통계) 59Q (미적분) 50Q
- 문항 중 [4점*]으로 표기된 문제는 녹색지대 모의고사의 (가)형 또는 (나)형에서 21번, 29번 또는 30번에 출제된 고난도 문항입니다.
- **[★]** 표시된 문제는 출제자가 주관적인 기준으로 선별한 문항으로, 시간이 부족한 학생들은 해당 표시가 된 문제를 먼저 풀 것을 권장합니다.
- 이 문서는 수험생들의 학습을 돕기 위해 만들어진 것으로, 영리적 목적(문제를 편집, 수정하여 판매하는 행위 등)이 아닌 이상 학생들의 학습을 위한 용도로 단순 배포하고 이용하는 것엔 제한이 없습니다.
- 타인의 창작물을 이용할 때에는 저작자의 동의를 구하고 출처를 표기해 주세요.
창작 문화를 더욱 성숙하게 하고, 지식을 이용한 나눔 활동이 더욱 풍성해질 수 있도록 창작자들을 지지하는 것은 이용자의 몫입니다.
- 이 문서에 대한 다른 문의 사항이 있는 경우 아래 연락처로 연락해주시면 안내해 드리도록 하겠습니다.
(E-mail) wowhd93@naver.com
(Kakao) wowhd93
- 제작자 블로그 주소: <https://blog.naver.com/wowhd93>

수학 영역(수학 I)

1. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 > 0$ 이고,

$$a_2 + a_3 = 2a_4, \quad (a_2)^2 - (a_3)^2 = \frac{1}{12}$$

일 때, a_5 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{96}$ ② $\frac{1}{48}$ ③ $\frac{1}{24}$ ④ $\frac{1}{12}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

2. 부등식 $\log_3(2x-3) \leq \log_{\frac{1}{3}}x+3$ 을 만족시키는 모든 정수 x 의

값의 합은? [3점]

- ① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

3. [★] 예각삼각형 ABC에 대하여

$$\cos A = \frac{3}{5}, \quad \sin B = \frac{12}{13}, \quad \overline{AB} = \frac{14}{5}$$

일 때, 선분 AC의 길이는? [3점]

- ① $\frac{12}{5}$ ② $\frac{13}{5}$ ③ $\frac{14}{5}$ ④ 3 ⑤ $\frac{16}{5}$

4. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 3 & (n \text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{a_n - n}{2} & (n \text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_5 = 3$ 일 때, a_1 의 값은? [3점]

- ① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

5. [★] 실수 a 와 3 이하의 자연수 b 에 대하여 함수

$$f(x) = a \cos\left(bx + \frac{\pi}{3}\right)$$

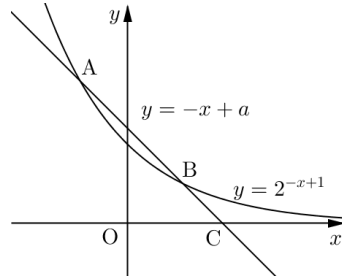
가 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3}{2}$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ 을 만족시킬 때, $a+b$ 의 값은? [4점]

- ① -6 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 6

6. 그림과 같이 양수 a 에 대하여 직선 $y = -x + a$ 가

곡선 $y = 2^{-x+1}$ 과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, x 축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AB} : \overline{BC} = 3:1$ 일 때, 2^a 의 값은?

[4점]



- ① $11 \times 2^{\frac{2}{3}}$ ② $9 \times 2^{\frac{1}{3}}$ ③ $7 \times 2^{\frac{2}{3}}$
 ④ $5 \times 2^{\frac{1}{3}}$ ⑤ $3 \times 2^{\frac{2}{3}}$

7. [★] 자연수 n 에 대하여 $f(n)$ 을 $\log \frac{30}{n(n+1)}$ 의 $(n+1)$ 제곱근 중 실수인 것의 개수라고 하자. $\sum_{n=1}^{10} f(n)$ 의 값은? [4점]
- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

8. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = a_2 = 1$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = n \cdots (*)$$

을 만족시킨다. 다음은 $\sum_{k=1}^n a_k$ 의 값이 3의 배수가 되는 100 이하의 자연수 n 의 개수를 구하는 과정이다.

(*)의 양변에 n 대신 $n+1$ 을 대입하면

$$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} = n+1$$

이 등식과 (*)을 연립하여 풀면 $a_{n+3} - a_n = 1$ 이므로 세 수열 $\{a_{3n-2}\}$, $\{a_{3n-1}\}$, $\{a_{3n}\}$ 은 각각 공차가 1인 등차수열이다.

$a_3 = -1$ 이므로 자연수 m 에 대하여

(i) $n = 3m$ 인 경우

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^m (a_{3k-2} + a_{3k-1} + a_{3k}) = \boxed{\text{(가)}}$$

이므로 m 이 3의 배수일 때 $\sum_{k=1}^n a_k$ 의 값이 3의 배수이다.

(ii) $n = 3m - 1$ 인 경우

$$\sum_{k=1}^n a_k = \boxed{\text{(가)}} - \boxed{\text{(나)}} = \frac{3(m^2 - m) + 4}{2}$$

이므로 이 경우 $\sum_{k=1}^n a_k$ 의 값이 3의 배수가 되는 자연수 m 의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $n = 3m - 2$ 인 경우

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{3(m^2 - m) + 4}{2} - m = \frac{3(m-1)^2 + m + 1}{2}$$

이므로 $m+1$ 이 3의 배수일 때, $\sum_{k=1}^n a_k$ 의 값이 3의 배수이다.

(i), (ii), (iii)에서 $\sum_{k=1}^n a_k$ 의 값이 3의 배수가 되는

경우는 n 을 9로 나눈 나머지가 0 또는 4인 경우이다.

따라서 문제의 조건을 만족하는 100 이하의 자연수 n 의 개수는 $\boxed{\text{(다)}}$ 이다.

위의 (가), (나)에 각각 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$ 이라 하고, (다)에 알맞은 수를 p 라 할 때, $f(p)+g(p)$ 의 값은? [4점]

- ① 715 ② 720 ③ 725 ④ 730 ⑤ 735

9. 두 실수 a, b 가 $2^a + 2^b = 10$ 을 만족시킬 때, $2^{-a} + 2^{-b}$ 의 최솟값은 α 이고, 그때의 2^{a+b} 의 값은 β 이다. $5\alpha + \beta$ 의 값을 구하시오. [3점]

10. 방정식 $|\sin 2x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 를 만족시키는 양의 실수 x 를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n 번째 수를 a_n 이라 하자.

$$\frac{\pi^2}{32} \sum_{n=1}^{25} \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{q}{p} \text{ 일 때, } p+q \text{의 값을 구하시오.}$$

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

6

수학 영역(수학I)

11. [★] 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k+1} = n^2 + n + 1$$

를 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값을 구하시오. [4점]

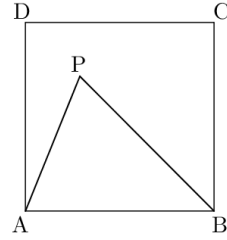
12. [★] 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD가 있다. 점 P가

$\sin(\angle APB) = \frac{\sqrt{5}}{3}$ 을 만족시키며 정사각형 ABCD와 그 내부를

움직일 때, $(\overline{AP})^2 + (\overline{BP})^2$ 의 최솟값을 m , 최댓값을 M 이라

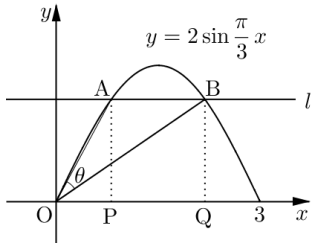
하자. $m + M = a + b\sqrt{5}$ 일 때, $10(a+b)$ 의 값을 구하시오.

(단, a 와 b 는 유리수이다.) [4점]



13. [★] 그림과 같이 곡선 $y = 2\sin\frac{\pi}{3}x$ ($0 \leq x \leq 3$)가 x 축과
 평행한 직선 l 과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고,
 $\angle AOB = \theta$ 라 하자. $\overline{AB} = 2$ 일 때, $\tan\theta$ 의 값은?
 (단, O는 원점이다.) [3점]

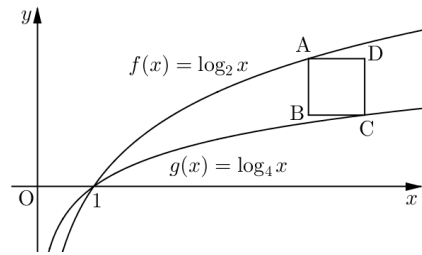
- ① $\frac{13}{18}$ ② $\frac{7}{9}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{8}{9}$ ⑤ $\frac{17}{18}$



14. 그림과 같이 두 함수 $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = \log_4 x$ 의 그래프와
 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD가 다음 조건을
 만족시킨다.

(가) 점 A는 곡선 $y = f(x)$ 위의 점이고, 점 C는 곡선
 $y = g(x)$ 위의 점이다.
 (나) 정사각형 ABCD의 각 변은 x 축 또는 y 축에
 평행하다.

- 점 A의 x 좌표가 a 일 때, $f(a-2) + g(a-2)$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{9}{4}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{11}{4}$ ④ 3 ⑤ $\frac{13}{4}$

15. [★] 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_3 + |a_7| = 8, \quad \sum_{k=1}^{10} a_k = -15$$

이고, $a_5 < 0$ 일 때, $a_2 + a_4$ 의 값을 구하시오. [3점]

16. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때,
모든 자연수 n 에 대하여

$$S_{2n-1} = \frac{1}{n(n+1)}, \quad S_{2n} = -\frac{1}{n(n+1)}$$

이다. $\sum_{n=1}^{20} (-1)^{n+1} a_n = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

17. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 수열 $\{b_n\}$ 이 $b_n = a_n + a_{2n}$ 일 때, 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 은 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) b_1, b_2, b_5 는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.
 (나) $a_3 + b_3 = \frac{13}{2}$

$\sum_{k=1}^{12} a_k$ 의 값은? [4점]

- ① 34 ② 37 ③ 40 ④ 43 ⑤ 46

18. 함수 $f(x) = \cos^2 x + a \sin x$ 의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{6}, 1\right)$ 을 지날 때, 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 합은? (단, a 는 상수이다.) [3점]

- ① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{7}{16}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{9}{16}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

19. [★] 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) = 2^{n-1} + n + 1$$

을 만족시키고, $a_4 + a_5 = 7$ 일 때, a_{10} 의 값은? [4점]

- ① 227 ② 243 ③ 259 ④ 275 ⑤ 291

20. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 1$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$\begin{cases} a_{2n} = a_n \\ a_{2n+1} = a_n + 1 \end{cases}$$

을 만족시킨다. 다음은 100 이하의 자연수 k 에 대하여 $a_k = 2$ 인 자연수 k 의 개수를 구하는 과정이다.

수열 $\{a_n\}$ 의 정의에서 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \geq 1$ 이고, n 이 3 이상인 홀수일 때에는 $a_n \geq 2$ 이다.

또한, 3 이상의 홀수 p 와 자연수 q 에 대하여

$$a_{p \times 2^q} = a_p \geq 2$$

이므로 $a_n = 1$ 일 필요충분조건은 $n = 2^m$ (m 은 음이 아닌 정수)이다. ... (*)

(1) k 가 홀수인 경우

주어진 조건으로부터 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{2n+1} - a_{2n} = 1 \text{ 이고, } k \text{는 홀수이므로 (*)에서}$$

$$a_k = 2 \text{ 일 필요충분조건은}$$

$$k = \boxed{\text{(가)}} \text{ (} m \text{은 음이 아닌 정수)}$$

이다. k 는 100 이하의 자연수이므로

이 경우 $a_k = 2$ 인 자연수 k 의 개수는 $\boxed{\text{(나)}}$ 이다.

(2) k 가 짝수인 경우

$k = p \times 2^q$ (p 는 홀수, q 는 자연수)라 하면

$$a_k = a_p \text{ 이므로 } a_k = 2 \text{ 이려면 } a_p = 2 \text{ 이어야 한다.}$$

(1)에서

$$a_3 = 2 \text{ 이므로 } a_6 = a_{12} = a_{24} = a_{48} = a_{96} = 2$$

$$a_5 = 2 \text{ 이므로 } a_{10} = a_{20} = a_{40} = a_{80} = 2$$

...

$$a_{33} = 2 \text{ 이므로 } a_{66} = 2$$

따라서 이 경우 $a_k = 2$ 인 자연수 k 의 개수는

$$\boxed{\text{(다)}}$$

따라서 (1), (2)에 의하여 구하는 자연수 k 의 개수는

$$\boxed{\text{(나)}} + \boxed{\text{(다)}}$$

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(m)$ 이라 하고, (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b 라 할 때, $f(a+1)+b$ 의 값은? [4점]

- ① 272 ② 276 ③ 280 ④ 284 ⑤ 288

21. 첫째항과 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10} 의 값은? [4점]

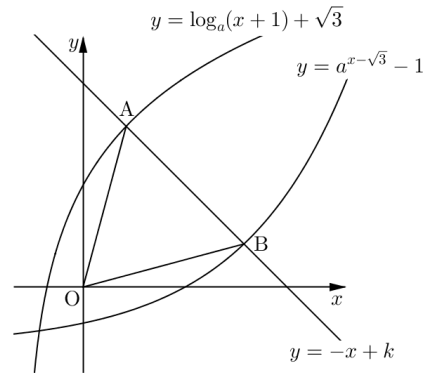
(가) $0 < \sum_{n=1}^{10} a_n < a_7$
 (나) $(|a_5| - |a_4|)(|a_6| - |a_5|) = -16$

- ① 25 ② 28 ③ 31 ④ 34 ⑤ 37

22. 그림과 같이 두 곡선

$$y = \log_a(x+1) + \sqrt{3}, \quad y = a^{x-\sqrt{3}} - 1 \quad (a > 1)$$

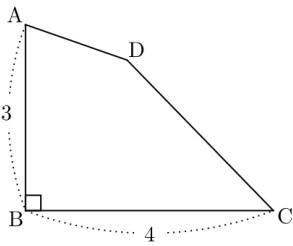
과 직선 $y = -x + k$ ($k > 0$)가 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 삼각형 OAB가 정삼각형이고, 삼각형 OAB의 넓이가 $2\sqrt{3}$ 일 때, $(a+k)^2$ 의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [3점]



23. [★] 좌표평면에서 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=4$ 이고 $\angle B = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형 ABC에 대하여 점 D가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $\cos \angle ADC = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$
 (나) 점 D는 삼각형 ABC의 외부에 있다.

선분 BC의 중점을 M이라 할 때, \overline{MD} 의 최솟값은 m 이고, 이때 $\sin(\angle CAD) = k$ 이다. $\left(\frac{1}{mk}\right)^2$ 의 값을 구하시오. [4점*]



24. 4의 세제곱근 중 실수인 것을 a , 2의 네제곱근 중 양의 실수인 것을 $\frac{1}{b}$ 이라 할 때, $\log_a b$ 의 값은? [3점]

- ① $-\frac{5}{8}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{3}{8}$ ④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ $-\frac{1}{8}$

25. $0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 방정식

$$\log_3(\tan x) = \log_2 \frac{1}{\sqrt{2}}$$

의 모든 실근의 합은? [3점]

- ① $\frac{\pi}{3}$ ② $\frac{2}{3}\pi$ ③ π ④ $\frac{4}{3}\pi$ ⑤ $\frac{5}{3}\pi$

26. [★] 첫째항이 1인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, 모든 자연수 n 에 대하여

$$(n-8)(S_n-30) \geq 0$$

이다. 수열 $\{a_n\}$ 의 공차의 최솟값을 m , 최댓값을 M 이라 할 때, $28(M+m)$ 의 값을 구하시오. [4점]

27. 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 정의된 함수 $f(x) = a \times 2^{1-x} + b$ 의
최댓값이 2이고 최솟값이 -1일 때, $f(1)$ 의 값은?
(단, a, b 는 상수이고, $a > 0$ 이다.) [3점]

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{3}{8}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $-\frac{1}{8}$ ⑤ 0

28. 등차수열 $\{a_n\}$ 이

$$\sum_{k=1}^{11} (-1)^k a_k = a_4, \quad \sum_{k=1}^{12} a_k = a_8 + 5$$

를 만족시킬 때, a_{20} 의 값은? [3점]

- ① -4 ② -1 ③ 2 ④ 5 ⑤ 8

29. [★] 두 실수 a, b ($a \neq 0$)에 대하여 함수 $f(x) = a \sin x + b$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

곡선 $y = f(x)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하여 얻은 곡선이 곡선 $y = f(x)$ 와 점 $(\frac{\pi}{4}, c)$ 에서 만난다.

함수 $f(x)$ 의 최댓값이 $2\sqrt{2}c$ 일 때, 상수 c 의 값은? [4점]

- ① $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ ③ $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$
 ④ $\sqrt{2}-1$ ⑤ $2-\sqrt{2}$

30. [★] 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$(a_{n+1} - n)(a_{n+1} - a_n + 1) = 0$$

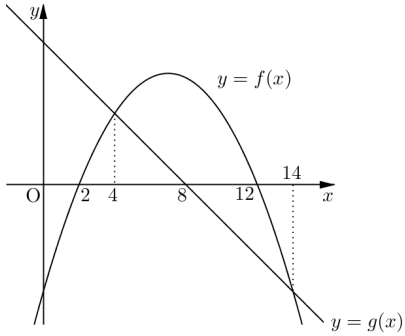
을 만족시킨다. $a_{10} = 5$ 일 때, $\sum_{n=1}^{15} a_n$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 하자. $M+m$ 의 값은? [4점*]

- ① 102 ② 106 ③ 110 ④ 114 ⑤ 118

31. 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=g(x)$ 가 그림과 같을 때, 부등식

$$\log_2 \frac{g(x)}{f(x)} \geq 0$$

를 만족시키는 모든 자연수 x 의 값의 합을 구하시오.
(단, $f(2)=f(12)=0$ 이고 $g(8)=0$ 이다.) [3점]

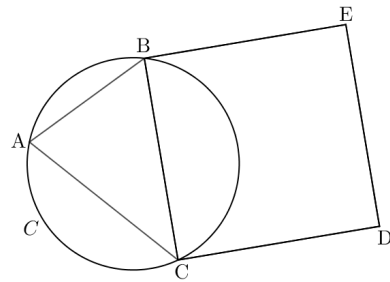


32. [★] 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$ 인 원 C 위의 세 점 A, B, C 와 선분 BC 를 한 변으로 하는 정사각형 $BCDE$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 사각형 $BCDE$ 의 넓이는 삼각형 ABC 의 넓이의 3배이다.

(나) $\cos(\angle ABE) = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

삼각형 ACD 에 외접하는 원의 반지름의 길이를 R 라 할 때, R^2 의 값을 구하시오. [4점*]



33. 등비수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_1 + a_3 = 3, \quad a_2 a_4 + a_3 a_5 = 12$$

를 만족시킬 때, a_7 의 값은? [3점]

- ① $4\sqrt{2}$ ② 8 ③ $8\sqrt{2}$ ④ 16 ⑤ $16\sqrt{2}$

34. $\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = 4$ 를 만족시키는 θ 에 대하여 이차방정식

$$x^2 - ax + b = 0$$

의 두 실근이 $\sin\theta, \cos\theta$ 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{25}{16}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{23}{16}$ ④ $\frac{11}{8}$ ⑤ $\frac{21}{16}$

35. 삼각형 ABC에서

$$\sin(A+B) = \cos(B+C) = \frac{3}{5}$$

이고 $\overline{AB} = 2$ 일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [3점]

- ① $\frac{18}{25}$ ② $\frac{11}{15}$ ③ $\frac{56}{75}$ ④ $\frac{19}{25}$ ⑤ $\frac{58}{75}$

36. [★] 닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 정의된 함수

$$f(x) = 2^{2x} - 2^{x+a} + b$$

에 대하여 $f(1) = f(2)$ 이고 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 4이다.

함수 $f(x)$ 의 최댓값은? (단, a 와 b 는 상수이다.) [4점]

- ① 29 ② 30 ③ 31 ④ 32 ⑤ 33

37. [★] 자연수 n 에 대하여 x 에 대한 이차방정식

$$x^2 - 4nx + n(4n^2 - 1)a_n = 0$$

이 $x = b_n$ 을 중근으로 갖는다. $\sum_{n=1}^{25} \frac{a_n}{b_n} = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

38. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 이 $\frac{a_3}{a_2} + \frac{a_5}{a_4} = 6$ 을

만족시킬 때, $\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_5}{a_3}$ 의 값은? [3점]

- ① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

39. 두 양의 실수 a, b 에 대하여 x 에 대한 이차방정식

$$x^2 - (\log_2 \sqrt{a^3 b})x + \log_4 ab = 0$$

의 두 근을 α, β 라 할 때, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{2}$ 이다. $\log_a b$ 의 값은?

[3점]

- ① -9 ② -5 ③ -1 ④ 3 ⑤ 7

40. 자연수 n 에 대하여 함수 $f(x) = \frac{1}{n} \sin(n+1)\pi x$ 의

최댓값을 a_n , 주기를 b_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{15} a_n b_n$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{7}{4}$ ② $\frac{15}{8}$ ③ 2 ④ $\frac{17}{8}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

41. [★] 다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sqrt{\frac{2}{1}} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{4}{3}} + \dots + \sqrt{\frac{n+1}{n}} < n + \sqrt{n} \dots (*)$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(i) $n=1$ 일 때, (좌변) = \square (가), (우변) = $1 + \sqrt{2}$
 이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=m$ 일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$$\sqrt{\frac{2}{1}} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{4}{3}} + \dots + \sqrt{\frac{m+1}{m}} < m + \sqrt{m}$$

이다. $n=m+1$ 일 때,

$$\sqrt{\frac{2}{1}} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{4}{3}} + \dots + \sqrt{\frac{m+1}{m}} + \sqrt{\frac{m+2}{m+1}}$$

$$< m + \sqrt{m} + \sqrt{\frac{m+2}{m+1}}$$

이고, 자연수 m 에 대하여

$$\sqrt{m} + \sqrt{m+1} < \sqrt{m+1} \times (\square) \text{ (나)}$$

이므로

$$(m+1 + \sqrt{m+1}) - (m + \sqrt{m} + \sqrt{\frac{m+2}{m+1}})$$

$$= \square \text{ (다)} + 1 - \sqrt{\frac{m+2}{m+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{m} + \sqrt{m+1}} - \frac{1}{\sqrt{m+1} \times (\square) \text{ (나)}} > 0$$

이다.

$$\text{따라서 } m + \sqrt{m} + \sqrt{\frac{m+2}{m+1}} < m+1 + \sqrt{m+1}$$

이므로 $n=m+1$ 일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sqrt{\frac{2}{1}} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{4}{3}} + \dots + \sqrt{\frac{n+1}{n}} < n + \sqrt{n}$$

이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p , (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$ 이라 할 때, $p^2 \times \{f(9) + g(10)\}^2$ 의 값은? [4점]

- ① 104 ② 100 ③ 96 ④ 92 ⑤ 88

42. 2 이상의 자연수 n 에 대하여 두 함수 $y = \log_2 x$ 와

$y = |x-n|$ 의 그래프가 만나는 두 점의 x 좌표를 각각

$a_n, b_n (a_n < b_n)$ 이라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는

대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\sqrt{2} < a_2 < 2$

ㄴ. $a_n + b_n \leq 2n$

ㄷ. $a_{n+1} - a_n < 1 < b_{n+1} - b_n$

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

43. [★] 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 $a_1 = a$, $b_1 = 1$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = -b_n + n + 1, \quad b_{n+1} = a_n - n$$

을 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{30} a_n = 467$ 일 때, $a_{30} + b_{30}$ 의 값은?

(단, a 는 상수이다.) [4점*]

- ① 30 ② 31 ③ 32 ④ 33 ⑤ 34

44. 첫째항이 양수인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, $S_{10} = S_{20}$ 이다. 모든 자연수 n 에 대하여 $|a_n| \geq a_k$ 이 성립하도록 하는 자연수 k 의 최솟값을 구하시오.

[3점]

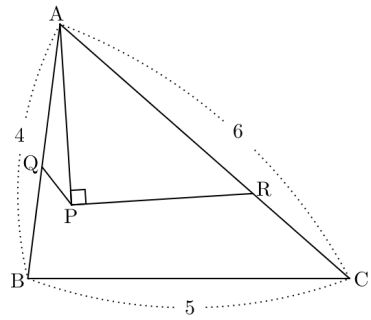
45. [★] x 에 대한 방정식

$$x^n = -(\log_3 n)^2 + 3\log_3 n$$

이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 모든 자연수 n 의 값의 합을 구하시오. [4점]

46. [★] 그림과 같이 $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 5$, $\overline{AC} = 6$ 인 삼각형 ABC 가 있다. 삼각형 ABC 내부의 점 P 와 선분 AB 위의 점 Q , 선분 AC 위의 점 R 가 다음 조건을 만족시킬 때, 삼각형 BPQ 의 넓이는 $a\sqrt{7} - b$ 이다. $64(a+b)$ 의 값을 구하시오. (단, a 와 b 는 유리수이다.) [4점]

(가) $\angle APR = \frac{\pi}{2}$ 이고 $\angle AQP = \frac{3}{4}\pi$ 이다.
 (나) $\overline{AP} = \overline{PR}$ 이고 $\overline{QR} = \frac{5\sqrt{7}}{4}$ 이다.



47. 두 양수 a, b 에 대하여

$$A = \{1, \log_4 a, b\}, \quad B = \{4, \log_2 ab\}$$

이고 $A - B = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ 일 때, $a + b$ 의 값은? [3점]

- ① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

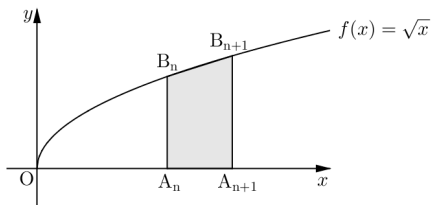
48. 직선 $y = \frac{2}{3}x + 1$ 과 수직인 직선이 x 축의 양의 방향과 이루는

각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right)$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \pi$)

[3점]

- ① $\frac{3\sqrt{17}}{17}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{15}}{5}$ ④ $\frac{3\sqrt{13}}{13}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{14}}{14}$

49. 그림과 같이 자연수 n 에 대하여 x 축 위의 두 점 $A_n(n, 0)$, $A_{n+1}(n+1, 0)$ 과 함수 $f(x) = \sqrt{x}$ 의 그래프 위의 두 점 $B_n(n, \sqrt{n})$, $B_{n+1}(n+1, \sqrt{n+1})$ 을 꼭짓점으로 하는 사각형 $A_n A_{n+1} B_{n+1} B_n$ 의 넓이를 S_n 이라 하자. $\sum_{n=1}^{15} \frac{1}{S_n}$ 의 값은? [3점]



- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

50. 공비가 -2 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{n=1}^{10} \frac{|a_n|}{a_k} = \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-7}$$

를 만족시키는 자연수 k 가 존재할 때, $\frac{a_{2k}}{a_k}$ 의 값은? [4점]

- ① -8 ② -2 ③ 4 ④ 16 ⑤ 64

51. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 3$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n a_{n+1} = n(n^2 + 1)$$

을 만족시킨다. a_5 의 값을 구하시오. [3점]

52. [★] 좌표평면 위의 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 7$$

$$(나) \overline{AB} \times \overline{BC} \times \overline{CA} = \frac{45}{4}$$

삼각형 ABC의 내접원의 반지름을 r , 외접원의 반지름을 R 라 할 때, $\frac{r}{R} = \frac{4}{45}$ 이다. 삼각형 ABC의 넓이가 S 일 때, $16S^2$ 의 값을 구하시오. [4점]

53. 자연수 a, b 에 대하여 함수

$$f(x) = \sin \frac{\pi}{a}(x+b)$$

가 다음 조건을 만족시키도록 하는 a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수를 구하시오. [4점*]

(가) $1 \leq a \leq 10, 1 \leq b \leq 10$

(나) 닫힌구간 $[-1, 0]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값을 M ,
 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값을 m 이라
 할 때, $0 < M - m < 2$ 이다.

54. 함수 $f(x) = 2\cos(2x-a) + b$ 가 $x = \frac{\pi}{6}$ 에서 최댓값 5를

가질 때, $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [3점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

55. 자연수 a, b 에 대하여

$$\log a + \log b = 2 + \log 6$$

를 만족시키는 모든 a, b 의 순서쌍 (a, b) 의 개수는? [3점]

- ① 24 ② 26 ③ 28 ④ 30 ⑤ 32

56. 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 2인 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 2이다. 다음은 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n \frac{b_k}{a_k} = 9 - \frac{n^2 + 5n + 8}{2^n}$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{21} \frac{b_n}{n+1}$ 의 값을 구하는 과정이다.

(i) 문제의 조건에서 $b_1 = 2$ 이므로 주어진 등식에서

$a_1 = 1$ 이다. 따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n = \boxed{(가)}$$

이다.

(ii) $n \geq 2$ 일 때, 수열의 합과 일반항 사이의 관계에서

$$\begin{aligned} \frac{b_n}{a_n} &= \left(9 - \frac{n^2 + 5n + 8}{2^n}\right) - \left(9 - \frac{(n-1)^2 + 5(n-1) + 8}{2^{n-1}}\right) \\ &= \frac{1}{2^n} \times \boxed{(나)} \end{aligned}$$

이므로 (i)에서

$$b_n = \frac{1}{2^n} \times \boxed{(가)} \times \boxed{(나)} \quad (n \geq 2)$$

이다.

따라서 (i), (ii)에서

$$\sum_{n=1}^{21} \frac{b_n}{n+1} = \boxed{(다)}$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n), g(n)$ 이라 하고,

(다)에 알맞은 수를 p 라 할 때, $\frac{g(7)}{f(4)} + p$ 의 값은? [4점]

- ① 111 ② 114 ③ 117 ④ 120 ⑤ 123

57. [★] 공차가 음의 정수인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $2a_4 + 3 = |a_6 - 5|$
 (나) 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \times a_{n+1} \geq 0$ 이다.

a_1 의 값은? [4점]

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

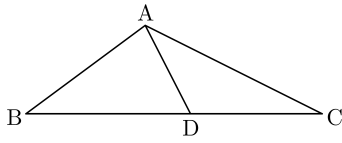
58. 자연수 n 에 대하여 두 곡선

$$y = \log_2(2x - n), \quad y = n \sin\left(\frac{\pi}{n}x\right)$$

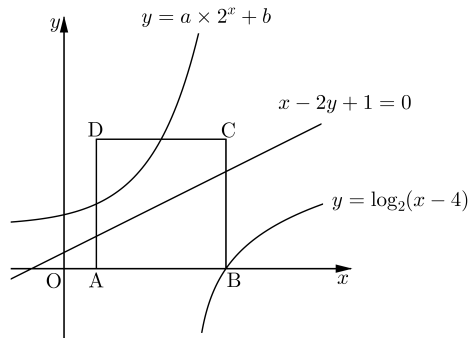
이 만나는 점의 개수를 a_n 이라 할 때, $a_{m+1} - a_m > 100$ 을 만족시키는 자연수 m 의 최솟값은? [4점]

- ① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

59. 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=6$ 이고, 선분 BC 위의 한 점 D가 $\overline{AD}=2$ 를 만족시킨다. $\angle ABC = \angle DAC$ 일 때, $\cos(\angle BAD)=k$ 라 하자. $216k$ 의 값을 구하시오. [3점]



60. [★] 그림과 같이 x 축 위의 한 점 A와 곡선 $y = \log_2(x-4)$ 가 x 축과 만나는 점 B에 대하여 선분 AB를 한 변으로 하는 정사각형 ABCD가 있다. 직선 $x-2y+1=0$ 이 사각형 ABCD의 넓이를 이등분하고, 두 상수 a, b 에 대하여 곡선 $y = a \times 2^x + b$ ($a \neq 0$)가 선분 AD와 CD의 중점을 각각 지날 때, $9ab$ 의 값을 구하시오. (단, 점 B의 x 좌표가 점 A의 x 좌표보다 크고, 점 C는 제1사분면 위의 점이다.) [4점]



61. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, $S_n = 2a_n - 3$ 이다. $a_2 + a_4$ 의 값은? [3점]

- ① 30 ② 34 ③ 38 ④ 42 ⑤ 46

62. 자연수 n 에 대하여 x 에 대한 이차방정식

$$x^2 + 4x - 4n^2 + 1 = 0$$

의 두 실근을 α_n, β_n ($\alpha_n < \beta_n$)이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} \right)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{10}{21}$ ② $\frac{20}{21}$ ③ $\frac{30}{21}$ ④ $\frac{40}{21}$ ⑤ $\frac{50}{21}$

63. 두 함수

$$f(x) = -x^2 + 2x + 2, \quad g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$$

가 있다. $0 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $(g \circ f)(x)$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M \times m$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ 2 ④ 4 ⑤ 8

64. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = k$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$\begin{cases} a_{2n} = (-1)^n \times 2a_{2n-1} \\ a_{2n+1} = -\frac{1}{2}a_{2n} + 1 \end{cases}$$

을 만족시킨다. $\sum_{n=1}^m a_n = 18$ 인 100 이하의 자연수 m 의 개수가

2 이상이 되도록 하는 모든 자연수 k 의 값의 합은? [4점*]

- ① 310 ② 314 ③ 318 ④ 322 ⑤ 326

수학 영역(수학 II)

1. 함수

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+ax+b}{x-2} & (x > 2) \\ 2x-1 & (x \leq 2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$ 의 값은? [3점]

- ① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

2. [★] 함수 $f(x) = x^3 - (2a+1)x^2 + 3ax$ 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$ 에서의 접선이 곡선 위의 점 $(3, f(3))$ 을 지날 때, $f(2)$ 의 값은? [3점]

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

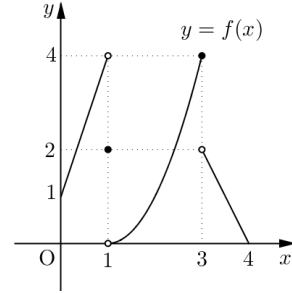
3. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_0^x f(t)dt = x^3 - 2x^2 \int_0^1 tf(t)dt$$

을 만족시킬 때, $f(1)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{20}{7}$ ② $\frac{18}{7}$ ③ $\frac{16}{7}$ ④ 2 ⑤ $\frac{12}{7}$

4. [★] 닫힌구간 $[0, 4]$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 의 그래프가 아래와 같다.



$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 4$ 를 만족시키는 실수 a 의 개수는?

(단, $0 < a < 4$) [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 정수 k 에 대하여 함수 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(2k-3)x^2 + kx - 11$ 이

다음 조건을 만족시킬 때, k 의 값은? [4점]

- (가) 함수 $f(x)$ 는 실수 전체에서 정의된 역함수를 갖는다.
 (나) 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간 $(0, 3)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

- ① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

6. [★] 양수 a 에 대하여 두 함수

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & (|x| \geq a) \\ 8 & (|x| < a) \end{cases}, \quad g(x) = x - 2a + 9$$

가 있다. 함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=k$ 에서만 불연속일 때, $g(k)$ 의 값은? (단, k 는 상수이다.) [4점]

- ① -27 ② -24 ③ -21 ④ -18 ⑤ -15

7. 실수 t 에 대하여 사차함수 $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 9x + 4$ 의 그래프와 원점을 지나고 기울기가 t 인 직선의 교점의 x 좌표 중 가장 큰 수를 $g(t)$ 라 하자. 상수 k 에 대하여

$$\lim_{t \rightarrow k^+} g(t) - \lim_{t \rightarrow k^-} g(t) = \alpha \quad (\alpha \neq 0)$$

일 때, $k + (f \circ g)(\alpha)$ 의 값은? [4점*]

- ① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

8. 다항함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 2x^3}{x^2} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x^2}{x-1} = 0$$

을 만족시킬 때, $f(3)$ 의 값을 구하시오. [3점]

9. 두 함수

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x + 4, \quad g(x) = 2x + k$$

에 대하여 방정식 $f(x) = g(x)$ 가 닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 모든 자연수 k 의 값의 합을 구하시오. [4점]

10. [★] 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \int_a^x (|f(t)| - 1) dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값을 가지고, $x=3$ 에서 극솟값을 갖는다.

(나) 함수 $|g(x)|$ 는 $x=\alpha$ 와 $x=\beta$ ($\alpha < a < \beta$)에서만 미분가능하지 않다.

$$g\left(a + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = k \text{ 일 때, } 216k^2 \text{의 값을 구하시오.}$$

(단, a 는 상수이다.) [4점]

11. 함수 $f(x) = \int_1^x (t-1)(t-a)dt$ 의 극댓값이 $\frac{4}{3}$ 일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

- ① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

12. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t (t \geq 0)$ 에서의 위치 x_1, x_2 가

$$x_1 = t^3 - t, \quad x_2 = 3t^2 - 10t + 4$$

이다. 두 점 P, Q의 속도의 차가 최소일 때, 두 점 P, Q 사이의 거리는? [3점]

- ① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

13. [★] 함수 $f(x) = x^3 - kx^2 - 2kx$ 의 그래프 위의 서로 다른 두 점 A, B에서의 접선의 기울기가 모두 $-2k$ 이고, 두 접선 사이의 거리가 $\frac{k^2}{27}$ 일 때, 양수 k 의 값은? [4점]

- ① $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ② $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{7\sqrt{3}}{6}$ ④ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{13\sqrt{3}}{6}$

14. 함수

$$f(x) = \begin{cases} ax & (x < 1) \\ ax+1 & (1 \leq x < 2) \\ -bx+4 & (x \geq 2) \end{cases}$$

에 대하여 두 함수 $f(x)f(2-x)$ 와 $f(x)f(3-x)$ 가 각각 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$ 의 값은? [4점]

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

15. [★] 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여
함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = (x-1) \int_1^x f(t) dt$$

라고 하자. 다음 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점*]

—<보 기>—

- ㄱ. $g'(1) = 0$
 ㄴ. $f(1) > 0$ 이면 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값을 갖는다.
 ㄷ. $f(1) = 0$ 이고 함수 $g(x)$ 의 최솟값이 $-\frac{1}{9}$ 일 때, 함수
 $f(x)$ 의 최솟값은 $-\frac{16}{81}$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. [★] 두 함수

$$f(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6$$

$$g(x) = x + |x-1| + k$$

의 그래프가 서로 다른 두 점에서만 만나도록 하는 모든 실수 k 의 값의 합을 구하시오. [4점]

17. [★] 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (1 \leq x \leq 3) \\ x+2 & (x < 1 \text{ 또는 } x > 3) \end{cases}$$

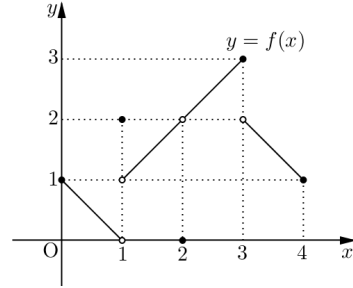
가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 정의된 역함수를 갖는다.

(나) $\lim_{x \rightarrow t^-} g'(x) + \lim_{x \rightarrow t^+} g'(x) \geq 1$ 을 만족시키는 모든 실수 t 의 값의 집합은 $\{t \mid t \leq 1 \text{ 또는 } t \geq 3\}$ 이다.

$f(5)$ 의 값을 구하시오. [4점*]

18. 닫힌구간 $[0, 4]$ 에서 정의된 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 를 만족시키는 모든 실수 a 의 값의 합은?

(단, $0 \leq a < 4$) [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

19. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시간 t ($t \geq 0$)에서의 위치 x 가

$$x = t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 6t + 2$$

이다. 점 P의 운동 방향이 $t = \alpha$ 와 $t = \beta$ ($\alpha < \beta$)에서 바뀔 때, 점 P가 $t = \alpha$ 에서 $t = \beta$ 까지 이동한 거리는? [3점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

20. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$(x^2 - x)f(x) = \int_0^x (t^3 + at - 2) dt$$

를 만족시킬 때, $f(0) + f(1)$ 의 값은? (단, a 는 상수이다.) [4점]

- ① $\frac{7}{2}$ ② 4 ③ $\frac{9}{2}$ ④ 5 ⑤ $\frac{11}{2}$

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$ 의 최댓값은? [4점]

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)+f(x)=2$ 이다.
 (나) $-1 < x < 1$ 일 때, $f(1) < f(x) < f(-1)$ 이다.

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

22. 연속함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \leq x < 4$ 일 때, $f(x) = |x-2|-1$ 이다.
 (나) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+4) = f(x)$ 이다.

실수 t 에 대하여 함수

$$h(x) = \int_t^x f(u)du$$

의 최솟값을 $g(t)$ 라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $g(3) = 0$
 ㄴ. $g(t) = -1$ 이면 $g'(t) = 0$ 이다.
 ㄷ. 모든 자연수 n 에 대하여 $\int_{-n}^n g(t)dt = -n$ 이다.

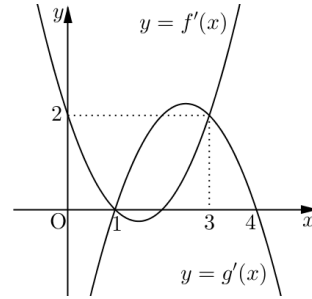
- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

23. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{|x-1|} = \alpha, \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = \beta$$

를 만족시킬 때, $f(\alpha + \beta)$ 의 값을 구하시오. (단, α, β 는 상수이다.) [3점]

24. 두 삼차함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여 함수 $y=f'(x)$ 와 $y=g'(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$f(-1) = g(-1)$ 일 때, 방정식 $f(x) - g(x) = n$ 의 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 정수 n 의 값의 합을 구하시오. [4점]

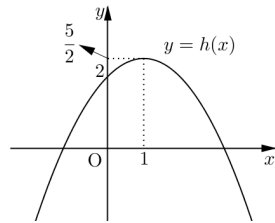
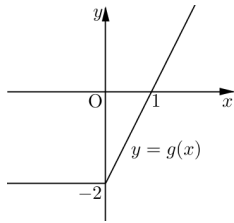
25. [★] 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$ 와 두 함수

$$g(x) = |x| + x - 2, \quad h(x) = -\frac{1}{2}x(x-2) + 2$$

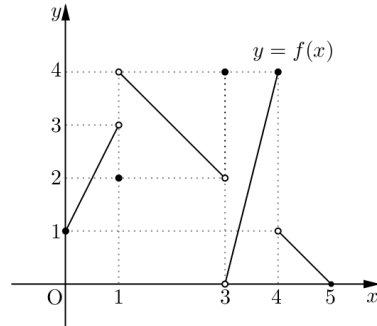
가 다음 조건을 만족시킨다.

부등식 $\{f(x) - g(x)\}\{f(x) - h(x)\} \leq 0$ 을 만족시키는 모든 실수 x 의 값의 집합은 $\{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$ 이다.

$\int_{-2}^2 \{f(x) - h(x)\} dx$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, $25M^2$ 의 값을 구하십시오. [4점*]



26. 닫힌구간 $[0, 5]$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a$ 일 때, $f(a) + \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ 의 값은? [3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

27. 함수 $f(x) = ax + b$ 가

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^1 (x-1)f(x)dx = 2$$

을 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값은? (단, a 와 b 는 상수이다.) [3점]

- ① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

28. [★] 함수 $f(x) = 2x^3 - 3(k+1)x^2 + 6kx + 1$ 이 $x = 2k+1$ 에서
극댓값을 가질 때, 함수 $f(x)$ 의 극솟값은? (단, k 는 상수이다.)
[3점]

- ① -9 ② -7 ③ -5 ④ -3 ⑤ -1

29. 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$ 에서 그은 접선을 $y=g(x)$ 라 하자. 두 함수 $f(x), g(x)$ 가

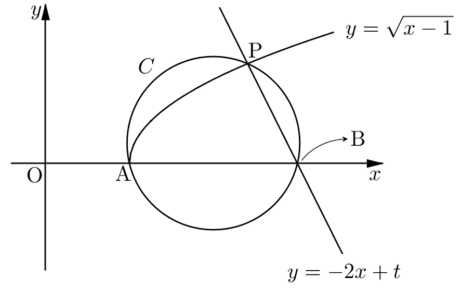
$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)-g(x)}{x-4} = -9$$

을 만족시킬 때, 방정식 $f(x)=g(x)+kx$ 가 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 모든 실수 k 의 값의 합은? [4점]

- ① -21 ② -20 ③ -19 ④ -18 ⑤ -17

30. 그림과 같이 실수 $t (t > 2)$ 에 대하여 곡선 $y = \sqrt{x-1}$ 과 직선 $y = -2x+t$ 가 x 축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y = \sqrt{x-1}$ 과 직선 $y = -2x+t$ 가 만나는 점을 P라 하자. 세 점 A, B, P를 지나는 원을 C라 할 때, 원 C의 넓이를 $f(t)$ 라 하고, 선분 BP의 길이를 $g(t)$ 라 하자.

$\lim_{t \rightarrow 2^+} \frac{f(t)g(t)}{(t-2)^3}$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{\sqrt{5}}{8}\pi$ ② $\frac{\sqrt{5}}{7}\pi$ ③ $\frac{5\sqrt{5}}{32}\pi$ ④ $\frac{\sqrt{5}}{6}\pi$ ⑤ $\frac{7\sqrt{5}}{40}\pi$

31. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시간 t ($t \geq 0$)에서의 속도 $v(t)$ 가

$$v(t) = t^3 - 6t^2 + 10t + 2$$

이다. 점 P의 가속도가 최소일 때, 점 P의 위치를 구하시오.
[3점]

32. 함수 $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4$ 에 대하여 두 곡선 $y = f(x)$ 와 $y = f'(x)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S 라 할 때, $6S$ 의 값을 구하시오. [4점]

33. 최고차항의 계수가 1인 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 함수

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & (x < 0) \\ \int_x^{x+2} g(t) dt & (x \geq 0) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $h(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
 (나) 함수 $|h(x)|$ 는 $x = -2$ 에서만 미분가능하지 않다.

$h(0) = 0$ 일 때, $f(3) + g(3)$ 의 최솟값을 구하시오. [4점*]

34. $\int_{-1}^1 (x-1)(x^2+2x-1) dx$ 의 값은? [3점]

- ① 2 ② $\frac{13}{6}$ ③ $\frac{7}{3}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

35. 함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$ 에서 x 의 값이 0에서 2까지 변할 때의 평균변화율이 $f'(k)$ 의 값과 같게 되도록 하는 모든 실수 k 의 값의 곱은? [3점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1

36. [★] 함수 $f(x) = x^4 - 3x^3 + ax$ 가 열린구간 (1, 2)에서 감소하도록 하는 실수 a 의 최댓값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

37. 시각 $t=0$ 일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t (t \geq 0)$ 에서의 속도가 각각

$$v_1(t) = 3t^2 + 3t - 2, \quad v_2(t) = t + 4$$

이다. $t=a (a > 0)$ 에서 두 점 P, Q의 위치가 서로 같을 때, $t=2a$ 에서 두 점 P, Q 사이의 거리는? [4점]

- ① 40 ② 48 ③ 56 ④ 64 ⑤ 72

38. [★] 함수

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & (x < k) \\ 2x - a & (x \geq k) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $|f(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되는 실수 k 의 개수가 3이 되도록 하는 모든 양수 a 의 값의 곱은? [4점]

- ① $6\sqrt{3}$ ② $8\sqrt{3}$ ③ $10\sqrt{3}$ ④ $12\sqrt{3}$ ⑤ $14\sqrt{3}$

39. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 와 다항함수 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_0^x (x-t)f(t)dt = (x-1)g(x)$$

를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점*]

<보 기>

- ㄱ. $g(0) = g'(0)$
- ㄴ. 방정식 $\int_0^x f(t)dt = 0$ 은 열린구간 $(0, 1)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
- ㄷ. $g(1) = 0$ 이면 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간 $(0, 1)$ 에서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

- ① ㄱ
- ② ㄷ
- ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

40. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + a & (x < 1) \\ bx & (x \geq 1) \end{cases}$$

에 대하여

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 2$$

일 때, $f(0) \times f(2)$ 의 값은? [3점]

41. [★] 함수 $f(x) = x^3 - 12x + a$ 에 대하여 부등식

$$0 \leq f(x) \leq f(x+4) + b$$

가 구간 $[-4, \infty)$ 에서 항상 성립하도록 하는 두 실수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 최솟값을 구하시오. [4점]

42. 함수 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ 위의 한 점 $(a, f(a))$ 에서 그은 접선의 방정식이 $y = k$ 일 때, 양수 k 의 값은? [3점]

- ① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

43. 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $x=-1$ 에 대하여 대칭이고, 함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2+1)f(x)-2}{x-1} = 3$$

을 만족시킬 때, $f(3)$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

44. [★] 다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$2f(x)+f(1-x)=x^2+ax$$

를 만족시킨다. $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}a$ 일 때, 상수 a 의 값은? [4점]

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

45. [★] 함수

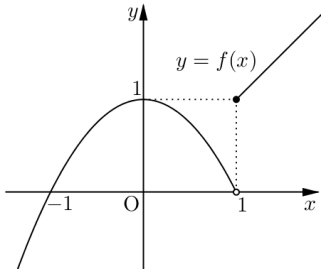
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & (x < 1) \\ x & (x \geq 1) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} f(x-1) & (x < k) \\ f(x-2) & (x \geq k) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $(x-a)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+k$ 의 값은? (단, a 와 k 는 상수이다.) [4점]

- ① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$



46. 함수 $f(x) = -x^4 + 6x^2 + 8x - 2$ 의 최댓값을 구하시오. [3점]

47. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시간 $t (t \geq 0)$ 에서의 위치 $x(t)$ 가

$$x(t) = t^3 + 3t^2 - 9t + 2$$

이다. 점 P의 운동 방향이 바뀔 때, 점 P의 가속도의 크기를 구하시오. [3점]

48. 함수 $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - k$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt$$

가 극댓값과 극솟값을 모두 가지도록 하는 정수 k 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. [4점]

49. 함수 $f(x) = x^3 - 3x + 18$ 와 실수 전체의 집합에서 연속이고 0이 아닌 실수 a 와 두 실수 p, q ($-3 < p < q$) 에 대하여

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}a & (x < p) \\ 0 & (p < x < q) \\ a & (x > q) \end{cases}$$

인 함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x) = g(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

(나) $x \geq -3$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq g(x)$ 이다.

$\int_{-3}^q \{f(x) - g(x)\} dx$ 가 최소가 되도록 하는 a, p, q 에 대하여 $a \times (q - p)$ 의 값을 구하시오. [4점*]

수학 영역(확률과 통계)

1. 두 사건 A, B 가 서로 독립이고

$$P(A \cap B) = \frac{1}{3}, \quad P(A \cap B^c) = \frac{1}{6}$$

일 때, $P(A \cup B^c)$ 의 값은? (단, B^c 는 B 의 여사건이다.) [3점]

- ① $\frac{4}{9}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{9}$ ④ $\frac{11}{18}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

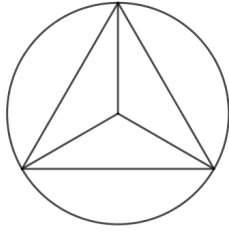
2. 다항식 $(x+3)^n$ 의 전개식에서 x^{n-1} 의 계수를 a 라 하고,
다항식 $(2x-1)^2(x+1)^{n-2}$ 의 전개식에서 x^{n-1} 의 계수를 b 라
하자. $a=b$ 일 때, 자연수 n 의 값은? (단, $n \geq 4$) [3점]

- ① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

2

수학 영역(확률과 통계)

3. [★] 그림과 같이 원에 내접하는 정삼각형과 정삼각형의 각 꼭짓점과 원의 중심을 한 꼭짓점으로 갖는 3개의 합동인 삼각형이 있다. 원의 내부 또는 삼각형의 내부에 만들어지는 6개의 영역에 서로 다른 3가지 색을 모두 사용하여 칠하려고 한다. 한 영역에 한 가지 색만을 칠하고, 이웃한 영역에는 서로 다른 색을 칠할 때, 색칠한 결과로 나올 수 있는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



- ① 8 ② 12 ③ 16 ④ 20 ⑤ 24

4. [★] 자연수 전체의 집합의 부분집합 $X = \{x | 1 \leq x \leq 10\}$ 에서 임의로 선택된 하나의 원소 x 가 부등식 $x^2 - 6x + 5 \leq 0$ 을 만족시키는 사건을 A , 방정식 $|x - 4| = n$ 을 만족시키는 사건을 B 라 하자. 두 사건 A, B 가 서로 독립이 되도록 하는 모든 자연수 n 의 값의 합은? (단, $P(B) \neq 0$ 이다.) [4점]

- ① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

5. 다음은 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 와 함수 $f: A \rightarrow A$ 에 대하여 $f(1)+f(3)=4$ 를 만족시키고, 치역의 원소의 개수가 3인 함수 f 의 개수를 구하는 과정이다.

함수 f 가 $f(1)+f(3)=4$ 인 경우는 (1) $f(1)=1, f(3)=3$ 인 경우 또는 (2) $f(1)=3, f(3)=1$ 인 경우 또는 (3) $f(1)=f(3)=2$ 인 경우이다.

(1) $f(1)=1, f(3)=3$ 인 경우
 함수 f 의 치역의 남은 하나의 원소를 택하는 방법의 수는 ${}_3C_1 = 3$ 이고,
 이 각각에 대하여 $f(2), f(4), f(5)$ 의 값을 선택할 때, $f(2), f(4), f(5)$ 의 값이 모두 1 또는 3이 되는 경우를 제외해야 하므로 $f(2), f(4), f(5)$ 의 값을 선택하는 방법의 수는 \square (가) 이다.
 따라서 이를 만족하는 함수 f 의 개수는 $3 \times \square$ (가) 이다.

(2) $f(1)=3, f(3)=1$ 인 경우
 (1) 과 같은 방법으로 이를 만족하는 함수 f 의 개수는 $3 \times \square$ (가) 이다.

(3) $f(1)=f(3)=2$ 인 경우
 함수 f 의 치역의 남은 두 개의 원소를 택하는 방법의 수는 ${}_4C_2 = 6$ 이다. 선택한 두 원소를 a, b 라 하면 $f(2), f(4), f(5)$ 의 값을 2, a, b 중에서 선택하는 모든 방법 중에서 함수 f 의 치역이 $\{2, a\}, \{2, b\}, \{2\}$ 가 되는 경우를 제외해야 한다.
 $f(2), f(4), f(5)$ 의 값을 2, a, b 중에서 택하는 모든 방법의 수는 $3^3 = 27$ 이고,
 그 중 함수 f 의 치역이 $\{2, a\}$ 인 경우의 수와 $\{2, b\}$ 인 경우의 수는 각각 \square (나) 이고,
 함수 f 의 치역이 $\{2\}$ 인 경우의 수는 1 이므로 $f(2), f(4), f(5)$ 의 값을 선택하는 방법의 수는 $27 - (1 + 2 \times \square$ (나) $)$ 이다.
 따라서 이를 만족하는 함수 f 의 개수는 $6 \times \{27 - (1 + 2 \times \square$ (나) $)\}$ 이다.

따라서 (1), (2), (3) 에 의하여 구하는 함수 f 의 개수는 \square (다) 이다.

6. 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수만큼 동전을 반복하여 던지는 시행을 할 때, 동전의 앞면과 뒷면이 나온 횟수가 같을 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.
 (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [3점]

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r 라 할 때, $p+q+r$ 의 값은? [4점]

- ① 212 ② 217 ③ 222 ④ 227 ⑤ 232

7. [★] 숫자 1이 적힌 카드가 3장, 숫자 2와 3이 적힌 카드가 각각 2장씩 총 7장의 카드가 들어 있는 주머니에서 임의로 5장의 카드를 뽑아 일렬로 나열할 때, 다음 조건을 만족시킬 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.
(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

- (가) 숫자 1이 적힌 카드는 2장 이상 선택한다.
(나) 숫자 1이 적힌 카드끼리는 서로 이웃하지 않는다.

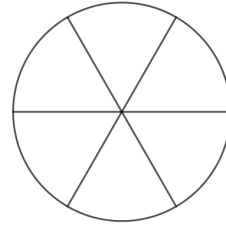
8. [★] 3개의 문자 x, y, z 에서 중복을 허락하여 7개를 택하여 일렬로 나열할 때, 다음 조건을 만족시키도록 나열하는 경우의 수를 구하시오. [4점*]

- (가) 가장 왼쪽과 가장 오른쪽에는 각각 x 를 나열한다.
(나) x 와 y 가 이웃하는 횟수는 1 이하이다.
(다) x 와 z 가 이웃하는 횟수는 1 이하이다.

9. [★] 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 에서 $Y = \{1, 2, 3\}$ 로의 함수 f 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수를 구하시오.
[4점]

$f(x) = n$ 을 만족시키는 $x \in X$ 의 개수는 n 이상이다.
($n = 1, 2, 3$)

10. 그림과 같이 원을 6개의 합동인 부채꼴로 나누고, 나누어진 각 부채꼴에 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6을 하나씩 써넣으려고 한다. 마주 보는 부채꼴에 쓰인 두 수의 합이 모두 7이 되는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



- ① 8 ② 12 ③ 16 ④ 20 ⑤ 24

6

수학 영역(확률과 통계)

11. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합 중에서 임의로 선택한 서로 다른 두 집합을 각각 A, B 라 할 때, $n(A) + n(B) = 6$ 일 확률은? [3점]

- ① $\frac{3}{35}$ ② $\frac{4}{35}$ ③ $\frac{1}{7}$ ④ $\frac{6}{35}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

12. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c 의 모든 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는? [3점]

(가) $a + b + c = 8$

(나) $a < b + c$

- ① 18 ② 21 ③ 24 ④ 27 ⑤ 30

13. 두 사건 A, B 가

$$P(A|B) = \frac{1}{3}, \quad P(B|A) = \frac{1}{4}$$

를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, A^c 는 A 의 여사건이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $\frac{P(B)}{P(A)} = \frac{3}{4}$

ㄴ. $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$ 이면 $P(A^c \cup B) = \frac{5}{8}$ 이다.

ㄷ. $P(A^c)P(B) \leq \frac{3}{16}$

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. [★] 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에서 $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 로의 함수 f 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수는?

[4점*]

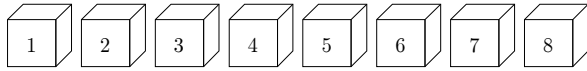
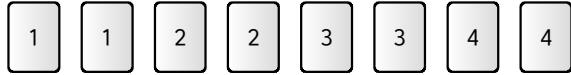
$n=1, 2, 3, 4, 5$ 일 때, $f(n+1)$ 의 값은 $f(n)$ 또는 $f(n)+1$ 중 하나이다.

- ① 40 ② 43 ③ 46 ④ 49 ⑤ 52

15. $(x+2)^2\left(x-\frac{k}{x}\right)^4$ 의 전개식에서 상수항이 0일 때, 양수 k 의 값을 구하시오. [3점]

16. 한 개의 주사위를 세 번 던져 나오는 눈의 수를 차례대로 a, b, c 라 하자. 세 수 a, b, c 가 $(b-a)(b-3c) < 0$ 을 만족시킬 때, $a > 3c$ 일 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

17. 1, 2, 3, 4의 숫자가 하나씩 적혀 있는 카드가 각각 2장씩 8장이 있다. 그림과 같이 1에서 8까지의 자연수가 하나씩 적힌 8개의 상자에 각각 이 카드를 임의로 한 장씩 넣을 때, 8 이하의 자연수 k 에 대하여 숫자 k 가 적힌 상자에 들어 있는 카드에 적혀 있는 수를 a_k 라고 하자. $a_k + k$ 의 값이 홀수인 k 의 개수가 4보다 작은 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 숫자가 적혀 있는 카드는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

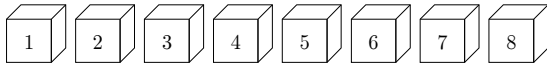
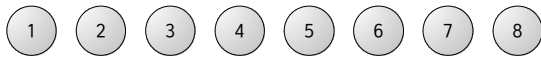


18. 숫자 1, 2, 3이 하나씩 쓰여 있는 카드 3장이 있는 주머니에서 한 장의 카드를 임의로 꺼내어 카드에 적힌 수를 확인하고 다시 넣는 시행을 3회 반복할 때, 뽑은 카드에 적힌 숫자의 합이 8 이상일 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [3점]

19. 그림과 같이 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8이 적혀 있는 공을 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8이 적힌 상자에 하나씩 넣으려고 한다. 8 이하의 자연수 k 에 대하여 숫자 k 가 적힌 공이 들어 있는 상자에 적혀 있는 수를 a_k 라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수는? [4점]

(가) $a_6 < a_7$
 (나) 6 이하의 모든 자연수 m 에 대하여 $a_{m+2} > a_m$ 이다.

- ① 40 ② 45 ③ 50 ④ 55 ⑤ 60



20. 두 사건 A, B 가 서로 독립이고,

$$P(A \cup B) = \frac{1}{2}, \quad P(A \cup B^c) = \frac{2}{3}$$

일 때, $P(A \cap B)$ 의 값은? (단, B^c 는 B 의 여사건이다.) [3점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{4}{15}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{2}{15}$ ⑤ $\frac{1}{15}$

21. 확률변수 X 가 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{3}\right)$ 을 따르고,

$P(X=2) = 6P(X=1)$ 일 때, n 의 값은? [3점]

- ① 25 ② 30 ③ 35 ④ 40 ⑤ 45

22. 빨간 공 3개, 노란 공 2개, 파란 공 2개가 들어 있는

주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 3개의 공 중 노란 공과 파란 공의 개수의 합이 2 이상일 확률은? [3점]

- ① $\frac{22}{35}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{4}{7}$ ④ $\frac{19}{35}$ ⑤ $\frac{18}{35}$

23. [★] 한 개의 주사위를 세 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c 라 하자. 세 수 a, b, c 중 두 수만 서로 같을 때, 세 수 a, b, c 의 곱 $a \times b \times c$ 가 6의 배수일 확률은? [4점]

- ① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{13}{30}$ ③ $\frac{7}{15}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{8}{15}$

24. [★] 확률변수 X 는 정규분포 $N(m, 1^2)$, 확률변수 Y 는 정규분포 $N(20-m, 2^2)$ 을 따른다.

$$P(X \leq k) \leq P(Y \geq k)$$

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

을 만족시키는 실수 k 의 최댓값이 9일 때, $P(X \geq 8) + P(Y \leq 14)$ 의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

- ① 0.6247 ② 0.6587 ③ 0.7745 ④ 0.8085 ⑤ 0.8502

25. 좌표평면의 원점에 점 A가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져 3의 배수인 눈이 나오면 점 A를 x 축의 양의 방향으로 1만큼, 3의 배수가 아닌 눈이 나오면 점 A를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 1만큼 이동시킨다.

위의 시행을 반복하여 점 A가 이동한 점의 좌표를 (a, b) 라 할 때, $a = b + 2$ 인 사건을 A라 하자.
 다음은 위의 시행을 여섯 번 반복하여 사건 A가 발생한 횟수가 3이었을 때, 3의 배수인 눈이 나온 횟수가 2일 확률을 구하는 과정이다.

사건 A가 발생한 횟수가 3이 되려면 위의 시행을 반복하여 3의 배수의 눈이 나온 횟수가 처음으로 2가 되었을 때, 이어서 3의 배수가 아닌 눈이 연속하여 두 번만 나와야 한다.
 위 시행에서 3의 배수인 눈이 총 두 번 나올 때까지 주사위를 던진 횟수를 $X (2 \leq X \leq 4)$ 라 하자. 그러면

(1) $X = 2$ 인 경우, 여섯 번의 시행에서 사건 A가 발생한 횟수가 3일 확률은

$$P(X=2) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

(2) $X = 3$ 인 경우, 여섯 번의 시행에서 사건 A가 발생한 횟수가 3일 확률은

$$P(X=3) = \boxed{\text{(가)}} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

(3) $X = 4$ 인 경우, 여섯 번의 시행에서 사건 A가 발생한 횟수가 3일 확률은

$$P(X=4) = \boxed{\text{(나)}} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

이므로 여섯 번의 시행에서 사건 A가 발생한 횟수가 3이고, 3의 배수인 눈이 나온 횟수가 2인 경우는 $X = 4$ 인 경우뿐이다.
 따라서 조건부확률의 정의에서 구하는 확률은

$$\frac{P(X=4)}{P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)} = \boxed{\text{(다)}}$$

이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r 라 할 때, $p \times q \times r$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{24}{5}$ ② $\frac{9}{2}$ ③ $\frac{72}{17}$ ④ 4 ⑤ $\frac{72}{19}$

26. 어느 모집단의 확률변수 X 의 확률질량함수가

$$P(X=x) = \frac{k}{x+1} C_2 \quad (x = 1, 2, 3, 4)$$

이다. 이 모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본을 각각 X_1, X_2 라 할 때, $Y = X_1 + X_2$ 라 하자. $E(24Y+1)$ 의 값을 구하시오. (단, k 는 상수이다.) [3점]

27. 5 이상의 자연수 n 에 대하여 한 개의 원판을 중심각의 크기가 서로 같은 n 개의 부채꼴로 나누고, 1부터 n 까지의 자연수를 각 부채꼴에 하나씩 적을 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 $f(n)$ 이라 하자.

- (가) 1이 적힌 부채꼴과 짝수가 적힌 부채꼴은 서로 이웃하지 않는다.
 (나) 1이 적힌 부채꼴과 이웃하는 두 부채꼴에 적힌 수의 합은 $\frac{3}{2}n$ 보다 작다.

$\frac{f(13)}{f(12)} = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이고, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

28. [★] 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 에서 $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 로의 함수 f 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수를 구하시오. [4점*]

- (가) 함수 f 의 치역의 원소의 개수는 3이다.
 (나) $n = 1, 2, 3$ 일 때, $f(n) \leq f(n+1)$ 이다.
 (다) $n = 4, 5, 6$ 일 때, $f(n) \geq f(n+1)$ 이다.

29. 이산확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	a	b	$\frac{1}{6}$	1

$E(X) = \frac{7}{3}$ 일 때, $V(3X+1)$ 의 값은? [3점]

- ① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

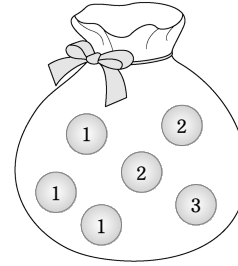
30. 숫자 1, 2, 3이 하나씩 적힌 카드 3장과 문자 a, a, b, b 가 하나씩 적힌 4장의 카드가 있다. 이 7장의 카드를 다음 조건을 만족시키도록 일렬로 나열하는 모든 방법의 수는? [3점]

- (가) 숫자가 적힌 카드는 작은 수부터 크기순으로 왼쪽부터 오른쪽으로 나열한다.
 (나) 문자 a 가 적힌 카드끼리는 서로 이웃하지 않는다.

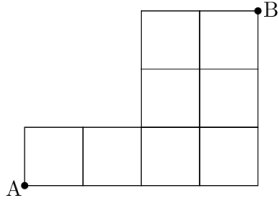
- ① 150 ② 180 ③ 210 ④ 240 ⑤ 270

31. 어느 버스 정류장에서 승객들이 버스를 기다리는 시간은 평균이 m , 표준편차가 σ 인 정규분포를 따른다고 한다. 이 버스 정류장을 이용하는 승객 n 명을 임의추출하여 버스를 기다리는 시간을 조사한 표본평균을 이용하여 구한 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $8.88 \leq m \leq 11.12$ 이다. $\frac{n}{\sigma} = 12.25$ 일 때, $n + \sigma$ 의 값을 구하시오.
 (단, 시간의 단위는 분이고 Z 가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(0 \leq Z \leq 1.96) = 0.475$ 로 계산한다.) [3점]

32. [★] 숫자 1, 1, 1, 2, 2, 3이 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 3개의 공에 적혀 있는 수를 각각 a, b, c 라 하자. $a + b + c > 4$ 일 때, 세 수 a, b, c 중 적어도 두 수가 같을 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p + q$ 의 값을 구하시오.
 (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



33. 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다.
이 도로망을 따라 A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단거리로
가는 경우의 수는? [3점]

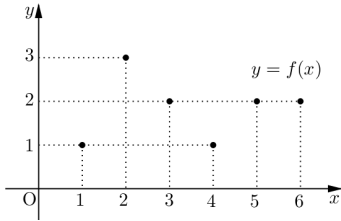


- ① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

34. 흰 공이 3개, 검은 공이 4개 들어있는 주머니에서 임의로
3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 3개의 공 중 흰 공의 개수가
검은 공의 개수보다 많을 확률은? [3점]

- ① $\frac{13}{35}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{7}$ ④ $\frac{16}{35}$ ⑤ $\frac{17}{35}$

35. 그림은 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에서 $B = \{1, 2, 3\}$ 로의 함수 f 의 그래프를 나타낸 것이다.



집합 A 의 원소 중에서 임의로 1개의 원소 a 를 선택하였을 때, $|f(a) - a|$ 의 값을 확률변수 X 라 하자. $V(X)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{5}{3}$
- ② $\frac{11}{6}$
- ③ 2
- ④ $\frac{13}{6}$
- ⑤ $\frac{7}{3}$

36. 어느 고등학교 학생들의 하루 수면 시간은 평균이 m , 표준편차가 σ 인 정규분포를 따른다고 한다. 이 고등학교 학생 16명을 임의추출하여 하루 수면 시간을 조사한 표본평균을 이용하여 구한 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \leq m \leq a + 2.94$ 이다.

이 고등학교 학생 25명을 다시 임의추출하여 하루 수면 시간을 조사한 표본평균이 \bar{x} 일 때, 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $5.324 \leq m \leq c$ 이다. $\bar{x} + c$ 의 값은?

(단, 수면 시간의 단위는 시간이고 Z 가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(0 \leq Z \leq 1.96) = 0.475$ 로 계산한다.) [4점]

- ① 14.176
- ② 14.526
- ③ 14.876
- ④ 15.226
- ⑤ 15.576

37. [★] 좌표평면의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 동전을 한 번 던져서 앞면이 나오면 점 P를 x 축의 방향으로 1만큼, 뒷면이 나오면 점 P를 y 축의 방향으로 1만큼 이동시키는 시행을 한다. 이 시행을 6번 반복할 때, n 번의 시행 후 점 P의 좌표를 (x_n, y_n) 이라 하자. $x_4 > y_4$ 일 때, $(x_2 - y_2)(x_6 - y_6) = 0$ 일 확률은? (단, n 은 6 이하의 자연수이다.) [4점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{11}{20}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{13}{20}$ ⑤ $\frac{7}{10}$

38. [★] 다음 조건을 만족시키는 자연수 a_1, a_2, a_3, a_4 의 모든 순서쌍 (a_1, a_2, a_3, a_4) 의 개수는? [4점]

(가) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 12$

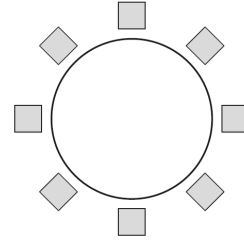
(나) $a_1 = a_2$ 이거나 a_4 는 3의 배수이다.

- ① 53 ② 54 ③ 55 ④ 56 ⑤ 57

39. 다항식 $(x+2)(x+1)^7$ 의 전개식에서 x^n 의 계수를 a_n 이라

할 때, $\sum_{n=1}^6 a_n$ 의 값을 구하시오. [3점]

40. 어느 고등학교의 1학년 학생 3명, 2학년 학생 3명, 3학년 학생 2명이 그림과 같이 일정한 간격으로 8개의 의자가 놓인 원탁에 앉으려고 한다. 같은 학년의 학생끼리는 모두 서로 이웃하도록 앉는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



41. 확률변수 X 가 평균이 m , 표준편차가 σ 인 정규분포를 따르고 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $P(X \leq k) + P(X \leq k+1) < 1$ 을 만족시키는 정수 k 의 최댓값은 7이다.
 (나) $P(X \geq 2m-1) = 0.0668$

m 이 자연수일 때, $m+\sigma$ 의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. [4점*]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

42. 두 사건 A, B 가

$$P(A \cap B) = \frac{1}{3}, \quad P(A^c) = P(B)$$

를 만족시킬 때, $P(A \cup B)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

43. 두 개의 주사위를 동시에 던지는 시행을 16회 반복할 때, 나온 두 눈의 수의 곱이 짝수가 되는 횟수를 확률변수 X 라 하자. $E(X^2)$ 의 값은? [3점]

- ① 133 ② 140 ③ 147 ④ 154 ⑤ 161

44. 어느 학교 학생 100명을 대상으로 야외활동 장소에 대한 선호도를 조사하였다. 이 조사에 참여한 학생은 공원 A와 공원 B 중 하나를 선택하였고, 각각의 장소를 선택한 학생의 수는 다음과 같다.

구분	공원 A	공원 B	합계
남학생	20	30	50
여학생	35	15	50
합계	55	45	100

이 조사에 참여한 학생 100명 중에서 임의로 선택한 1명이 공원 B를 선택한 학생일 때, 이 학생이 남학생일 확률은? [3점]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

45. [★] 빨간 공 3개와 파란 공 4개를 서로 다른 주머니 A, B, C에 남김없이 나누어 넣을 때, 주머니 A에 3개 이상의 공이 들어가는 경우의 수는? (단, 같은 색의 공은 서로 구별하지 않고, 공이 하나도 들어가지 않는 주머니가 있을 수 있다.) [4점]
- ① 65 ② 70 ③ 75 ④ 80 ⑤ 85

46. 7개의 문자 A, A, A, A, B, B, C를 일렬로 나열할 때, 양 끝에 같은 문자가 오도록 나열하는 방법의 수를 구하시오. [3점]

47. 숫자 1이 적힌 카드가 1장, 숫자 2가 적힌 카드가 2장, 숫자 3이 적힌 카드가 3장 들어 있는 상자가 있다. 이 상자에서 임의로 카드를 한 장씩 뽑는 시행을 반복할 때, 세 번째 시행 또는 여섯 번째 시행에서 짝수가 적힌 카드가 뽑힐 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.
(단, 한 번 꺼낸 공은 다시 상자에 넣지 않고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

48. 서로 다른 4개의 공을 서로 다른 세 상자 A, B, C에 남김없이 나누어 넣을 때, 상자 A에 적어도 한 개 이상의 공이 들어가는 경우의 수는? (단, 공을 하나도 넣지 않은 상자가 있을 수 있다.) [3점]

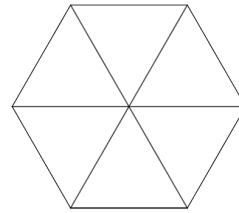
- ① 45 ② 50 ③ 55 ④ 60 ⑤ 65

49. 어느 회사에서 생산하는 스마트폰 한 개의 무게 X 는 평균이 150g, 표준편차가 10g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산하는 스마트폰 중에서 임의추출한 25 개의 스마트폰 무게의 표본평균을 \bar{X} 라 할 때, $P(X \leq 140) + P(\bar{X} \geq 153)$ 의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

- ① 0.2255 ② 0.3174 ③ 0.3313 ④ 0.3753 ⑤ 0.4672

50. 그림과 같이 정육각형 모양으로 배열된 서로 합동인 정삼각형 6개에 빨간색, 파란색, 노란색을 포함한 서로 다른 6가지의 색을 모두 사용하여 칠하려고 한다. 한 개의 정삼각형엔 한 가지의 색만 칠하고, 빨간색과 파란색을 서로 이웃하지 않은 두 정삼각형에 칠하였을 때, 노란색을 칠한 정삼각형이 빨간색과 파란색을 칠한 삼각형과 각각 이웃하지 않을 확률은? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



- ① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

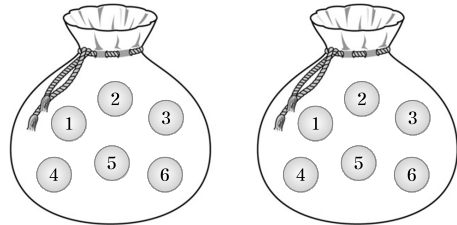
51. 확률변수 X 는 정규분포 $N(5, 1^2)$, 확률변수 Y 는 정규분포 $N(10, \sigma^2)$ 을 따른다. 다음 조건을 만족시키는 σ 에 대하여 $P(Y \geq 12)$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

단한구간 $[6, 8]$ 에 속하는 어떤 실수 k 에 대하여 $P(X \leq 7) = P(Y \geq k)$ 이다.

- ① 0.1815 ② 0.2255 ③ 0.3313 ④ 0.3753 ⑤ 0.4672

52. [★] 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어 있는 두 개의 주머니가 있다. 각각의 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 네 개의 공에 적혀 있는 숫자 중에서 가장 작은 수와 가장 큰 수의 곱이 6일 확률은? [4점]



- ① $\frac{4}{15}$ ② $\frac{61}{225}$ ③ $\frac{62}{225}$ ④ $\frac{7}{25}$ ⑤ $\frac{64}{225}$

53. 이산확률변수 X 가 가지는 값이 1부터 4까지의 자연수이고

$$P(X=x) = ax + b \quad (x=1, 2, 3, 4)$$

이다. $E(X) = \frac{8}{3}$ 일 때, $V(3X)$ 의 값을 구하시오.

(단, a, b 는 상수이다.) [3점]

54. [★] 주사위를 두 번 던져서 나오는 두 눈의 수의 합이 3의 배수인 사건을 A , 두 눈의 수의 합이 n 보다 크거나 같은 사건을 B 라 하자. 두 사건 A, B 가 서로 독립이 되도록 하는 12 이하의 모든 자연수 n 의 값의 합을 구하시오. [4점]

55. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 두 함수 $f: X \rightarrow Y$, $g: X \rightarrow X$ 중 임의로 각각 하나를 선택하였을 때, 함수 f 의 치역이 Y 이고 함수 g 의 치역이 X 일 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(가) 집합 X 의 임의의 두 원소 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ 에 대하여 $f(x_1) \leq f(x_2)$ 이다.

(나) 집합 X 의 임의의 원소 x 에 대하여 $(g \circ f)(x) = f(x)$ 이다.

56. 문자 a, a, b, b, c, c, c 가 하나씩 적힌 7장의 카드를 일렬로 나열할 때, c 가 적힌 카드끼리 서로 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수는? [3점]

① 48 ② 54 ③ 60 ④ 66 ⑤ 72

57. [★] 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 의 공집합이 아닌 15개의 부분집합 중에서 임의로 선택한 서로 다른 두 부분집합을 각각 A, B 라 하자. 두 집합 A, B 가

$$A - B \neq \emptyset, \quad A \cup B \neq X$$

을 만족시킬 확률은? [4점]

- ① $\frac{23}{70}$ ② $\frac{13}{35}$ ③ $\frac{29}{70}$ ④ $\frac{16}{35}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

58. [★] 어떤 모집단의 확률변수 X 에 대하여 이 모집단에서 크기가 2인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 \bar{X} 라 할 때, 두 확률변수 X 와 \bar{X} 의 확률분포의 일부를 각각 표로 나타내면 다음과 같다. [4점]

X	1	3	a	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$			1

\bar{X}	1	2	3	b	6	a	합계
$P(\bar{X}=x)$	$\frac{1}{9}$			$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$		1

$E(3\bar{X}+1)$ 의 값을 구하십시오. (단, $3 < b < 6 < a$) [4점]

59. 사과 6개, 배 3개, 귤 6개를 서로 다른 두 개의 바구니 A와 B에 남김없이 나누어 넣을 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 종류의 과일끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점*]

(가) 바구니 A에 들어가는 사과와 배의 개수는 각각 1 이상이고, 바구니 A에 들어가는 사과와 배의 개수는 서로 같지 않다.

(나) 바구니 B에 들어가는 사과와 귤의 개수는 각각 1 이상이고, 바구니 B에 들어가는 사과와 귤의 개수는 서로 같지 않다.

(다) 바구니 A와 B에 들어가는 귤의 개수는 서로 같지 않다.

수학 영역(미적분)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \{(1-2x)(1+\sin x)\}^{\cot x}$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{e}$ ② 1 ③ e ④ e^2 ⑤ e^3

2. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + bx & (x < 2) \\ e^{x-2} - a & (x \geq 2) \end{cases}$$

이다. 함수 $g(x)$ 가

$$g(x) = (f \circ f)(x)$$

일 때, $g'(2)$ 의 값은? [3점]

- ① -11 ② -10 ③ -9 ④ -8 ⑤ -7

2

수학 영역(미적분)

3. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때,

$$a_n + 2S_n = \frac{kn}{n+1} \quad (n \geq 1)$$

이다. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3$ 일 때, a_1 의 값은? (단, k 는 상수이다.) [3점]

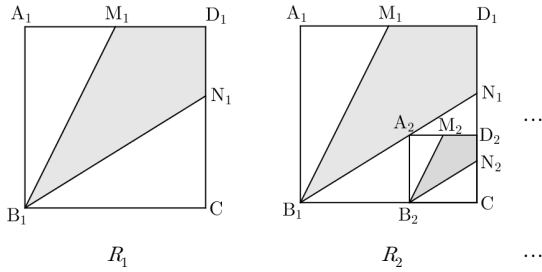
- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. [★] 이차방정식 $4x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 두 실근을 $\sin\alpha, \sin\beta$ 라

할 때, $\cos(\alpha + \beta)$ 의 값은? (단, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi < \beta < 2\pi$) [4점]

- ① $\frac{\sqrt{6}-2}{8}$ ② $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ ③ $\sqrt{5}-2$
④ $\frac{\sqrt{6}+2}{8}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

5. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1CD_1$ 에서 선분 A_1D_1 의 중점을 M_1 이라 하고, $\angle M_1B_1C$ 를 이등분하는 직선이 선분 CD_1 과 만나는 점을 N_1 이라 할 때, 사각형 $B_1M_1D_1N_1$ 의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.
 그림 R_1 에 선분 B_1N_1 위의 점 A_2 , 선분 B_1C 위의 점 B_2 , 점 C , 선분 CN_1 위의 점 D_2 를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $A_2B_2CD_2$ 를 그리고, 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 두 점 M_2, N_2 를 잡아 사각형 $B_2M_2D_2N_2$ 의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.
 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{2+3\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{5+7\sqrt{5}}{10}$ ③ $\frac{3+4\sqrt{5}}{5}$
- ④ $\frac{7+9\sqrt{5}}{10}$ ⑤ $\frac{4+5\sqrt{5}}{5}$

6. [★] 함수

$$f(x) = -\sin x \cos x + 2\cos x + (2k+3)x$$

가 열린구간 $(0, 2\pi)$ 에서 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 실수 k 의 값은? [4점]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

7. [★] $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=3$ 인 삼각형 ABC에서 점 A에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자. 선분 AH를 지름으로 하는 원이 선분 AC와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 P라 하고, 선분 BC의 길이가 t ($2 < t < 8$)일 때, 선분 AP의 길이를 $f(t)$ 라 하자. 미분가능한 함수 $f(t)$ 에 대하여 다음 <보기> 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\overline{AH}^2 = 3f(t)$
 ㄴ. $f(t) = 2$ 인 모든 실수 t 의 값의 곱은 16이다.
 ㄷ. $\overline{CH} = k$ 인 실수 k 에 대하여 $f'(k) = \frac{16\sqrt{3}}{9}$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

8. [★] 함수 $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ ($a \neq 0$)가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$ 는 극값을 갖지 않는다.
 (나) 함수 $|f(x) - f(0)|$ 은 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
 (다) 어떤 양수 k 에 대하여 함수 $|f(x) + x - k|$ 는 $x = p$ ($p < 0$)에서만 미분가능하지 않다.

$f(2)$ 의 값은? (단, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 이다.) [4점*]

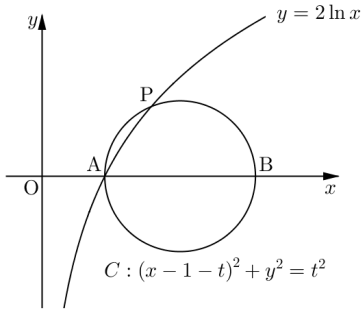
- ① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

9. $t > 0$ 인 실수 t 에 대하여 그림과 같이 원

$$C: (x-1-t)^2 + y^2 = t^2$$

와 x 축이 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 원 C 와 곡선 $y = 2\ln x$ 의 교점 중 A가 아닌 점을 P라 하자.

$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = a$ 일 때, $100a^2$ 의 값을 구하시오. [3점]



10. [★] 매개변수 $t \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \right)$ 로 나타내어진 함수

$$x = \sin^3 t, \quad y = \sin t - a \cos t \quad (a \neq 0)$$

가 $t = \alpha$ 에서 극솟값 $-\frac{\sqrt{10}}{3}$ 를 갖는다. $t = -\alpha$ 에서 $\frac{dy}{dx}$ 의

값이 $\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

6

수학 영역(미적분)

11. 함수 $f(x) = \log_2(\cos\pi x + 3)$ 과 다음 조건을 만족시키고
최고차항의 계수가 1인 모든 삼차함수 $g(x)$ 에 대하여 가능한
모든 정수 n 의 값의 합을 구하시오. [4점*]

(가) $g(2) = 1, g(3) = n$

(나) 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 방정식 $(f \circ g)(x) = 1$ 의 서로
다른 실근의 개수는 3이다.

(다) 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 방정식 $(g \circ f)(x) = 1$ 의 서로
다른 실근의 개수는 3이다.

12. 곡선 $x^2 + y^2 = e^{3x-4y}$ 위의 점 $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ 에서 그은 접선의
기울기는? [3점]

① $\frac{3}{26}$ ② $\frac{2}{13}$ ③ $\frac{5}{26}$ ④ $\frac{3}{13}$ ⑤ $\frac{7}{26}$

13. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$\frac{n}{n+1} < \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{2^k} - 3 \right) < \frac{n+1}{n}$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - 2^n}{a_n + 2^n}$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

14. 미분가능한 함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{f(\sin x) - 1}{6x - \pi} = \sqrt{3}$$

를 만족시킬 때, $f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값은? [3점]

- ① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

15. 곡선 $y = \frac{\ln x + 1}{x}$ ($x > 0$) 위의 점에서 그은 접선 중 기울기가 최소인 직선을 l 이라 하자. 직선 l 과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

- ① $\frac{4}{e}$ ② 2 ③ e ④ 4 ⑤ $2e$

16. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, $f(0)g(0)$ 의 값은? [4점]

$$(가) f(x)\sqrt{g(x)} = e^x(\sin x + 2)$$

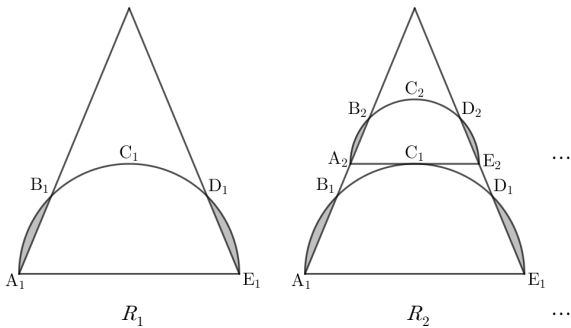
$$(나) 2f'(0)g(0) = 1 - f(0)g'(0)$$

- ① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

17. [★] 그림과 같이 $\overline{A_1E_1} = 2$ 인 선분 A_1E_1 을 지름으로 하는 반원이 있다. 호 A_1E_1 의 길이를 사등분하는 점을 각각 B_1, C_1, D_1 이라 하고, 직선 A_1B_1 과 호 A_1E_1 , 직선 D_1E_1 과 호 A_1E_1 으로 둘러싸인 부분을 각각 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에서 점 C_1 을 지나고 선분 A_1E_1 과 평행한 직선이 직선 A_1B_1 , 직선 D_1E_1 과 만나는 점을 각각 A_2, E_2 라 하자. 선분 A_2E_2 를 지름으로 하는 반원이 직선 A_1B_1 , 직선 D_1E_1 과 만나는 점 중 A_2, E_2 가 아닌 점을 각각 B_2, D_2 라 하고, 호 B_2D_2 의 중점을 C_2 라 하자. 직선 A_2B_2 와 호 A_2E_2 , 직선 D_2E_2 와 호 A_2E_2 로 둘러싸인 부분을 각각 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{(\pi - 2\sqrt{2})(5 + 2\sqrt{2})}{28}$
- ② $\frac{(\pi - 2\sqrt{2})(5 + 4\sqrt{2})}{28}$
- ③ $\frac{(\pi - 2\sqrt{2})(5 + 2\sqrt{2})}{24}$
- ④ $\frac{(\pi - 2\sqrt{2})(5 + 4\sqrt{2})}{24}$
- ⑤ $\frac{(\pi - 2\sqrt{2})(5 + 2\sqrt{2})}{20}$

18. 두 함수

$$f(x) = \frac{ax+b}{e^x+c} \quad (a \neq 0, c > 0),$$

$$g(x) = |x+1| - |x-1|$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

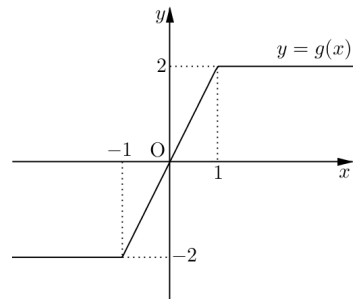
함수 $h(x) = f(x) - g(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극댓값 2를 가지고, $x = t$ ($t > 1$)에서 극댓값 M 을 갖는다.

M 의 최댓값을 $M(t)$ 라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점*]

<보 기>

ㄱ. $t = 2$ 이면 $c = 2e^2$ 이다.
 ㄴ. 함수 $h(x)$ 가 극소가 되는 x 의 개수는 1이다.
 ㄷ. $M'(\alpha) = -\frac{2}{3e^2}\alpha + 2$ 인 실수 α ($\alpha > 1$)에 대하여 $t = \alpha$ 일 때, 함수 $h(x)$ 의 극솟값의 최댓값은 $2 + \frac{1}{e^2}$ 이다.

- ① ㄱ
- ② ㄱ, ㄴ
- ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



19. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 에 대하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2n+1} = 3, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 2b_n) = 2$$

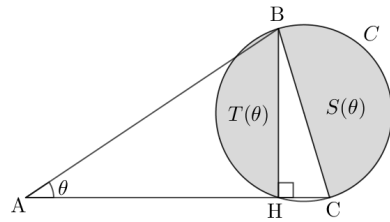
일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - 4b_n}{2a_n + b_n - 7n}$ 의 값을 구하시오. [3점]

20. 그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{AC} = 1$ 인 삼각형 ABC가 있다.

점 B에서 선분 AC로 내린 수선의 발을 H라 하고, 세 점 B, C, H를 지나는 원을 C라 하자. $\angle BAC = \theta$ 일 때, 선분 BC와 호 BC로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하고, 두 점 B, H에 의하여 원 C가 나누어지는 두 부분 중 짧은 쪽과 선분 BH로 둘러싸인 부분의 넓이를 $T(\theta)$ 라 하자.

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta) - T(\theta)}{\theta^3} = a \text{ 일 때, } 100a \text{의 값을 구하시오.}$$

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]



21. [★] 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수

$$f(x) = e^{3x-1} + 3e^{x+1} - k|e^{2x} - 1| \quad (k \neq 0)$$

와 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $h(x) = (g \circ f^{-1})(x)$ 는 열린구간 $(-k, \infty)$ 에서 미분가능하다.
 (나) 방정식 $h'(x) = 0$ 은 단 하나의 실근을 갖는다.

$g(1) - g(0) < 1$ 일 때, $g(2) - g(1) = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.
 (단, k 는 상수이고 p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점*]

22. 곡선 $x^3 + \sin(y+1) = 1$ 위의 점 $(a, -1)$ 위의 점에서 그은 접선이 $(-1, b)$ 를 지날 때, $a+b$ 의 값은? [3점]

- ① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

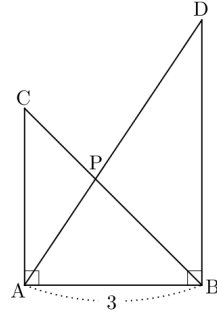
23. 함수 $f(x) = x \cos x$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{n} f\left(\frac{(n+2k)\pi}{2n}\right)$ 의

값은? [3점]

- ① -4π ② -3π ③ -2π ④ $-\pi$ ⑤ 0

24. [★] 그림과 같이 $\overline{AB} = 3$ 이고, $\angle BAC = \angle ABD = \frac{\pi}{2}$ 인

삼각형 ABC와 ABD가 있다. 선분 BC와 AD가 만나는 점을 P라 할 때, $2\overline{PB} = 3\overline{PC}$ 이고, $\tan(\angle APB) = 5$ 이다. 삼각형 APB의 넓이는? [3점]



- ① $\frac{12}{5}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{13}{5}$ ④ $\frac{27}{10}$ ⑤ $\frac{14}{5}$

25. [★] 함수 $f(x) = (x^2 - a)e^{ax}$ 가 $x = 1$ 에서 극솟값을 가질 때, 함수 $f(x)$ 의 극댓값은? (단, a 는 상수이다.) [3점]

- ① $\frac{1}{e^4}$ ② $\frac{2}{e^4}$ ③ $\frac{3}{e^4}$ ④ $\frac{4}{e^4}$ ⑤ $\frac{5}{e^4}$

26. [★] 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) = e^x - 4x^2 \int_0^1 f(t)dt + 2x \int_0^1 f(1 - \sqrt{t})dt$$

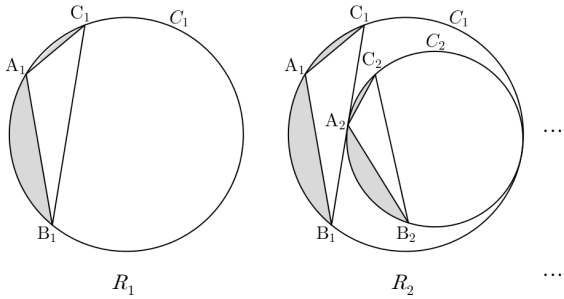
를 만족시킬 때, $\int_0^1 xf(x)dx$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{e}{5}$ ② $\frac{3e}{13}$ ③ $\frac{3e}{11}$ ④ $\frac{e}{3}$ ⑤ $\frac{3e}{7}$

27. [★] 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{7}$ 인 원 C_1 위에 $\overline{A_1B_1} : \overline{A_1C_1} = 2:1$, $\angle B_1A_1C_1 = \frac{2\pi}{3}$ 가 되도록 세 점 A_1, B_1, C_1 을 잡고, 선분 A_1B_1 과 호 A_1B_1 으로 둘러싸인 부분, 선분 A_1C_1 과 호 A_1C_1 으로 둘러싸인 부분에 각각 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에서 원 C_1 과 선분 B_1C_1 에 동시에 접하는 원 중 반지름이 가장 큰 원을 C_2 라 하고, 선분 B_1C_1 과 원 C_2 가 만나는 점을 A_2 라 하자. 원 C_2 위에 $\overline{A_2B_2} : \overline{A_2C_2} = 2:1$, $\angle B_2A_2C_2 = \frac{2\pi}{3}$ 가 되도록 두 점 B_2, C_2 를 잡고, 선분 A_2B_2 와 호 A_2B_2 로 둘러싸인 부분, 선분 A_2C_2 와 호 A_2C_2 로 둘러싸인 부분에 각각 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{16}{3}\pi - \frac{52\sqrt{3}}{7}$
- ② $\frac{17}{3}\pi - 7\sqrt{3}$
- ③ $6\pi - \frac{46\sqrt{3}}{7}$
- ④ $\frac{19}{3}\pi - \frac{43\sqrt{3}}{7}$
- ⑤ $\frac{20}{3}\pi - \frac{40\sqrt{3}}{7}$

28. 0이 아닌 실수 k 에 대하여 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{x} & (x < 0) \\ \ln(x+2) & (x \geq 0) \end{cases}$$

이다. 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \int_0^x \{1 - \cos(2\pi t)\} f(t) dt$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점*]

<보 기>

ㄱ. 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.
 ㄴ. $k > 0$ 일 때, 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 최솟값을 갖는다.
 ㄷ. $k = -1$ 일 때, 모든 정수 n 에 대하여 $2g(n) < g(n-1) + g(n+1)$ 이다.

- ① ㄱ
- ② ㄴ
- ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄱ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

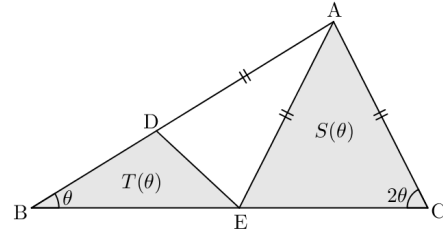
29. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t ($t > 0$)에서의 위치 (x, y) 가

$$x = \ln(1+t^2), \quad y = a\left(t - \frac{1}{t}\right) \quad (a > 0)$$

이다. 점 P의 시각 $t=1$ 에서의 속력이 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 일 때, $\frac{1}{a^2}$ 의 값을 구하시오. (단, a 는 상수이다.) [3점]

30. 그림과 같이 $\overline{BC}=1$ 이고 $\angle ABC = \theta$, $\angle ACB = 2\theta$ 인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AB와 BC 위에 $\overline{AC} = \overline{AD} = \overline{AE}$ 가 되도록 각각 점 D, E를 잡는다. 삼각형 ACE의 넓이를 $S(\theta)$, 삼각형 BDE의 넓이를 $T(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{T(\theta)}{S(\theta)} = a$ 이다.

$100a$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



31. [★] 음의 실수 t 에 대하여 함수

$$f(x) = \ln(e^t x^2 + a) + \frac{1}{2}x \quad (0 < a < 1)$$

가 실수 전체에서 정의된 역함수 $g(x)$ 를 가진다. 방정식

$$f(2x) = \frac{1}{2}g(x)$$

의 양의 실근을 $x = \alpha$ 라 할 때, $g'(\alpha)$ 의 최솟값을 $h(t)$ 라 하자.

$$\int_{-\ln 10}^{-\ln 5} \left(\frac{1}{h(t)} - \frac{1}{2} \right)^2 dt = \frac{q}{p} \text{ 일 때, } p+q \text{의 값을 구하시오.}$$

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점*]

32. $\int_{-2}^1 x\sqrt{x+3} dx$ 의 값은? [3점]

- ① $-\frac{12}{5}$ ② $-\frac{11}{5}$ ③ -2 ④ $-\frac{9}{5}$ ⑤ $-\frac{8}{5}$

33. $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ 인 α, β 에 대하여

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \quad \cos(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

일 때, $\tan 2\alpha$ 의 값은? [3점]

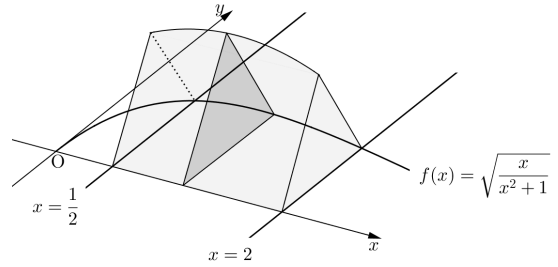
- ① $\frac{5}{7}$ ② $\frac{6}{7}$ ③ 1 ④ $\frac{8}{7}$ ⑤ $\frac{9}{7}$

34. 그림과 같이 함수 $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2+1}}$ 의 그래프와 x 축 및

두 직선 $x = \frac{1}{2}, x = 2$ 로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는

입체도형이 있다. 이 입체도형을 x 축에 수직인 평면으로 자른

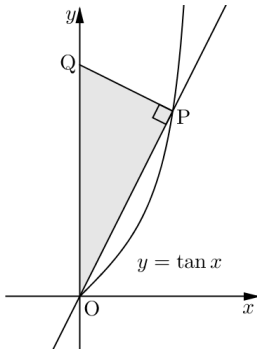
단면이 모두 정삼각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



- ① $\frac{\sqrt{3}}{10} \ln 2$ ② $\frac{\sqrt{3}}{8} \ln 2$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{6} \ln 2$
 ④ $\frac{\sqrt{3}}{4} \ln 2$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2} \ln 2$

35. 그림과 같이 곡선 $y = \tan x$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$) 위의 점 $P(t, \tan t)$ 에 대하여 직선 OP와 수직인 직선이 y 축과 만나는 점을 Q라 하자. 삼각형 OPQ의 넓이를 $S(t)$ 라 할 때, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)}{t^2}$ 의 값은?
(단, O는 원점이다.) [3점]

- ① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2



36. [★] 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f'(e^x - 1) = e^{x+1}f(x)$ 이다.
(나) $\frac{f'(e-1)}{f(e-1)} = \frac{2}{e}$

$\int_0^1 e^{2x} f'(x) dx = \frac{1}{e}$ 일 때, $f'(0)$ 의 값은? [4점]

- ① $-\frac{2e}{2e-5}$ ② $-\frac{e}{e-2}$ ③ $-\frac{2e}{2e-3}$
④ $-\frac{e}{e-1}$ ⑤ $-\frac{2e}{2e-1}$



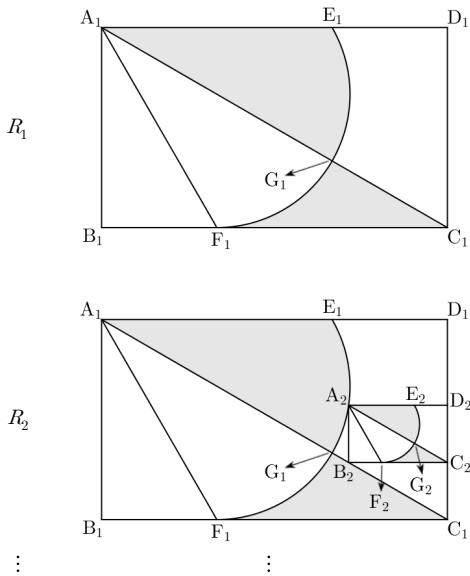
37. [★] 그림과 같이 $\overline{A_1B_1} = 1$, $\overline{A_1D_1} = \sqrt{3}$ 인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 에서 $\angle B_1A_1C_1$ 을 이등분하는 직선이 선분 B_1C_1 과 만나는 점을 F_1 이라 하고, $\overline{A_1E_1} = \overline{A_1F_1}$ 이 되도록 선분 A_1D_1 위의 점 E_1 을 잡는다. 세 점 A_1, E_1, F_1 을 지나는 원이 선분 A_1C_1 과 만나는 점을 G_1 이라 하고, 선분 A_1C_1, A_1E_1, C_1F_1 및 호 E_1F_1 로 둘러싸인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에서 호 E_1F_1 위의 점 A_2 , 선분 A_1C_1 위의 점 B_2 및 선분 C_1D_1 위의 두 점 C_2, D_2 를 꼭짓점으로 하고,

$\overline{A_2B_2} : \overline{A_2D_2} = 1 : \sqrt{3}$ 인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 를 그리고, 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 의 내부에  모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{47\sqrt{3}}{135}$ ② $\frac{16\sqrt{3}}{45}$ ③ $\frac{49\sqrt{3}}{135}$
- ④ $\frac{10\sqrt{3}}{27}$ ⑤ $\frac{17\sqrt{3}}{45}$

38. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n - 1) = 3$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} (10a_n + 4)$ 의 값을 구하시오. [3점]

39. 원점에서 곡선 $y = \frac{1}{e^x + a}$ 에 그은 접선의 개수가 1이

되도록 하는 양의 상수 a 에 대하여 $(\ln a)^2$ 의 값을 구하시오.

(단, $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$) [4점]

40. 함수

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & (0 < x < e) \\ 3 - 2\ln x & (x \geq e) \end{cases}$$

에 대하여 두 실수 α, k ($\alpha > 0$) 가 $f(\alpha) = f(2\alpha) = k$ 를 만족시킨다.

양수 t 에 대하여 $\alpha \leq x \leq 3\alpha$ 에서 $\int_{\alpha}^x \{f(ts) - k\} ds$ 의

최솟값을 $g(t)$ 라 할 때, 미분가능한 함수 $h(t) = tg(t)$ 에 대하여

$h\left(\frac{1}{2}\right) - h'(2) = \frac{e}{\sqrt[3]{4}}(p\ln 2 + q\ln 3)$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 유리수이다.) [4점*]

41. 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ 이고, $f(0) = 2$ 일 때,

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 의 값은? [3점]

- ① $\sqrt{2}-1$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{2}+1$
 ④ $2\sqrt{2}-1$ ⑤ $2\sqrt{2}$

42. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \{(n+1)a_n - 2n^2\}$ 의 값이 존재할 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n + n}$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

43. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$\left(x - \frac{\pi}{2}\right)f(x) = \int_0^x (t-k) \sin t \, dt$$

를 만족시킬 때, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 의 값은? (단, k 는 상수이다.) [3점]

- ① $\frac{\pi+1}{2}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ $\frac{\pi-1}{2}$ ④ $\frac{\pi-2}{2}$ ⑤ $\frac{\pi-3}{2}$

44. [★] $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\ln(n+k) - \ln n}{n+k}$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{(\ln 2)^2}{2}$ ② $\frac{(\ln 2)^2}{3}$ ③ $\frac{(\ln 2)^2}{4}$ ④ $\frac{(\ln 2)^2}{5}$ ⑤ $\frac{(\ln 2)^2}{6}$

45. [★] 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 에 대하여 함수 $f(x)$ 는 $g(x)$ 의 역함수이고,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(x)-1}{x-2} = 3$$

을 만족시킨다. 함수 $h(x) = g\left(\frac{f(x)}{e^{x-2}}\right)$ 에 대하여 $h'(2)$ 의 값은?

[4점]

- ① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{4}{5}$ ④ 1 ⑤ $\frac{6}{5}$

46. [★] 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \int_0^x \sqrt{t^2 - f(t)} dt$$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

- ㄱ. $f(0)=0$ 이면 $f'(0)=0$ 이다.
 ㄴ. $f(x)$ 가 상수함수이면 $g(x)+g(-x)=0$ 이다.
 ㄷ. $f(x) = -\ln\left(1 + \frac{1}{100}x^4\right)$ 이면 $g(-2)g(2) > -4$ 이다.

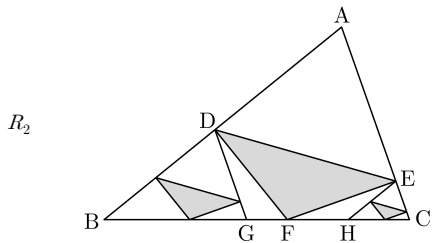
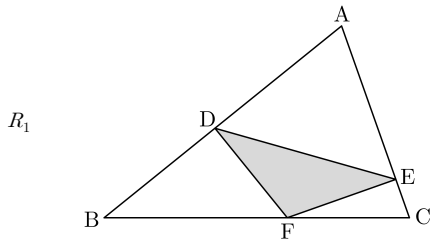
- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

47. 그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{BC} = 3$ 이고 $\overline{AC} = 2$ 인 삼각형 ABC가 있다.

세 선분 AB, AC, BC 위에 $\overline{AD} = \overline{AE}$, $\angle ADF = \angle AEF = \frac{\pi}{2}$ 가 되도록 세 점 D, E, F를 각각 잡고, 삼각형 DEF에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에서 점 D를 지나고 선분 AC와 평행한 직선이 선분 BC와 만나는 점을 G, 점 E를 지나고 선분 AB와 평행한 직선이 선분 BC와 만나는 점을 H라 하자. 두 삼각형 BDG와 HEC에 각각 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 두 개의 삼각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



⋮

⋮

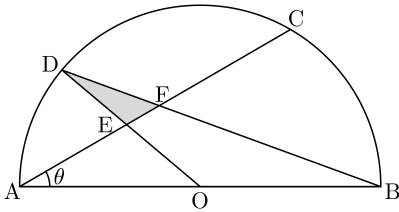
- ① $\frac{95\sqrt{2}}{167}$
- ② $\frac{96\sqrt{2}}{167}$
- ③ $\frac{97\sqrt{2}}{167}$
- ④ $\frac{98\sqrt{2}}{167}$
- ⑤ $\frac{99\sqrt{2}}{167}$

48. 곡선 $x^2 \ln y = (x-a)\cos\pi y$ 위의 점 $(a, 1)$ 에서 그은 접선의 기울기가 $\frac{2}{a}$ 일 때, $100a^2$ 의 값을 구하시오.

(단, a 는 0이 아닌 상수이다.) [3점]

49. [★] 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 호 AB 위의 한 점 C에 대하여 $\angle CAB = \theta$ 라 하고, 호 AC를 1:2로 내분하는 점을 D, 선분 OD, BD가 선분 AC랑 만나는 점을 각각 E, F라 하자. 삼각형 DEF의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때,

$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\overline{CD}^5}{S(\theta)}$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]



50. 실수 t 에 대하여 x 에 대한 두 방정식

$$\begin{aligned} (-x+t-1)e^{-x} &= 2ax, \\ (x-t-1)e^{x-1} &= a(x-2) \end{aligned}$$

의 실근의 개수가 서로 같아지도록 하는 0이 아닌 실수 a 의 최댓값을 $f(t)$, 최솟값을 $g(t)$ 라 하자. 실수 k 에 대하여 $-3 \leq t \leq 5$ 에서 t 에 대한 방정식 $f(t)g(t) = k$ 의 실근의 개수를 $h(k)$ 라 할 때, 함수 $h(k)$ 가 불연속인 k 의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (n 은 자연수)라 하자.

$n - \sum_{k=1}^n \ln |\alpha_k| = p + q \ln 2$ 일 때, $p + q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 자연수이고, $\ln 2$ 는 무리수이다.) [4점]

2021학년도 대학수학능력시험 대비
 녹색지대 N제 수학 영역
정답과 해설

수학I

정답

1	③	2	③	3	④	4	②	5	⑤
6	⑤	7	③	8	⑤	9	27	10	101
11	882	12	96	13	④	14	①	15	7
16	509	17	⑤	18	④	19	③	20	①
21	⑤	22	27	23	20	24	③	25	④
26	47	27	⑤	28	④	29	①	30	④
31	34	32	58	33	②	34	①	35	③
36	①	37	101	38	①	39	②	40	②
41	⑤	42	④	43	③	44	15	45	182
46	98	47	②	48	④	49	①	50	④
51	34	52	14	53	55	54	②	55	①
56	⑤	57	③	58	②	59	34	60	4
61	①	62	④	63	④	64	②	65	

해설

1. [출제 의도] 등비수열의 일반항을 구할 수 있는가?

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 공비를 r 이라 하면
 주어진 조건으로부터 $a_1 \neq 0, r \neq 0$ 이므로

$$\begin{aligned} a_2 + a_3 &= 2a_4 \\ \Rightarrow a_1(r+r^2) &= 2a_1r^3 \\ \Rightarrow 1+r &= 2r^2, \quad 2r^2-r-1=0 \\ \Rightarrow (2r+1)(r-1) &= 0, \quad r = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } r=1 \end{aligned}$$

$r=1$ 이면 $(a_2)^2 - (a_3)^2 = 0$ 이므로 $r = -\frac{1}{2}$ 이고,

$$(a_2)^2 - (a_3)^2 = (a_1)^2(r^2 - r^4) = \frac{3(a_1)^2}{16} = \frac{1}{12}$$

$$\therefore (a_1)^2 = \frac{4}{9}, \quad a_1 = \frac{2}{3} \quad (\because a_1 > 0)$$

$$\therefore a_5 = a_1 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{24}$$

2. [출제 의도] 로그를 포함한 부등식의 해를 구할 수 있는가?

$$\log_3(2x-3) \leq \log_{\frac{1}{3}}x + 3$$

$$\Rightarrow \log_3(2x-3) + \log_3x \leq 3$$

$$\Rightarrow \log_3x(2x-3) \leq 3, \quad x(2x-3) \leq 27$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 3x - 27 \leq 0, \quad (2x-9)(x+3) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq x \leq \frac{9}{2} \quad \dots (1)$$

한편, 로그가 정의될 조건에 의하여

$$2x-3 \geq 0, \quad x \geq 0 \text{ 이므로 } x \geq \frac{3}{2} \quad \dots (2)$$

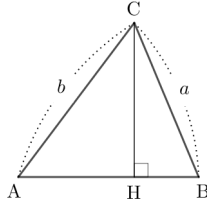
$$(1), (2) \text{에서 } \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{9}{2} \text{ 이므로}$$

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x 의 값은

2, 3, 4이고, 그 합은 9이다.

3. [출제 의도] 사인법칙을 이용하여 삼각형의 변의 길이를 구할 수 있는가?

그림과 같이 $\overline{BC} = a, \overline{AC} = b$ 라 하고,
 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{4}{5} \quad (\because A < 90^\circ)$$

$$\cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \frac{5}{13} \quad (\because B < 90^\circ)$$

이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{12a}{13} = \frac{4b}{5} \quad \dots (1)$$

한편

$$\overline{AH} = b \cos A = \frac{3b}{5}, \quad \overline{BH} = a \cos B = \frac{5a}{13}$$

에서

$$\overline{AH} + \overline{BH} = \frac{5a}{13} + \frac{3b}{5} = \overline{AB} = \frac{14}{5} \quad \dots (2)$$

$$(1), (2) \text{를 연립하여 풀면 } a = \frac{13}{5}, \quad b = 3$$

$$\therefore \overline{AC} = 3$$

(다른 풀이) 점 A를 좌표평면의 원점으로 두면

$$\overline{AB} = \frac{14}{5} \text{ 이므로 } B\left(\frac{14}{5}, 0\right) \text{ 이고}$$

$$\cos A = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin A = \frac{4}{5} \text{ 에서 } \tan A = \frac{4}{3}$$

$$\text{이므로 직선 AC의 방정식은 } y = \frac{4}{3}x \quad \dots (1)$$

$$\sin B = \frac{12}{13} \Rightarrow \cos B = \frac{5}{13} \text{ 에서 } \tan B = \frac{12}{5}$$

이고, 직선 BC가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 $\pi - B$ 이므로 직선 BC의 방정식은

$$y = -\frac{12}{5}\left(x - \frac{14}{5}\right) = -\frac{12}{5}x + \frac{168}{25} \quad \dots (2)$$

$$(1) \text{과 } (2) \text{를 연립하여 풀면 } x = \frac{9}{5}, \quad y = \frac{12}{5}$$

$$\text{이므로 점 C의 좌표는 } \left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right) \text{ 이고}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{\left(\frac{9}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2} = 3$$

4. [출제 의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 각 항을 계산할 수 있는가?

$a_1 = a$ 라 하면 수열 $\{a_n\}$ 의 귀납적 정의로부터

$$a_2 = a + 3$$

$$a_3 = \frac{a_2 - 2}{2} = \frac{a + 1}{2}$$

$$a_4 = a_3 + 3 = \frac{a + 7}{2}$$

$$a_5 = \frac{a_4 - 4}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{a - 1}{2} = \frac{a - 1}{4}$$

문제의 조건에서 $\frac{a-1}{4} = 3$ 이므로 $a = 13$

5. [출제 의도] 삼각함수의 그래프와 연속함수의 성질을 이용하여 함수의 식을 추론할 수 있는가?

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0 \text{ 이므로 사잇값 정리에 의해}$$

$f(c) = 0$ 인 c 가 열린 구간 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$\text{즉, } bc + \frac{\pi}{3} = \frac{(2n-1)\pi}{2} \quad (n \text{은 정수인 } c \text{가}$$

열린 구간 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ 에 존재해야 한다. 그런데

$$(i) \quad b=1 \text{ 인 경우 } \frac{\pi}{2} < c + \frac{\pi}{3} < \frac{3\pi}{2} \text{ 이므로}$$

$c + \frac{\pi}{3} = \frac{(2n-1)\pi}{2}$ 인 c 가 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ 에 존재하지 않는다.

(ii) $b=2$ 인 경우 (i)와 같은 방법으로

$c + \frac{\pi}{3} = \frac{(2n-1)\pi}{2}$ 인 c 가 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ 에 존재하지 않는다.

(i), (ii)와 문제의 조건으로부터 $b=3$ 이다.

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3}{2} \text{ 이므로}$$

$$a \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{a}{2} = -\frac{3}{2}, \quad a = 3$$

따라서 $a+b=6$ 이다.

6. [출제 의도] 지수함수와 직선의 성질을 이용하여 지수함수의 식을 구할 수 있는가?

점 C의 좌표는 $(a, 0)$ 이고 $\overline{AB} : \overline{BC} = 3 : 1$ 이므로

양수 k 에 대하여 점 A의 x좌표를 $a-4k$,

점 B의 x좌표를 $a-k$ 로 둘 수 있다.

즉, 점 A, B는 $y = -x + a$ 위의 점이므로

$$A(a-4k, 4k), B(a-k, k) \text{ 이다.}$$

점 A, B는 곡선 $y = 2^{-x+1}$ 위의 점이므로

$$2^{-(a-4k)+1} = 2^{4k-a+1} = 4k$$

$$2^{-(a-k)+1} = 2^{k-a+1} = k$$

양변을 변형 나누면

$$2^{(4k-a+1)-(k-a+1)} = 4, \quad 2^{3k} = 4$$

$$\therefore k = \frac{2}{3}$$

$2^{k-a+1} = k$ 에서

$$2^{\frac{5}{3}-a} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2^{-a} = \frac{2}{3} \times 2^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{3} \times 2^{-\frac{2}{3}}$$

$$\therefore 2^a = 3 \times 2^{\frac{2}{3}}$$

7. [출제 의도] 거듭제곱근의 정의를 이해하고, 실수인 거듭제곱근의 개수를 구할 수 있는가?

n 이 2 이상의 자연수일 때, 실수 a 의 실수인

n 제곱근은 아래 표와 같다.

	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
n 이 짝수	$\sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a}$	0	없다.
n 이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$

$$\log \frac{30}{n(n+1)} = \log 30 - \log n(n+1) \text{에서}$$

$$1 \leq n < 5 \text{이면 } \log \frac{30}{n(n+1)} > 0$$

$$n = 5 \text{ 이면 } \log \frac{30}{n(n+1)} = 0$$

$$n > 5 \text{ 이면 } \log \frac{30}{n(n+1)} < 0$$

이므로 위의 표로부터

$$f(1) = f(3) = 2$$

$$f(5) = 1$$

$$f(7) = f(9) = 0$$

$$f(2) = f(4) = f(6) = f(8) = f(10) = 1$$

이다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{10} f(n) = 2 \times 2 + 1 \times 6 = 10$$

8. [출제 의도] 수열의 귀납적 정의를 활용한 문제 해결 과정을 이해할 수 있는가?

(가): 문제에서 주어진 조건으로부터

$$a_{3k-2} + a_{3k-1} + a_{3k} = 3k - 2$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m a_k &= \sum_{k=1}^{3m} a_k = \sum_{k=1}^m (a_{3k-2} + a_{3k-1} + a_{3k}) \\ &= \sum_{k=1}^m (3k - 2) \\ &= \frac{m\{2 + 3(m-1)\}}{2} = \frac{m(3m-1)}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore f(m) = \frac{m(3m-1)}{2}$$

$$\text{(나): } \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{3m-1} a_k = \sum_{k=1}^{3m} a_k - a_{3m} = \frac{m(3m-1)}{2} - a_{3m}$$

이고, 수열 $\{a_{3m}\}$ 은 첫째항이 $a_3 = -1$ 이고 공차가 1인 등차수열이므로 $a_{3m} = m - 2$

$$\therefore g(m) = m - 2$$

(다): 문제의 조건을 만족하는 자연수 n 은 9로 나눈 나머지가 0 또는 4인 자연수이다.

100 이하의 자연수 중 9로 나눈 나머지가 0인 자연수의 개수는 11이고,

100 이하의 자연수 중 9로 나눈 나머지가 4인 자연수의 개수는 11이므로

문제의 조건을 만족시키는 100 이하의 자연수 n 의 개수는 22이다.

$$\therefore p = 22$$

$$\therefore f(p) + g(p) = \frac{22 \times 65}{2} + (22 - 2) = 735$$

9. [출제 의도] 지수법칙과 절대부등식을 이용하여 식의 최솟값을 구할 수 있는가?

임의의 두 양수 x, y 에 대하여 $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$

가 성립하므로 (등호는 $x=y$ 일 때 성립)

$$\begin{aligned} 10(2^{-a} + 2^{-b}) &= (2^a + 2^b)(2^{-a} + 2^{-b}) \\ &= 2 + 2^{a-b} + 2^{b-a} \geq 2 + 2\sqrt{2^{a-b} \times 2^{b-a}} = 4 \end{aligned}$$

이고, $2^{-a} + 2^{-b} \geq \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ 이다.

또한, 위의 부등식에서 등호는

$$2^{a-b} = \frac{1}{2^{a-b}} \Rightarrow 2^{a-b} = 1 \Rightarrow a = b$$

일 때 성립하므로 $2^{-a} + 2^{-b}$ 는 $2^a = 2^b = 5$ 일 때

최솟값 $\frac{2}{5}$ 를 갖는다.

$$\therefore \alpha = \frac{2}{5}, \beta = 25 \Rightarrow 5\alpha + \beta = 2 + 25 = 27$$

10. [출제 의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 삼각방정식의 해를 구하고, 수열의 합을 계산할 수 있는가?

방정식 $|\sin 2x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 은 단원구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 에서

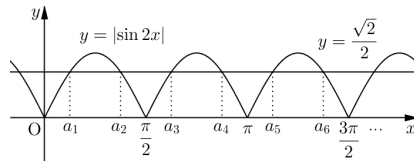
두 실근 $x = \frac{\pi}{8}, x = \frac{3\pi}{8}$ 를 갖는다.

$$\text{즉, } a_1 = \frac{\pi}{8}, a_2 = \frac{3\pi}{8} \text{이다. } \dots (1)$$

함수 $y = |\sin 2x|$ 는 주기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 주기함수이므로

아래 그림과 같이 $a_{n+2} = a_n + \frac{\pi}{2}$ 를 만족함을

알 수 있다. $\dots (2)$



(1), (2)에서 수열 $\{a_n\}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} - a_n = \frac{\pi}{4} \text{를 만족시킨다. } \dots (3)$$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째 항이 $\frac{\pi}{8}$ 이고, 공차가 $\frac{\pi}{4}$ 인 등차수열이므로

$$a_n = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}(n-1) = \frac{(2n-1)\pi}{8}$$

이다.

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\pi^2}{32} \sum_{n=1}^{25} \frac{1}{a_n a_{n+1}} &= \frac{\pi^2}{32} \sum_{n=1}^{25} \frac{1}{a_{n+1} - a_n} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) \\ &= \frac{\pi}{8} \sum_{n=1}^{25} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) \quad (\because (3)) \\ &= \frac{\pi}{8} \left\{ \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{25}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{26}} \right) \right\} \\ &= \frac{\pi}{8} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{26}} \right) = \frac{\pi}{8} \left(\frac{8}{\pi} - \frac{8}{51\pi} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{51} = \frac{50}{51} \end{aligned}$$

$$\therefore p + q = 51 + 50 = 101$$

11. [출제 의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이해하고 있는가?

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k+1} = S_n \text{이라 하면}$$

수열의 합과 일반항 사이의 관계에 의하여

$$(i) S_1 = \frac{a_1}{2} = 1^2 + 1 + 1 = 3 \Rightarrow a_1 = 6$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{n+1} &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^2 + n + 1) - \{(n-1)^2 + (n-1) + 1\} \\ &= 2n \end{aligned}$$

이므로

$$a_n = 2n(n+1) = 2n^2 + 2n \quad (n \geq 2)$$

(i), (ii)에 의하여

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{10} a_n &= a_1 + \sum_{n=2}^{10} a_n \\ &= 6 + \sum_{n=2}^{10} (2n^2 + 2n) \\ &= 6 + \sum_{n=1}^{10} (2n^2 + 2n) - 4 \\ &= 2 + \frac{10 \times 11 \times 21}{3} + 10 \times 11 = 882 \end{aligned}$$

12. [출제 의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 주어진 식의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

$\angle APB = \theta$ 라 하면 명백히 $0 < \theta < \pi$ 이므로

$\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ 인 θ 의 값은 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 일 때와

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 일 때 각각 하나씩 존재한다.

(i) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 인 경우

$$\frac{\overline{AB}}{\sin \theta} = 2 \times \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5} \text{이므로 삼각형 APB는}$$

반지름의 길이가 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ 인 원에 내접한다.

또한, CD의 중점을 M이라 하면

$$\begin{aligned} \cos \angle AMB &= \frac{(\overline{AM})^2 + (\overline{BM})^2 - (\overline{AB})^2}{2\overline{AM} \cdot \overline{BM}} \\ &= \frac{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 - 2^2}{2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

이고,

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}$$

이므로 $\theta < \angle AMB$ 이다.

즉, $0 < \theta < \angle AMB < \frac{\pi}{2}$ 이므로 삼각형 APB의

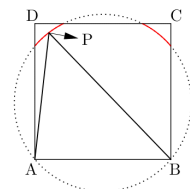
외접원의 중심은 정사각형 ABCD의 내부에 있고, 그 일부(황꼴)는 정사각형 ABCD의 외부에 있다.

즉, 점 P는 중심이 정사각형 ABCD의 내부에 있고,

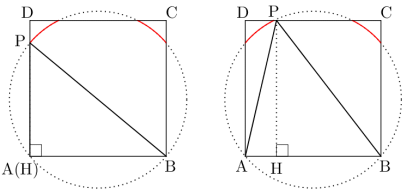
반지름이 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ 이고, 선분 AB를 현으로 갖는

원에서 정사각형 ABCD와 그 내부에 있는 부분(호)위를 움직인다.

이를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



점 P에서 선분 AB로 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 PH의 길이는 점 P가 선분 AD 위에 있을 때 가장 작고, 점 P가 선분 CD 위에 있을 때 가장 크다.



선분 PH의 길이가 최소인 경우, 점 H와 점 A는 일치하고, 선분 PB는 원의 지름과 같으므로

$$\overline{PH} = \overline{PB} \cos \theta = \frac{6\sqrt{5}}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

선분 PH의 길이가 최대인 경우 선분 PH의 길이는 정사각형 ABCD의 한 변의 길이와 같으므로

$$\overline{PH} = 2$$

$$\therefore \frac{4\sqrt{5}}{5} \leq \overline{PH} \leq 2 \dots (1)$$

$\overline{AP} = a$, $\overline{BP} = b$ 라 하면

$$\begin{aligned} \triangle PAB &= \frac{1}{2} ab \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{6} ab \\ &= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{PH} = \overline{PH} \end{aligned}$$

이므로 (1)에서

$$\frac{4\sqrt{5}}{5} \leq \frac{\sqrt{5}}{6} ab \leq 2 \Rightarrow \frac{24}{5} \leq ab \leq \frac{12\sqrt{5}}{5} \dots (2)$$

삼각형 APB에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta &= (\overline{AB})^2 \\ \Rightarrow a^2 + b^2 - \frac{4}{3} ab &= 4 \quad (\because \cos \theta = \frac{2}{3}) \\ \Rightarrow a^2 + b^2 &= 4 + \frac{4}{3} ab \end{aligned}$$

$$(2) \text{에서 } \frac{52}{5} \leq a^2 + b^2 \leq 4 + \frac{16\sqrt{5}}{5} \dots (가)$$

(ii) $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 인 경우

정사각형 ABCD 또는 그 내부의 한 점 E가 $\angle AEB = \frac{\pi}{2}$ 를 만족시키는 경우 점 E는 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 있다.

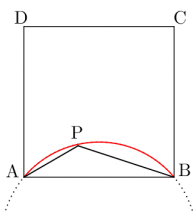
$\angle APB > \frac{\pi}{2}$ 이므로 점 P는 그 반원 내부의 점이고, 삼각형 APB의 외접원의 중심은 정사각형 ABCD의 외부에 있다.

즉, 이 경우 점 P는 (i)과 같은 방법으로 중심이 정사각형 ABCD 외부에 있고, 반지름이

$$\frac{3\sqrt{5}}{5} \text{ 이고, 선분 AB를 원으로 갖는 원에서}$$

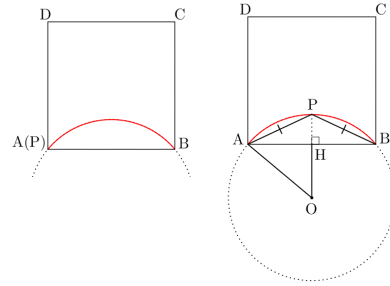
정사각형 ABCD와 그 내부에 있는 부분(호) 위를 움직인다.

이를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



점 P에서 선분 AB로 내린 수선의 발을 H라 하면

선분 PH의 길이는 점 P가 호 AB의 중점일 때 가장 크고, 점 P가 점 A 또는 점 B와 일치할 때 가장 작다.



선분 PH의 길이가 최소인 경우 $\overline{PH} = 0$ 이다.

선분 PH의 길이가 최대인 경우 $\overline{PH} = x$ 라 하고, 삼각형 APB의 외접원의 중심을 O라 하면 직각삼각형 AHO에서

$$\begin{aligned} (\overline{AO})^2 &= (\overline{AH})^2 + (\overline{OH})^2 \\ \Rightarrow \left(\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)^2 &= 1^2 + \left(\frac{3\sqrt{5}}{5} - x\right)^2 \\ \Rightarrow 5x^2 - 6\sqrt{5}x + 5 &= 0 \\ \Rightarrow x &= \frac{3\sqrt{5} \pm \sqrt{(3\sqrt{5})^2 - 25}}{5} = \frac{3\sqrt{5} \pm 2\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

$$x < \frac{3\sqrt{5}}{5} \text{ 이므로 } x = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore 0 \leq \overline{PH} \leq \frac{\sqrt{5}}{5} \dots (3)$$

(i)과 같은 방법으로

$$\triangle PAB = \frac{\sqrt{5}}{6} ab = \overline{PH}$$

이므로 (3)에서

$$0 \leq \frac{\sqrt{5}}{6} ab \leq \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow 0 \leq ab \leq \frac{6}{5} \dots (4)$$

$$\cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} = -\frac{2}{3} \text{ 이므로}$$

삼각형 APB에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta &= (\overline{AB})^2 \\ \Rightarrow a^2 + b^2 + \frac{4}{3} ab &= 4 \\ \Rightarrow a^2 + b^2 &= 4 - \frac{4}{3} ab \end{aligned}$$

$$(4) \text{에서 } \frac{12}{5} \leq a^2 + b^2 \leq 4 \dots (나)$$

(가), (나)에서 $a^2 + b^2 = (\overline{AP})^2 + (\overline{BP})^2$ 의 최솟값은 $\frac{12}{5}$, 최댓값은 $4 + \frac{16\sqrt{5}}{5}$ 이다.

$$\therefore m + M = \frac{32}{5} + \frac{16\sqrt{5}}{5}$$

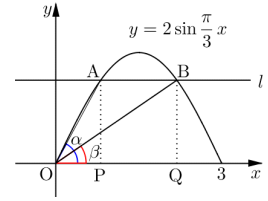
$$\therefore 10(a+b) = 10\left(\frac{32}{5} + \frac{16}{5}\right) = 96$$

13. [출제 의도] 삼각함수의 그래프와 그 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

그림과 같이 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하고,

$\angle AOP = \alpha$, $\angle BOQ = \beta$ 라 하면

$$\tan \alpha = 2, \tan \beta = \frac{2}{5}$$



$$\therefore \tan \theta = \tan(\alpha - \beta)$$

$$= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{2 - \frac{2}{5}}{1 + 2 \times \frac{2}{5}} = \frac{8}{9}$$

(다른 풀이) - 수학I

함수 $y = 2 \sin \frac{\pi}{3} x$ 는 직선 $x = \frac{3}{2}$ 에 대하여

대칭이고, $\overline{AB} = 2$ 이므로

점 A의 x좌표는 $\frac{1}{2}$ 이고, 점 B의 x좌표는 $\frac{5}{2}$ 이다.

점 A는 함수 $y = 2 \sin \frac{\pi}{3} x$ 의 그래프 위의 점이므로

$$A\left(\frac{1}{2}, 1\right), B\left(\frac{5}{2}, 1\right) \text{ 이다.}$$

따라서

$$\overline{OA} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\overline{OB} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

따라서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{29}}{2}\right)^2 - 2^2}{2 \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{\sqrt{29}}{2}} = \frac{9}{\sqrt{145}}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{9}{\sqrt{145}}\right)^2} = \frac{8}{\sqrt{145}}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{8}{9}$$

14. [출제 의도] 로그함수의 그래프의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

점 A의 좌표는 $(a, \log_2 a)$ 이고 조건 (가), (나)에 의하여 점 B의 좌표는 $(a+1, \log_4(a+1))$ 이다.

정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 1이므로

$$\log_2 a - \log_4(a+1) = 1$$

$$\log_4 a^2 = \log_4 4(a+1)$$

$$a^2 = 4(a+1), a^2 - 4a - 4 = 0$$

$$\therefore (a-2)^2 = 8$$

$$a > 0 \text{ 이므로 } a-2 = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore f(a-2) + g(a-2)$$

$$= \log_2 2\sqrt{2} + \log_4 2\sqrt{2}$$

$$= \log_2 2^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

15. [출제 의도] 등차수열의 일반항과 합을 계산할 수 있는가?

$a_7 \geq 0$ 이면 $a_3 + a_7 = 2a_5 > 0$ 이어야 하므로

문제의 조건에 어긋난다.

따라서 $a_7 < 0$ 이고, 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라

하면

$$a_3 + |a_7| = a_3 - a_7 = -4d = 8$$

$$\therefore d = -2$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^{10} \{a_1 - 2(n-1)\} \\ &= \sum_{k=1}^{10} (-2n + a_1 + 2) \\ &= -2 \times \frac{10 \times 11}{2} + 10(a_1 + 2) \\ &= 10a_1 - 90 = -15 \end{aligned}$$

$$\therefore a_1 = \frac{15}{2}$$

$$a_3 = a_1 + 2d = \frac{15}{2} - 4 = \frac{7}{2}$$

이므로

$$\therefore a_2 + a_4 = 2a_3 = 7$$

16. [출제 의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 수열의 일반항을 구할 수 있는가?

문제에서 주어진 등식으로부터

$$S_1 = a_1 = \frac{1}{2} \text{ 이고,}$$

$$\begin{aligned} a_{2n-1} &= S_{2n-1} - S_{2n-2} \\ &= \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n-1)} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

$$a_2 = S_2 - a_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1 \text{ 이고,}$$

$$\begin{aligned} a_{2n} &= S_{2n} - S_{2n-1} \\ &= -\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n(n+1)} \\ &= -\frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n} \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

따라서

$$(-1)^2 a_1 + (-1)^3 a_2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} (-1)^{2n} a_{2n-1} + (-1)^{2n+1} a_{2n} \\ &= a_{2n-1} - a_{2n} \\ &= \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) - \left(-\frac{2}{n+1} - \frac{2}{n}\right) \\ &= \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + 3\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{20} (-1)^{n+1} a_n \\ &= \sum_{n=1}^{10} \{a_{2n-1} - a_{2n}\} \\ &= \frac{3}{2} + \sum_{n=2}^{10} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + 3 \sum_{n=2}^{10} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{3}{2} + \left(1 - \frac{1}{10}\right) + 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{11}\right) \\ &= \frac{3}{2} + \frac{9}{10} + \frac{27}{22} = \frac{399}{110} \end{aligned}$$

$$\therefore p + q = 110 + 399 = 509$$

17. [출제 의도] 등차수열과 등비수열의 성질을 이해하고 있는가?

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

조건 (가)에서

$$b_2^2 = b_1 b_5$$

$$\Rightarrow (a_2 + a_4)^2 = (a_1 + a_2)(a_5 + a_{10})$$

$$\Rightarrow 4(a+2d)^2 = (2a+d)(2a+13d)$$

$$\Rightarrow d^2 - 4ad = 0, \quad d(d-4a) = 0$$

$$d \neq 0 \text{ 이므로 } 4a = d \dots \textcircled{1}$$

$$a_3 + b_3 = 2a_3 + a_6 = 3a + 9d = \frac{13}{2}$$

$$\text{에서 } a + 3d = \frac{13}{6} \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } a = \frac{1}{6}, \quad d = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{12} a_k = \frac{12 \left(2 \times \frac{1}{6} + 11 \times \frac{2}{3} \right)}{2} = 46$$

18. [출제 의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

함수 $f(x)$ 의 그래프가 $\left(\frac{\pi}{6}, 1\right)$ 을 지나므로

$$\cos^2 \frac{\pi}{6} + a \sin \frac{\pi}{6} = \frac{3}{4} + \frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos^2 x + \frac{1}{2} \sin x \\ &= -\sin^2 x + \frac{1}{2} \sin x + 1 \\ &= -\left(\sin x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{17}{16} \end{aligned}$$

이고 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로 이차함수의 성질에

의하여 함수 $f(x)$ 는 $\sin x = \frac{1}{4}$ 일 때 최댓값 $\frac{17}{16}$ 을

갖고, $\sin x = -1$ 일 때 최솟값 $-\frac{1}{2}$ 을 갖는다.

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 합은

$$\frac{17}{16} - \frac{1}{2} = \frac{9}{16}$$

19. [출제 의도] \sum 의 성질을 이용하여 여러 가지 수열의 합을 계산할 수 있는가?

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) \\ &= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_{n+1} - a_n) \\ &= a_{n+1} - a_1 \end{aligned}$$

이므로

$$a_{n+1} = 2^{n-1} + n + 1 + a_1 \quad (n \geq 1)$$

따라서

$$a_4 = 2^{3-1} + 3 + 1 + a_1 = 8 + a_1$$

$$a_5 = 2^{4-1} + 4 + 1 + a_1 = 13 + a_1$$

$$\Rightarrow a_4 + a_5 = 21 + 2a_1 = 7$$

$$\therefore a_1 = -7$$

$$\therefore a_{10} = 2^{9-1} + 9 + 1 + a_1 = 256 + 10 - 7 = 259$$

20. [출제 의도] 수열의 귀납적 정의를 활용한 문제 해결 과정을 이해할 수 있는가?

(가): $a_{2n+1} - a_{2n} = 1$ 이므로 (*)에서

$2n = 2^{m+1}$ 일 때에만 $a_{2n+1} = 2$ 이다.

즉 $2n+1 = 2^m + 1$ (m 은 음이 아닌 정수)이어야

한다. 따라서 $a_k = 2$ 일 필요충분조건은

$$k = 2^{m+1} + 1 \quad (m \text{은 음이 아닌 정수})$$

이다. $\therefore f(m) = 2^{m+1} + 1$

(나): (가)에서 $k = 2^{m+1} + 1 \leq 100$ 이므로 $0 \leq m \leq 5$ 이다. 따라서 $a_k = 2$ 인 자연수 k 의 개수는 6이다. $\therefore a = 6$

(다): $n = 2^{m+1} + 1$ 인 자연수 n 은 $n = 3, 5, 9, 17, 33, 65$ 이다.

$$a_3 = 2 \text{에서 } a_6 = a_{12} = a_{24} = a_{48} = a_{96} = 2$$

$$a_5 = 2 \text{에서 } a_{10} = a_{20} = a_{40} = a_{80} = 2$$

$$a_9 = 2 \text{에서 } a_{18} = a_{36} = a_{72} = 2$$

$$a_{17} = 2 \text{에서 } a_{34} = a_{68} = 2$$

$$a_{33} = 2 \text{에서 } a_{66} = 2$$

이상에서 $a_k = 2$ 인 자연수 k 의 개수는

$$5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 \text{이다. } \therefore b = 15$$

$$\therefore f(a+1) + b = (2^{7+1} + 1) + 15 = 272$$

21. [출제 의도] 등차수열의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$d < 0$ 인 경우

$$a_5 > a_6 > a_7 \text{이면 } a_5 + a_6 > a_7 \text{이다.}$$

조건 (가)에서 a_7 과 $a_5 + a_6$ 은 양수이므로

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = 5(a_5 + a_6) > a_7 \text{이다.}$$

이는 조건 (가)를 만족시키지 않으므로

$d > 0$ 이어야 한다. 또한

$$0 < \sum_{k=1}^{10} a_k < a_7$$

$$\Leftrightarrow 0 < 5(a_5 + a_6) < a_5 + 2d$$

$$\Leftrightarrow 0 < 10a_5 + 5d < a_5 + 2d$$

$$\Leftrightarrow -\frac{d}{2} < a_5 < -\frac{d}{3} \dots (*)$$

이므로 $a_5 < 0$ 이다.

$d > 0$ 이므로 $a_4 < 0$ 이다.

이때 $a_6 < 0$ 이면

$$(|a_5| - |a_4|)(|a_6| - |a_5|)$$

$$= (a_4 - a_5)(a_5 - a_6) = d^2 > 0$$

이므로 조건 (나)를 만족하지 않는다.

따라서 $a_6 > 0$ 이고, 조건 (나)에서

$$(|a_5| - |a_4|)(|a_6| - |a_5|)$$

$$= (a_4 - a_5)(a_6 + a_5)$$

$$= (2a_5 + d)(-d) = -16$$

$$\Rightarrow d(2a_5 + d) = 16$$

$d > 0$ 이므로 $2a_5 + d > 0$ 이고, d 와 $2a_5 + d$ 는 모두 정수이므로 가능한 경우는 아래와 같다.

$$d = 1, \quad 2a_5 + d = 16 \Rightarrow a_5 = \frac{15}{2}, \quad d = 1$$

$$d = 2, \quad 2a_5 + d = 8 \Rightarrow a_5 = 3, \quad d = 2$$

$$d = 4, \quad 2a_5 + d = 4 \Rightarrow a_5 = 0, \quad d = 4$$

$$d = 8, \quad 2a_5 + d = 2 \Rightarrow a_5 = -3, \quad d = 8$$

$$d = 16, \quad 2a_5 + d = 1 \Rightarrow a_5 = -\frac{15}{2}, \quad d = 16$$

문제의 조건과 (*)을 모두 만족하는 경우는

$$a_5 = -3, \quad d = 8 \text{인 경우뿐이다.}$$

$$\therefore a_{10} = -3 + 5d = 37$$

22. [출제 의도] 지수함수와 로그함수의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

두 함수 $y = \log_a(x+1) + \sqrt{3}$, $y = a^{x-\sqrt{3}} - 1$ 은 서로 역함수 관계에 있으므로

점 A의 좌표를 (p, q) 라 하면 점 A는 $y = -x + k$ 위의 점이므로 $q = -p + k \Rightarrow p = -q + k$
 즉, 점 (q, p) 또한 직선 $y = -x + k$ 위의 점이므로 역함수의 그래프의 성질에 의하여 점 B의 좌표는 (q, p) 이다. ($p < q$)

문제의 조건에서

$$\overline{OA} = \overline{AB} = 2\sqrt{2} \text{ 이므로}$$

$$\overline{OA} = \sqrt{p^2 + q^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{2(p-q)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow p^2 + q^2 = 8, (p-q)^2 = 4$$

이 둘을 연립하여 풀면

$$p = \sqrt{3} - 1, q = \sqrt{3} + 1$$

즉, 점 $(\sqrt{3}-1, \sqrt{3}+1)$ 은

곡선 $y = \log_a(x+1) + \sqrt{3}$ 위의 점이므로

$$\log_a \sqrt{3} + \sqrt{3} = \sqrt{3} + 1 \Rightarrow a = \sqrt{3}$$

또한, 점 $(\sqrt{3}-1, \sqrt{3}+1)$ 은 직선 $y = -x + k$ 위의 점이므로

$$\sqrt{3} + 1 = -(\sqrt{3}-1) + k \Rightarrow k = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore (a+k)^2 = (3\sqrt{3})^2 = 27$$

23. [출제 의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

피타고라스의 정리에 의하여 $\overline{AC} = 5$ 이고,

$$\sin \angle ADC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle ADC} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

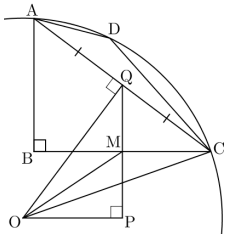
이므로 삼각형 ACD의 외접원의 반지름을 R 이라 하면 사인법칙에 의하여

$$2R = \frac{\overline{AC}}{\sin \angle ADC} \Rightarrow R = \frac{5\sqrt{13}}{4}$$

이고, $\cos \angle ADC < 0$ 이므로 세 점 A, C, D는

반지름의 길이가 $\frac{5\sqrt{13}}{4}$ 인 원 위에 있고, 점 D는

짧은 호 AC 위의 점이다. ... ①



삼각형 ACD의 외접원의 중심을 O, 선분 AC의 중점을 Q라 하자.

그림과 같이 점 O를 지나고 선분 BC와 평행한 직선이 점 Q를 지나고 선분 AB와 평행한 직선과 만나는 점을 P, 선분 PQ가 선분 BC와 만나는 점을 M이라 하자.

$$\text{①에서 } \overline{OQ} = \sqrt{\overline{OC}^2 - \overline{CQ}^2} = \frac{15}{4}$$

이고, $\triangle ABC \sim \triangle OPQ$ 이므로

$$\overline{OP} = \frac{3}{5}\overline{OQ} = \frac{9}{4}, \overline{PQ} = \frac{4}{5}\overline{OQ} = 3$$

점 M은 선분 BC의 중점이므로

$$\overline{MQ} = \frac{3}{2} \text{ 이고, } \overline{PM} = \overline{PQ} - \overline{MQ} = \frac{3}{2}$$

$$\overline{OM} = \sqrt{\overline{OP}^2 + \overline{PM}^2} = \frac{3\sqrt{13}}{4}$$

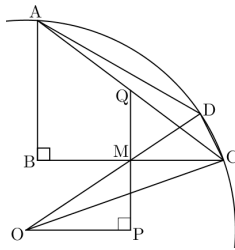
평면도형의 성질로부터

$$\overline{OM} + \overline{MD} \geq \overline{OD}$$

$$\Rightarrow \overline{MD} \geq \overline{OD} - \overline{OM}$$

$$= \frac{5\sqrt{13}}{4} - \frac{3\sqrt{13}}{4} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\therefore m = \frac{\sqrt{13}}{2} \dots \text{②}$$



위 그림과 같이 \overline{MD} 가 최소가 되는 경우는 세 점 O, M, D가 한 직선 위에 있는 경우이다. 이때

$$\cos \angle POM = \cos \angle CMD = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

이므로 삼각형 CMD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{CD}^2 &= \overline{CM}^2 + \overline{DM}^2 - 2 \cdot \overline{CM} \cdot \overline{DM} \cdot \cos \angle CMD \\ &= 2^2 + \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{13}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} \\ &= 4 + \frac{13}{4} - 6 = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \overline{CD} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

삼각형 ACD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{CD}}{\sin \angle CAD} = 2R = \frac{5\sqrt{13}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin \angle CAD = \frac{1}{\sqrt{65}} = k \dots \text{③}$$

②, ③에서

$$\therefore \left(\frac{1}{mk}\right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{13}} \cdot \sqrt{65}\right)^2 = 20$$

24. [출제 의도] 거듭제곱근과 로그의 정의를 이해하고 있는가?

거듭제곱근의 정의에 의하여

$$a = 4^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}, \frac{1}{b} = 2^{\frac{1}{4}} \Rightarrow b = 2^{-\frac{1}{4}}$$

따라서

$$b = 2^{-\frac{1}{4}} = \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{8}}$$

이므로 로그의 정의에 의하여

$$\log_a b = -\frac{3}{8} \text{ 이다.}$$

25. [출제 의도] 로그와 삼각함수를 포함한 방정식의 해를 구할 수 있는가?

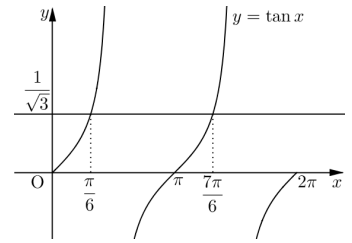
주어진 방정식은

$$\log_3(\tan x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

아래 그림과 같이 탄젠트함수의 그래프를 그려서

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 위의 방정식을 풀면

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{7\pi}{6} \text{ 이다.}$$



따라서 주어진 방정식의 모든 실근의 합은

$$\frac{\pi}{6} + \frac{7\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$$

26. [출제 의도] 등차수열의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

$n = 8$ 일 때에는 주어진 부등식이 항상 성립하므로 주어진 부등식이 모든 자연수 n 에 대하여 성립하려면

$$n < 8 \text{ 일 때 } S_n \leq 30$$

$$n > 8 \text{ 일 때 } S_n \geq 30 \text{ 이어야 한다.}$$

따라서 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 $d > 0$ 이고,

$$S_7 \leq 30, S_9 \geq 30 \text{ 이어야 한다.}$$

$$S_7 = \frac{7(a_1 + a_7)}{2} = 7a_4 \leq 30 \Rightarrow a_4 \leq \frac{30}{7}$$

$$S_9 = \frac{9(a_1 + a_9)}{2} = 9a_5 \geq 30 \Rightarrow a_5 \geq \frac{10}{3}$$

이므로

$$a_4 = a_1 + 3d = 1 + 3d \leq \frac{30}{7} \Rightarrow d \leq \frac{23}{21}$$

$$a_5 = a_1 + 4d = 1 + 4d \geq \frac{10}{3} \Rightarrow d \geq \frac{7}{12}$$

$$\therefore \frac{7}{12} \leq d \leq \frac{23}{21}$$

$$\therefore 28(M+m) = 28\left(\frac{7}{12} + \frac{23}{21}\right) = 47$$

27. [출제 의도] 지수함수의 최대, 최소를 구할 수 있는가?

$$f(x) = a \times 2^{1-x} + b$$

$$= 2a \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + b$$

이고 $a > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 감소한다.

따라서 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서

$$\text{함수 } f(x) \text{의 최댓값은 } f(0) = 2a + b = 2$$

$$\text{함수 } f(x) \text{의 최솟값은 } f(2) = \frac{1}{2}a + b = -1$$

위 두 등식을 연립하여 풀면 $a = 2, b = -2$

$$\therefore f(1) = 4 \times \frac{1}{2} - 2 = 0$$

28. [출제 의도] 등차수열의 성질을 이해하고, 그 합을 구할 수 있는가?

수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$\sum_{k=1}^{11} (-1)^k a_k$$

$$= (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + \dots + (a_{10} - a_9) - a_{11}$$

$$= -a_{11} + 5d = -a_6$$

이므로 문제의 조건에서 $a_4 + a_6 = 0$

등차중항의 성질에서 $a_5 = 0$

한편

$$\sum_{k=1}^{12} a_k = \frac{12 \times (a_1 + a_{12})}{2} = 6(a_5 + a_8)$$

이고, $a_5 = 0$ 이므로 문제의 조건에서

$$6a_8 = a_8 + 5 \Rightarrow a_8 = 1, 3d = 1$$

$$\therefore a_{20} = a_5 + 15d = 5$$

29. [출제 의도] 삼각함수의 그래프를 이해하고, 삼각함수를 포함한 방정식을 해결할 수 있는가?

곡선 $y = f(x)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동하고,

x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼

평행이동하여 얻은 곡선의 식을 $y = g(x)$ 라 하면

$$g(x) = -a \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - b - 1 \\ = a \cos x - b - 1$$

문제의 조건에서 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = g\left(\frac{\pi}{4}\right) = c$ 이므로

$$\frac{\sqrt{2}}{2}a + b = -\frac{\sqrt{2}}{2}a - b - 1 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

$$\text{즉, } \frac{\sqrt{2}}{2}a - \frac{1}{2} = c \dots \textcircled{1}$$

함수 $f(x)$ 의 최댓값이 $2\sqrt{2}c$ 이므로

(1) $a < 0$ 인 경우

$$-a - \frac{1}{2} = 2\sqrt{2}c \dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a = \frac{2\sqrt{2}-1}{6} > 0 \text{이므로 가정에 모순이다.}$$

(2) $a > 0$ 인 경우

$$a - \frac{1}{2} = 2\sqrt{2}c \dots \textcircled{3}$$

①, ③을 연립하여 풀면

$$a = \frac{2\sqrt{2}-1}{2}, c = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

30. [출제 의도] 귀납적으로 정의된 수열의 항을 계산하고, 그 합을 구할 수 있는가?

주어진 방정식으로부터 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = n \text{ 또는 } a_{n+1} = a_n - 1$$

이고 $a_{10} = 5$ 이므로 $a_9 = 6, a_8 = 7 \dots \textcircled{1}$

한편, $\sum_{k=1}^7 a_k$ 의 값이 최대가 되는 경우는

6 이하의 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+1} = n$ 인 경우이고,

$\sum_{k=1}^7 a_k$ 의 값이 최소가 되는 경우는

6 이하의 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+1} = a_n - 1$ 인 경우이다.

따라서 $a_1 = 1$ 이므로 $\sum_{k=1}^7 a_k$ 의 값의 최댓값과

최솟값은 각각

$$1 + (1+2+3+4+5+6) = 22,$$

$$1 + (0-1-2-3-4-5) = -14 \dots \textcircled{2}$$

이다. 같은 방법으로

$\sum_{k=11}^{15} a_k$ 의 값이 최대가 되는 경우는

10 이상의 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+1} = n$ 인 경우이고,

$\sum_{k=11}^{15} a_k$ 의 값이 최소가 되는 경우는

10 이하의 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = a_n - 1 \text{인 경우이다.}$$

따라서 $a_{10} = 5$ 이므로 $\sum_{k=11}^{15} a_k$ 의 값의 최댓값과

최솟값은 각각

$$10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 60$$

$$4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 10 \dots \textcircled{3}$$

①, ②, ③에서

$$M = 22 + (7+6+5) + 60 = 100$$

$$m = -14 + (7+6+5) + 10 = 14$$

$$\therefore M + m = 100 + 14 = 114$$

31. [출제 의도] 로그함수를 포함한 방정식을 해결할 수 있는가?

$$\log_2 \frac{g(x)}{f(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{g(x)}{f(x)} \geq 1$$

에서 다음과 같은 경우로 나누어 생각한다.

(1) $f(x) > 0$ 인 경우

주어진 부등식은 $g(x) \geq f(x) > 0$ 과 같고,

문제의 그림에서 위 부등식을 만족시키는 x 의 값의 범위는 $2 < x \leq 4 \dots \textcircled{1}$

(2) $f(x) < 0$ 인 경우

주어진 부등식은 $g(x) \leq f(x) < 0$ 과 같고

문제의 그림에서 위 부등식을 만족시키는 x 의 값의 범위는 $12 < x \leq 14 \dots \textcircled{2}$

①, ②에서 주어진 부등식을 만족시키는 모든 자연수 x 의 값의 합은

$$3 + 4 + 13 + 14 = 34$$

32. [출제 의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

$\overline{AB} = a, \overline{BC} = b$ 라 하면 조건 (가)에 의하여

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin \angle ABC = \frac{1}{3}b^2$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}ab \sin\left(\angle ABE - \frac{\pi}{2}\right) = b^2$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}a(-\cos \angle ABE) = b$$

$$\Rightarrow \frac{3\sqrt{5}}{5}a = b \dots \textcircled{1}$$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\overline{AC} = 2\sqrt{10} \sin \angle ABC = 4\sqrt{2} \text{이고,}$$

코사인법칙과 ①에서

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \cos \angle ABC$$

$$\Rightarrow (4\sqrt{2})^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\Rightarrow 32 = a^2 + \left(\frac{3\sqrt{5}}{5}a\right)^2 - 2a \times \frac{3\sqrt{5}}{5}a \times \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\Rightarrow a^2 + \frac{9}{5}a^2 - \frac{6}{5}a^2 = \frac{8}{5}a^2 = 32$$

$$\therefore a = 2\sqrt{5}, b = 6$$

사인법칙에 의하여

$$\sin \angle ACB = \frac{\overline{AB}}{2\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin \angle ACD = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \angle ACB\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos \angle ACD = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \angle ACB\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AD}^2 = (4\sqrt{2})^2 + 6^2 - 2 \times 4\sqrt{2} \times 6 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= 32 + 36 + 48 = 116$$

$$\Rightarrow \overline{AD} = 2\sqrt{29}$$

이고, 삼각형 ACD에서 사인법칙에 의하여

$$2R = \frac{\overline{AD}}{\sin \angle ACD} = 2\sqrt{58}$$

$$\therefore R^2 = 58$$

33. [출제 의도] 등비수열의 성질을 이용하여 등비수열의 일반항을 구할 수 있는가?

$$a_2a_4 + a_3a_5 = (a_3)^2 + a_3a_5 = a_3(a_3 + a_5)$$

에서 수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 이라 하면

$$\frac{a_3(a_3 + a_5)}{a_1 + a_3} = a_3 \cdot r^2 = a_5 = 4$$

$$a_5 = 4 \text{이므로}$$

$$a_3(a_3 + 4) = 12$$

$$\Rightarrow (a_3)^2 + 4a_3 - 12 = 0, (a_3 + 6)(a_3 - 2) = 0$$

$a_5 > 0$ 이므로 $a_3 > 0$ 이어야 한다.

$$\therefore a_3 = 2$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{a_5}{a_3} = 2$$

$$\therefore a_7 = a_5 \cdot r^2 = 8$$

34. [출제 의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수의 값을 계산할 수 있는가?

$$\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$= \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = 4$$

$$\text{이므로 } \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

한편 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a = \sin \theta + \cos \theta, b = \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = (\sin \theta + \cos \theta)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \frac{1}{16}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = \frac{25}{16}$$

35. [출제 의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

$$\sin(A+B) = \sin(\pi - C) = \sin C = \frac{3}{5}$$

$$\cos(B+C) = \cos(\pi - A) = -\cos A = \frac{3}{5}$$

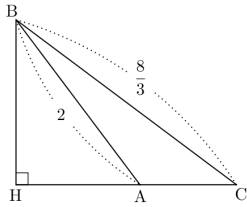
$$\text{이므로 } \cos A = -\frac{3}{5} \text{이고}$$

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{4}{5} \text{이다.}$$

$\overline{AB} = 2$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin C} = \frac{\overline{BC}}{\sin A} \Rightarrow \overline{BC} = \frac{4}{3} \times 2 = \frac{8}{3}$$

$A > 90^\circ$ 이므로 점 B를 직선 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 ABC는 다음과 같다.



$$\overline{AH} = \overline{AB} \cos(\pi - A) = 2 \times \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$$

$$\overline{CH} = \overline{BC} \cos C = \frac{8}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{32}{15}$$

$$\therefore \overline{AC} = \overline{CH} - \overline{AH} = \frac{32}{15} - \frac{6}{5} = \frac{14}{15}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin A$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{14}{15} \times \frac{4}{5} = \frac{56}{75}$$

36. [출제 의도] 지수함수의 최대, 최소를 구할 수 있는가?

$$f(1) = f(2)$$

$$\Rightarrow 4 - 2^{a+1} + b = 16 - 2^{a+2} + b$$

$$\Rightarrow 2^{a+2} - 2^{a+1} = 12, 2^{a+1} = 12$$

$$\therefore 2^a = 6$$

$$f(x) = 2^{2x} - 6 \times 2^x + b \\ = (2^x - 3)^2 + b - 9$$

이므로 함수 $f(x)$ 는 $2^x = 3$ 일 때 최솟값 $b - 9$ 를 갖는다.

$$\text{따라서 } b - 9 = 4, b = 13$$

$$\therefore f(x) = (2^x - 3)^2 + 4$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(3) = 29$ 이다.

37. [출제 의도] 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는가?

이차방정식 $x^2 - 4nx + n(4n^2 - 1)a_n = 0$ 이 중근 $x = b_n$ 을 가지므로

$$x^2 - 4nx + n(4n^2 - 1)a_n = (x - b_n)^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 4nx + n(4n^2 - 1)a_n = x^2 - 2b_nx + (b_n)^2$$

위 등식은 항등식이므로

$$-4n = -2b_n \Rightarrow b_n = 2n$$

$$n(4n^2 - 1)a_n = (b_n)^2 = 4n^2 \Rightarrow a_n = \frac{4n}{4n^2 - 1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{25} \frac{a_n}{b_n} = \sum_{n=1}^{25} \frac{2}{4n^2 - 1}$$

$$= \sum_{n=1}^{25} \frac{2}{(2n+1)(2n-1)}$$

$$= \sum_{n=1}^{25} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{49} - \frac{1}{51} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{51} = \frac{50}{51}$$

$$\therefore p + q = 101$$

38. [출제 의도] 등비수열의 성질을 이해하고 있는가?

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 이라 하면

$$\frac{a_3}{a_2} + \frac{a_5}{a_4} = r + r = 6 \Rightarrow r = 3$$

$$\therefore \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_5}{a_3} = r + r^2 = 12$$

39. [출제 의도] 로그의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = \log_2 \sqrt{a^3 b}$$

$$\alpha \beta = \log_4 ab = \log_2 \sqrt{ab}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha \beta} = \frac{\log_2 \sqrt{a^3 b}}{\log_2 \sqrt{ab}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2 \log_2 \sqrt{a^3 b} = \log_2 \sqrt{ab}$$

$$\Rightarrow a^3 b = \sqrt{ab} \Rightarrow a^6 b^2 = ab, b = a^{-5}$$

$$\therefore \log_a b = -5$$

40. [출제 의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는가?

모든 실수 x 에 대하여 $-1 \leq \sin(n+1)\pi x \leq 1$

이므로 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $\frac{1}{n}$ 이다.

$$\therefore a_n = \frac{1}{n}$$

사인함수의 주기는 2π 이므로 함수 $f(x)$ 의 주기는

$$\frac{2\pi}{|(n+1)\pi|} = \frac{2}{n+1}$$

$$\therefore b_n = \frac{2}{n+1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{15} a_n b_n = \sum_{n=1}^{15} \frac{2}{n(n+1)}$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{15} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= 2 \left\{ \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{15} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{16} \right) \right\}$$

$$= 2 \times \left(1 - \frac{1}{16} \right) = \frac{15}{8}$$

41. [출제 의도] 수학적 귀납법을 이용한 명제의 증명 과정을 이해할 수 있는가?

(가): $n = 1$ 일 때, (*)의 좌변의 값은

$$\sqrt{\frac{2}{1}} = \sqrt{2} \text{이다. } \Rightarrow p = \sqrt{2}$$

(나), (다): 증명 과정에서

$$(m+1 + \sqrt{m+1}) - (m + \sqrt{m} + \sqrt{\frac{m+2}{m+1}})$$

$$= (\sqrt{m+1} - \sqrt{m}) + \left(1 - \sqrt{\frac{m+2}{m+1}} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{m} + \sqrt{m+1}} + \frac{\sqrt{m+1} - \sqrt{m+2}}{\sqrt{m+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{m} + \sqrt{m+1}} - \frac{\sqrt{m+2} - \sqrt{m+1}}{\sqrt{m+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{m} + \sqrt{m+1}} - \frac{1}{\sqrt{m+1}(\sqrt{m+1} + \sqrt{m+2})}$$

이다.

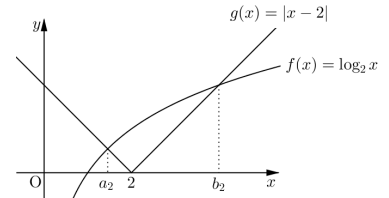
$$\Rightarrow f(m) = \sqrt{m+1} + \sqrt{m+2},$$

$$g(m) = \sqrt{m+1} - \sqrt{m}$$

$$\therefore p^2 \times \{f(9) + g(10)\}^2 \\ = (\sqrt{2})^2 \times \{(\sqrt{10} + \sqrt{11}) + (\sqrt{11} - \sqrt{10})\}^2 \\ = 2 \times (2\sqrt{11})^2 = 88$$

42. [출제 의도] 로그함수의 그래프와 그 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

(ㄱ) $f(x) = \log_2 x, g(x) = |x - 2|$ 라 하면 아래 그림에서



$$f(\sqrt{2}) = \frac{1}{2} < 2 - \sqrt{2} = g(\sqrt{2}),$$

$$f(2) = 1 > g(2) = 0$$

이므로 $\sqrt{2} < a_2 < 2$ 이다. (참)

(ㄴ) 함수 $f(x)$ 는 증가함수이므로 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n < b_n$ 이다. 따라서 $\log_2 a_n < \log_2 b_n$ 이고,

$$|a_n - n| = n - a_n < b_n - n = |b_n - n|$$

이다. 따라서 $a_n + b_n > 2n$ 이다. (거짓)

(ㄷ) $\log_2 a_n = |a_n - n| = n - a_n$ 에서

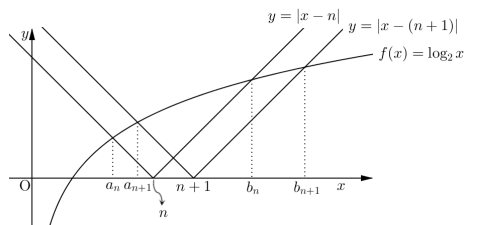
$$\log_2 a_{n+1} = n + 1 - a_{n+1} \text{이므로}$$

$$\log_2 a_{n+1} - \log_2 a_n = a_n - a_{n+1} + 1$$

$$a_{n+1} > a_n > 0 \text{이므로}$$

$$\log_2 a_{n+1} - \log_2 a_n > 0$$

$$\Rightarrow a_n - a_{n+1} + 1 > 0, a_{n+1} - a_n < 1$$



비슷한 방법으로

$$\log_2 b_n = |b_n - n| = b_n - n \text{에서}$$

$$\log_2 b_{n+1} = b_{n+1} - (n+1) \text{이므로}$$

$$\log_2 b_{n+1} - \log_2 b_n = b_{n+1} - b_n - 1$$

$$b_{n+1} > b_n > 0 \text{이므로}$$

$$\log_2 b_{n+1} - \log_2 b_n > 0$$

$$\Rightarrow b_{n+1} - b_n - 1 > 0, b_{n+1} - b_n > 1$$

$$\therefore a_{n+1} - a_n < 1 < b_{n+1} - b_n \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

43. [출제 의도] 귀납적으로 정의된 수열의 일반항과 그 합을 계산할 수 있는가?

주어진 두 수열의 귀납적 정의에서

$$a_{n+1} = -b_n + n + 1 \dots \textcircled{1}$$

$$a_n - n = b_{n+1} \dots \textcircled{2}$$

①에서 $a_{n+2} = -b_{n+1} + n + 2$ 이므로 ②에서

$$a_n + a_{n+2} = 2n + 2$$

위 등식의 양변에 $n = 3, 4$ 를 대입하면

$$a_3 + a_5 = 8, a_4 + a_6 = 10$$

$$\Rightarrow a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 18$$

위 등식의 양변에 $n = 7, 8$ 을 대입하고 변변 더하면

$$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 34$$

위 등식의 양변에 $n = 11, 12$ 를 대입하고 변변 더하면

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} = 50$$

...

위 등식의 양변에 $n = 27, 28$ 을 대입하고 변변 더하면

$$a_{27} + a_{28} + a_{29} + a_{30} = 114$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{30} a_n = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4 + a_5 + a_6) + \dots + (a_{27} + a_{28} + a_{29} + a_{30})$$

$$= (a_1 + a_2) + \sum_{n=1}^7 (16n + 2)$$

$$= a + 1 + 448 + 14 \quad (\because a_2 = -b_1 + 2 = 1)$$

$$= a + 463 = 467$$

$$\therefore a = 4$$

①, ②의 양변을 변변 더하면

$$a_{n+1} + a_n - n = b_{n+1} - b_n + n + 1$$

$$\Rightarrow a_n + a_{n+1} = b_{n+1} - b_n + 2n + 1$$

양변에 $n = 1$ 부터 $n = 29$ 까지 대입하여 더하면

$$\sum_{n=1}^{29} (a_n + a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{29} (b_{n+1} - b_n) + \sum_{n=1}^{29} (2n + 1)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{29} a_n + \sum_{n=1}^{29} a_{n+1} = b_{30} - b_1 + 2 \sum_{n=1}^{29} n + 29$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{30} a_n - a_{30} + \sum_{n=1}^{30} a_n - a_1 = b_{30} + 28 + 870$$

$$\therefore a_{30} + b_{30} = 467 \times 2 - 870 - 28 - a = 32$$

(다른 풀이-김기태T)

$$a_n + a_{n+2} = 2n + 2 \quad \dots \text{①에서}$$

$$a_1 + a_3 = 4, a_2 + a_4 = 6$$

$$a_5 + a_7 = 12, a_6 + a_8 = 14$$

...

$$a_{25} + a_{27} = 52, a_{26} + a_{28} = 54$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{28} a_n = \sum_{n=1}^7 (16n - 6) = 406$$

문제의 조건에서

$$\sum_{n=1}^{30} a_n = 467 \text{ 이므로 } a_{29} + a_{30} = 61 \quad \dots \text{②}$$

$$\text{①에서 } a_{29} + a_{31} = 60$$

문제의 등식으로부터 $a_{31} = -b_{30} + 31$ 이므로

$$a_{29} - b_{30} = 29 \quad \dots \text{③}$$

②, ③에서

$$a_{30} + b_{30} = (a_{29} + a_{30}) - (a_{29} - b_{30}) = 32$$

44. [출제 의도] 등차수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이해하고 있는가?

$$S_{20} - S_{10} = a_{11} + a_{12} + \dots + a_{20} = 0$$

이므로 등차중항의 성질에 의하여

$$a_{15} + a_{16} = 0$$

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 양수이므로 $a_{15} > 0, a_{16} < 0$

이고 $|a_{15}| = |a_{16}|$ 이다. 또한 수열 $\{|a_n|\}$ 의 항의

값이 최소가 되는 경우는 $n = 15, 16$ 일 때임을 알

수 있다.

따라서 모든 자연수 n 에 대하여 $|a_n| \geq a_k$ 인

자연수 k 의 최솟값은 15이다.

45. [출제 의도] 거듭제곱근의 뜻과 그 중 실수인 것을 구할 수 있는가?

n 이 2 이상의 자연수일 때, 실수 a 의 실수인

n 제곱근은 아래 표와 같다.

	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
n 이 짝수	$\sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a}$	0	없다.
n 이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$

문제의 방정식의 실근 x 는 $-(\log_3 n)^2 + 3 \log_3 n$ 의 n 제곱근 중 실수인 것과 같다.

따라서 문제의 방정식이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우는 $-(\log_3 n)^2 + 3 \log_3 n > 0$ 이고 n 이 짝수인 경우이다.

$$-(\log_3 n)^2 + 3 \log_3 n > 0$$

$$\Rightarrow \log_3 n (\log_3 n - 3) < 0$$

$$\Rightarrow 0 < \log_3 n < 3, 1 < n < 27$$

따라서 문제의 조건을 만족시키는 모든 자연수 n 의 값의 합은

$$2 + 4 + 6 + \dots + 26 = \sum_{n=1}^{13} 2n = 2 \times \frac{13 \times 14}{2} = 182$$

46. [출제 의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

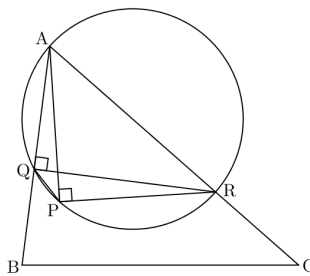
$$\cos A = \frac{4^2 + 6^2 - 5^2}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{5\sqrt{7}}{16}$$

한편 조건 (가), (나)에서 $\angle PAR = \angle PRA = \frac{\pi}{4}$

이므로 $\angle AQP + \angle ARP = \pi$ 이다.

따라서 사각형 AQP R은 원에 내접한다.



원주각의 성질에서 선분 AR은 사각형 AQP R의 외접원의 지름이다.

따라서 $\angle AQR = \frac{\pi}{2}$ 이고, 사인법칙에서

$$\overline{AR} = \frac{\overline{QR}}{\sin A} = 4$$

$$\text{이므로 } \overline{AQ} = \overline{AR} \cos A = 4 \times \frac{9}{16} = \frac{9}{4}$$

\overline{PQ} 를 x 라 하면

삼각형 AQP에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AP}^2 = \overline{AQ}^2 + \overline{PQ}^2 - 2 \times \overline{AQ} \times \overline{PQ} \times \cos \angle AQP$$

$$\Rightarrow (2\sqrt{2})^2 = \left(\frac{9}{4}\right)^2 + x^2 + 2 \times \frac{9}{4}x \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 9\sqrt{2}x - \frac{47}{4} = 0$$

근의 공식에 의하여

$$x = \frac{-9\sqrt{2} + \sqrt{(9\sqrt{2})^2 + 47 \times 4}}{8}$$

$$= \frac{1}{8}(5\sqrt{14} - 9\sqrt{2}) \quad (\because x > 0)$$

따라서 삼각형 BPQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times \overline{BQ} \times \sin \angle PQB$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{8}(5\sqrt{14} - 9\sqrt{2}) \times \left(4 - \frac{9}{4}\right) \times \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{35}{64}\sqrt{7} - \frac{63}{64} \Rightarrow a = \frac{35}{64}, b = \frac{63}{64}$$

$$\therefore 64(a+b) = 35 + 63 = 98$$

(다른 풀이) $\sin(\angle PAQ) = \sin\left(A - \frac{\pi}{4}\right)$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin A - \cos A)$$

$$= \frac{5\sqrt{14} - 9\sqrt{2}}{32}$$

이고, 선분 AR은 삼각형 APQ의 외접원의 지름이므로 사인법칙에 의하여

$$\overline{PQ} = \overline{AR} \sin(\angle PAQ) = \frac{5\sqrt{14} - 9\sqrt{2}}{8}$$

이후의 계산은 본 풀이와 같다.

47. [출제 의도] 로그의 계산을 할 수 있는가?

$A - B = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ 이므로 $-\frac{1}{2} \in A$ 이다.

$b > 0$ 이므로 $\log_4 a = -\frac{1}{2}$ 이고, $b = 4$ 이다.

$$\therefore a = \frac{1}{2}, b = 4 \Rightarrow a + b = \frac{9}{2}$$

48. [출제 의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수의 값을 계산할 수 있는가?

직선 $y = \frac{2}{3}x + 1$ 과 수직인 직선의 기울기는

$$-\frac{3}{2} \text{ 이므로 } \tan \theta = -\frac{3}{2} \text{ 이다.}$$

$0 < \theta < \pi$ 이므로 $\sin \theta > 0$ 이고,

$$\sin \theta = \frac{3}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{3\sqrt{13}}{13} \text{ 이다.}$$

$$\therefore \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) = \sin \theta = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

49. [출제 의도] 여러 가지 수열의 합을 계산할 수 있는가?

$$S_n = \frac{1}{2} \times (\overline{A_n B_n} + \overline{A_{n+1} B_{n+1}}) \times \overline{A_n A_{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})$$

이므로

$$\therefore \sum_{n=1}^{15} \frac{1}{S_n} = \sum_{n=1}^{15} \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{15} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$$= 2 \left\{ (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{16} - \sqrt{15}) \right\}$$

$$= 2(\sqrt{16} - 1) = 2 \times 3 = 6$$

50. [출제 의도] 등비수열의 성질을 이해하고 있는가?

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하면

$$a_n = a \times (-2)^{n-1}, \quad a_k = a \times (-2)^{k-1}$$

이므로

$$\begin{aligned} \frac{|a_n|}{a_k} &= \frac{|a \times (-2)^{n-1}|}{|a \times (-2)^{k-1}|} \\ &= \frac{2^{n-1}}{(-2)^{k-1}} \times \frac{|a|}{a} \\ &= \frac{|a|}{a} \times (-1)^{k-1} \times 2^{n-k} \dots (*) \end{aligned}$$

이고, $\frac{|a|}{a} \times (-1)^{k-1}$ 의 값은 -1 또는 1 이다.

이때

$$\sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-7} = \sum_{n=1}^{10} 2^{n-4} > 0$$

이므로 (*)과 문제의 조건에서

$$\frac{|a|}{a} \times (-1)^{k-1} = 1 \text{ 이어야 하고, } k=4 \text{ 이다.}$$

$$\therefore \frac{a_{2k}}{a_k} = \frac{a_8}{a_4} = (-2)^4 = 16$$

51. [출제 의도] 귀납적으로 정의된 수열의 항을 계산할 수 있는가?

$$a_{n+1} = \frac{n(n^2+1)}{a_n} \text{ 에서}$$

$$a_2 = \frac{1 \times (1^2+1)}{a_1} = \frac{2}{3}$$

$$a_3 = \frac{2 \times (2^2+1)}{a_2} = 15$$

$$a_4 = \frac{3 \times (3^2+1)}{a_3} = 2$$

$$a_5 = \frac{4 \times (4^2+1)}{a_4} = 34$$

52. [출제 의도] 삼각함수를 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

조건 (가)에서

$$S = \frac{1}{2}r \times (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}) = \frac{7}{2}r \dots \textcircled{1}$$

$\overline{CA} = 2R \sin B$ 이므로 조건 (나)에서

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin B \\ &= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \frac{\overline{CA}}{2R} = \frac{45}{16R} \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①, ②에서

$$\frac{7}{2}r = \frac{45}{16R} \Rightarrow Rr = \frac{45}{56}$$

문제의 조건에서 $\frac{r}{R} = \frac{4}{45}$ 이므로

$$r^2 = Rr \times \frac{r}{R} = \frac{45}{56} \times \frac{4}{45} = \frac{1}{14}$$

$$\therefore r = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\therefore S = \frac{7}{2}r = \frac{\sqrt{14}}{4}, \quad 16S^2 = 14$$

53. [출제 의도] 삼각함수의 그래프를 그리고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

함수 $f(x)$ 의 최댓값은 1 , 최솟값은 -1 이므로

문제의 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 의 개수는 가능한 모든 함수 $f(x)$ 의 개수에서 $M-m=0$ 인

경우와 $M-m=2$ 인 경우의 수를 제외한 것이다.

(1) $M-m=2$ 인 경우

$M=1$ 이고 $m=-1$ 이어야 한다.

즉, 닫힌구간 $[-1, 0]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 1 이어야 하고, 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 -1 이어야 한다.

함수 $f(x)$ 의 주기는 $2a$ 이므로 $f(x)$ 의 한 주기 내에서 $f(\alpha)=1, f(\beta)=-1$ 이면 $|\alpha-\beta|=a$ 이다. $\dots \textcircled{1}$

구간 $[-1, 1]$ 의 길이가 2 이므로 $M-m=2$ 가 되는 자연수 a, b 가 존재하려면 $a \leq 2$ 이어야 한다.

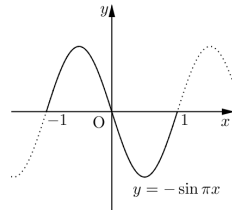
(i) $a=1$ 인 경우,

$f(x) = \sin\pi(x+b)$ 이므로

b 가 홀수인 경우, $f(x) = -\sin\pi x$

b 가 짝수인 경우, $f(x) = \sin\pi x \dots \textcircled{2}$

이다. 그 중 문제의 조건을 만족시키는 경우는 아래 그림과 같이 $f(x) = -\sin\pi x$ 인 경우이므로 b 가 홀수인 경우 항상 $M-m=2$ 이다.



따라서 이 경우 순서쌍 (a, b) 의 개수는 5 이다.

(ii) $a=2$ 인 경우 ①에서

$f(-1)=1$ 이고, $f(1)=-1$ 이어야 한다.

또한 $f(-1)=1$ 이면

$$f(1) = \sin\frac{\pi}{2}(b+1) = \sin\left\{\frac{\pi}{2}(b-1)+\pi\right\} = -1$$

이다.

$$f(x) = \sin\frac{\pi}{2}(x+b) \text{ 에서}$$

$$f(-1) = \sin\frac{\pi}{2}(b-1) = 1$$

$b=2$ 일 때 위 조건을 만족시키고, $f(x)$ 의 주기가 4 이므로 문제의 조건을 만족시키는 b 의 값은 $2, 6, 10$ 이다.

(i), (ii)에서 $M-m=2$ 인 순서쌍 (a, b) 의 개수는 $5+3=8$

(2) $M-m=0$ 인 경우

$M \geq f(0)$ 이고 $m \leq f(0)$ 이므로

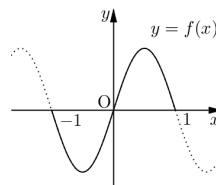
$M=m$ 이라면 $M=m=f(0)$ 이어야 한다.

즉, $-1 \leq x \leq 0$ 이면 $f(x) \leq f(0)$ 이고

$0 \leq x \leq 1$ 이면 $f(x) \geq f(0)$ 이어야 한다. $\dots \textcircled{3}$

(i) $a=1$ 인 경우 ②에서 b 가 짝수일 때

$M=m$ 이다.



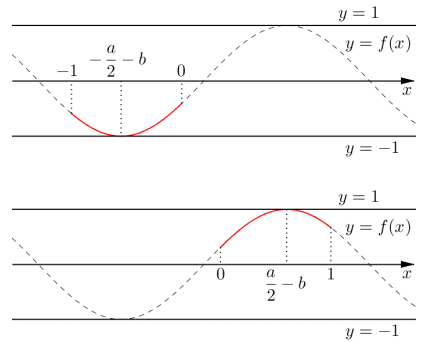
즉, 이 경우 순서쌍 (a, b) 의 개수는 5 이다.

(ii) $a \geq 2$ 인 경우 구간 $[-1, 1]$ 의 길이가 a 보다 작거나 같으므로 함수 $f(x)$ 의 한 주기의 어떤 구간에서 ③을 만족시키는 자연수 (a, b) 의 순서쌍을 찾고, 주기를 고려하여 모든 자연수 (a, b) 의 순서쌍을 찾으면 된다.

아래 그림과 같이

$$x = -\frac{a}{2} - b \text{ 일 때 } f(x) = -1 \text{ 이고,}$$

$$x = \frac{a}{2} - b \text{ 일 때 } f(x) = 1 \text{ 이다.}$$



$$\text{또한 } \left| \left(\frac{a}{2} - b\right) - \left(-\frac{a}{2} - b\right) \right| = a \text{ 이므로}$$

두 점 $\left(\frac{a}{2} - b, 1\right)$ 과 $\left(-\frac{a}{2} - b, -1\right)$ 은 함수 $f(x)$ 의 한 주기 앞의 두 점이다.

이때 ③을 만족시키려면

$$\frac{a}{2} - b \geq \frac{1}{2} \Rightarrow a - 2b \geq 1$$

$$-\frac{1}{2}a - b \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow a + 2b \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1-a}{2} \leq b \leq \frac{a-1}{2}$$

$a=2$ 인 경우 위 부등식을 만족시키는 정수 b 의 값은 0 뿐이고 함수 $f(x)$ 의 주기는 4 이므로 조건을 만족시키는 자연수 (a, b) 의 순서쌍은 $(2, 4), (2, 8)$ 이다.

$a=3$ 인 경우 위 부등식을 만족시키는 정수 b 의 값은 $-1, 0, 1$ 이고 함수 $f(x)$ 의 주기는 6 이므로 조건을 만족시키는 자연수 (a, b) 의 순서쌍은 $(3, 1), (3, 5), (3, 6), (3, 7)$ 이다.

$a=4$ 인 경우 위 부등식을 만족시키는 정수 b 의 값은 $-1, 0, 1$ 이고 함수 $f(x)$ 의 주기는 8 이므로 조건을 만족시키는 자연수 (a, b) 의 순서쌍은 $(4, 1), (4, 7), (4, 8), (4, 9)$ 이다.

같은 방법으로

$a=5$ 인 경우 조건을 만족시키는 자연수 (a, b) 의 순서쌍은 $(5, 1), (5, 2), (5, 8), (5, 9), (5, 10)$

$a=6$ 인 경우 조건을 만족시키는 자연수 (a, b) 의 순서쌍은 $(6, 1), (6, 2), (6, 10)$

$a=7, 8$ 인 경우 조건을 만족시키는 자연수 (a, b) 의 순서쌍은 $(7, 1), (7, 2), (7, 3), (8, 1), (8, 2), (8, 3)$

$a=9, 10$ 인 경우 조건을 만족시키는 자연수 (a, b) 의 순서쌍은

(9, 1), (9, 2), (9, 3), (9, 4), (10, 1), (10, 2), (10, 3), (10, 4)

따라서 이 경우 순서쌍 (a, b)의 개수는
 $2 + 4 + 4 + 5 + 3 + 6 + 8 = 32$

(i), (ii)에서 $M - m = 0$ 인 순서쌍 (a, b)의 개수는
 $5 + 32 = 37$

(1), (2)에서 문제의 조건을 만족시키는 모든 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는
 $100 - 8 - 37 = 55$

54. [출제 의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수의 값을 계산할 수 있는가?

문제의 조건에서 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 5$ 이고,

$$\cos\left(2 \times \frac{\pi}{6} - a\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - a\right) = 1 \text{ 이므로}$$

$$b + 2 = 5 \Rightarrow b = 3$$

$$\therefore f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(-\frac{2\pi}{3} - a\right) + 3$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - a - \pi\right) + 3$$

$$= -2\cos\left(\frac{\pi}{3} - a\right) + 3 = 1$$

55. [출제 의도] 로그의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

$\log a + \log b = \log ab$
 $2 + \log 6 = \log 100 + \log 6 = \log 600$
 이므로 $ab = 600$
 600은 제곱수가 아니므로
 이를 만족하는 순서쌍 (a, b)의 개수는
 600의 양의 약수의 개수와 같고,

$$600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$$

에서 600의 양의 약수의 개수는
 $(3+1)(1+1)(2+1) = 24$

이므로 문제의 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수는 24이다.

56. [출제 의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용한 문제 해결 과정을 이해할 수 있는가?

(가): 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 1$ 이고, 공비가 2인 등비수열이므로 $a_n = 2^{n-1}$ 이다. $\Rightarrow f(n) = 2^{n-1}$

(나): (ii)의 계산 과정에서

$$\frac{b_n}{a_n} = \left(9 - \frac{n^2 + 5n + 8}{2^n}\right) - \left\{9 - \frac{(n-1)^2 + 5(n-1) + 8}{2^{n-1}}\right\}$$

$$= \frac{n^2 + 3n + 4}{2^{n-1}} - \frac{n^2 + 5n + 8}{2^n}$$

$$= \frac{(2n^2 + 6n + 8) - (n^2 + 5n + 8)}{2^n}$$

$$= \frac{n^2 + n}{2^n}$$

$$\Rightarrow g(n) = n^2 + n$$

(다): (나)에서 $n \geq 2$ 일 때

$$b_n = 2^{n-1} \times \frac{n^2 + n}{2^n} = \frac{1}{2}(n^2 + n)$$

이므로

$$b_n = \begin{cases} 2 & (n=1) \\ \frac{1}{2}(n^2 + n) & (n \geq 2) \end{cases}$$

이다. 따라서

$$\sum_{n=1}^{21} \frac{b_n}{n+1} = \frac{b_1}{2} + \sum_{n=2}^{21} \frac{n^2 + n}{2(n+1)}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{21} \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= 116$$

$$\Rightarrow p = 116$$

$$\therefore \frac{g(7)}{f(4)} + p = \frac{7^2 + 7}{2^3} + 116 = 123$$

57. [출제 의도] 등차수열의 일반항을 구하고, 문제를 해결할 수 있는가?

다음 두 가지 경우로 나누어 생각한다.

(1) $a_6 \geq 5$ 인 경우

조건 (가)에서

$$2a_4 + 3 = a_6 - 5 \Rightarrow 2a_4 - a_6 = -8$$

수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d라 하면

$$2a_4 - a_6 = 2(a_4 - 2d) - a_6$$

$$= a_6 - 4d = a_2$$

이므로 $a_2 = -8$ 이다.

$a_6 \geq 5$ 이므로 이 경우 수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 음수라는 데에 모순이다.

(2) $a_6 < 5$ 인 경우

$$2a_4 + 3 = 5 - a_6 \Rightarrow 2a_4 + a_6 = 2 \dots (*)$$

수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d라 하면

$$2(a_4 - 2d) + a_6 = 2 \Rightarrow 3a_6 = 4d + 2$$

$$2a_4 + (a_4 + 2d) = 2 \Rightarrow 3a_4 = -2d + 2$$

위 두 등식으로부터 $d < 0$ 이므로

$$a_4 > 0, a_6 < 0$$

이고, 조건 (나)로부터 $a_5 = 0$ 이어야 한다.

따라서 (*)에서

$$2a_4 + a_6 = 2(a_5 - d) + (a_5 + d)$$

$$= 3a_5 - d = -d = 2$$

이므로 $d = -2$ 이다.

(1), (2)에서

$$\therefore a_1 = a_5 - 4d = 8$$

58. [출제 의도] 삼각함수와 로그함수의 그래프를 그려서 문제를 해결할 수 있는가?

함수 $y = \log_2(2x - n)$ 의 그래프는 직선 $x = \frac{n}{2}$ 을

점근선으로 가지고, 점 $(n, \log_2 n)$ 을 지나고

$\log_2 n \geq 0$ 이므로 두 곡선은 구간 $\left(\frac{n}{2}, n\right)$ 에서 항상

교점을 한 개 갖는다. 또한

$$\log_2(2x - n) = n$$

$$\Rightarrow 2x - n = 2^n, x = \frac{n}{2} + 2^{n-1}$$

에서 곡선 $y = \log_2(2x - n)$ 는 점 $\left(\frac{n}{2} + 2^{n-1}, n\right)$ 을 지남을 알 수 있다.

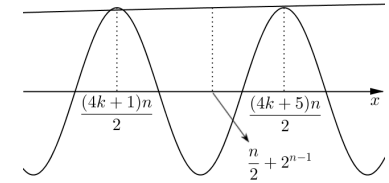
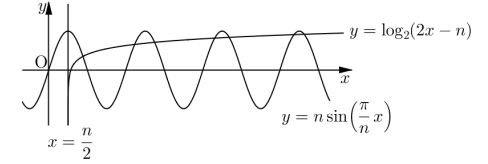
또, 함수 $y = n \sin\left(\frac{\pi}{n}x\right)$ 는 최댓값이 n이고,

점 $\left(\frac{n}{2}, n\right)$ 을 지나고, 주기가 $\frac{2\pi}{n}$ 이므로

정수 k에 대하여 함수 $y = n \sin\left(\frac{\pi}{n}x\right)$ 는

점 $\left(\frac{n}{2} + 2kn, n\right) = \left(\frac{(4k+1)n}{2}, n\right)$ 을 지난다.

두 함수의 그래프를 그리면 그림과 같다.



따라서 위 그림과 같이

$$\frac{(4k+1)n}{2} \leq \frac{n}{2} + 2^{n-1} < \frac{(4k+5)n}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{4k+1}{2} \leq \frac{1}{2} + \frac{2^{n-1}}{n} < \frac{4k+5}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2^{n-2}}{n} - 1 < k \leq \frac{2^{n-2}}{n} \dots (*)$$

인 정수 k가 유일하게 존재한다.

위 부등식을 만족시키는 정수 k에 대하여

두 함수 $y = \log_2(2x - n)$, $y = n \sin\left(\frac{\pi}{n}x\right)$ 의

그래프가 만나는 점의 개수는

열린구간 $\left(\frac{n}{2} + 2^{n-1}, \frac{(4k+5)n}{2}\right)$ 에서 두 곡선이

만나지 않는 경우 $2k + 1$ 이고,

열린구간 $\left(\frac{n}{2} + 2^{n-1}, \frac{(4k+5)n}{2}\right)$ 에서 두 곡선이

한 점에서 접하는 경우 $2k + 2$ 이다.

(*)에서 $n = 2^p$ 인 경우 ($p \geq 2$ 인 자연수)

$$\frac{2^{2^p-2}}{2^p} - 1 < k \leq \frac{2^{2^p-2}}{2^p}$$

$$\Rightarrow 2^{2^p-2-p} - 1 < k \leq 2^{2^p-2-p}$$

이므로 2^{2^p-2-p} 은 자연수이므로

$$k = 2^{2^p-2-p}$$

이 경우 두 함수의 그래프가 열린구간

$\left(\frac{n}{2} + 2^{n-1}, \frac{(4k+5)n}{2}\right)$ 에서 만나지 않으므로

$$a_n = 2k + 1 = 2^{2^p-2-p-1} + 1$$

이다.

$$p = 2 \text{인 경우 } a_n = a_4 = 2^1 + 1 = 3$$

$$p = 3 \text{인 경우 } a_n = a_8 = 2^4 + 1 = 17$$

$$p = 4 \text{인 경우 } a_n = a_{16} = 2^{11} + 1 = 2049$$

이므로 $a_{m+1} - a_m > 100$ 인 자연수 m은

$8 \leq m < 16$ 에 존재한다.

(*)에서

$n = 9$ 인 경우

$$\frac{2^{9-2}}{9} - 1 < k \leq \frac{2^{9-2}}{9} = 14.2$$

이므로 $k = 14$ 이고 $a_9 = 29$ 또는 $a_9 = 30$ 이다.

$n = 10$ 인 경우

$$\frac{2^{10-2}}{10} - 1 < k \leq \frac{2^{10-2}}{10} = 25.6$$

이므로 $k = 25$ 이고 $a_{10} = 51$ 또는 $a_{10} = 52$ 이다.

$n = 11$ 인 경우

$$\frac{2^{11-2}}{11} - 1 < k \leq \frac{2^{11-2}}{11} = 46.\dot{5}$$

이므로 $k = 46$ 이고 $a_{11} = 93$ 또는 $a_{11} = 94$ 이다.

$n = 12$ 인 경우

$$\frac{2^{12-2}}{12} - 1 < k \leq \frac{2^{12-2}}{12} = 85.\dot{3}$$

이므로 $k = 85$ 이고 $a_{12} = 171$ 또는 $a_{12} = 172$ 이다.

$n = 13$ 인 경우

$$\frac{2^{13-2}}{13} - 1 < k \leq \frac{2^{13-2}}{13} = 157.xx$$

이므로 $k = 157$ 이고 $a_{13} = 315$ 또는

$a_{13} = 316$ 이다.

...

따라서 $a_{m+1} - a_m > 100$ 을 만족시키는 자연수 m 의 최솟값은 12이다.

59. [출제 의도] 코사인법칙을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

$\angle ABC = \angle DAC$ 이고, $\angle C$ 는 공통이므로 $\triangle ACD \sim \triangle BCA$ 이다.

답음의 성질에서

$$\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{AC} : \overline{BC}$$

$$\Rightarrow 2 : 3 = \overline{AC} : 6, \overline{AC} = 4$$

$$\overline{AD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC}$$

$$\Rightarrow \overline{CD} = \frac{2 \times 4}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\text{따라서 } \overline{BD} = \overline{BC} - \overline{CD} = \frac{10}{3}$$

삼각형 ABD에서

$$\cos(\angle BAD) = \frac{3^2 + 2^2 - \left(\frac{10}{3}\right)^2}{2 \times 3 \times 2} = \frac{17}{108}$$

$$\therefore 216k = 34$$

60. [출제 의도] 로그함수의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

두 점 B, D를 지나는 직선은 기울기가 -1 이고 점 B(5, 0)을 지나는 직선이므로

직선 BD의 방정식은 $y = -x + 5$ 이다.

이때 직선 $x - 2y + 1 = 0$ 이 사각형 ABCD의 넓이를 이등분하므로

두 직선 $x - 2y + 1 = 0$ 과 $y = -x + 5$ 의 교점은 정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점과 같다.

$x - 2y + 1 = 0$ 과 $y = -x + 5$ 를 연립하여 풀면 $(x, y) = (3, 2)$ 이므로

사각형 ABCD의 두 대각선의 교점의 좌표는 $(3, 2)$ 이다.

따라서 두 점 B, D의 중점의 좌표가 $(3, 2)$ 이고, B(5, 0)에서 점 D의 좌표는 $(1, 4)$ 이다.

즉, A(1, 0)이고 C(5, 4)이므로

선분 AD와 CD의 중점의 좌표는 각각

$(1, 2), (3, 4)$ 이다.

곡선 $y = a \times 2^x + b$ 가 두 점 $(1, 2), (3, 4)$ 를

지나므로

$$2a + b = 2, 8a + b = 4$$

위 두 식을 연립하여 풀면 $a = \frac{1}{3}, b = \frac{4}{3}$

$$\therefore 9ab = 9 \times \frac{1}{3} \times \frac{4}{3} = 4$$

61. [출제 의도] 등비수열의 일반항과 합을 구할 수 있는가?

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_n = a \times r^{n-1}$$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a}{r - 1} r^n - \frac{a}{r - 1}$$

이므로

$$S_n = 2a_n - 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{r-1} r^n - \frac{a}{r-1} = 2a \times r^{n-1} - 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{ar}{r-1} \times r^{n-1} - \frac{a}{r-1} = 2a \times r^{n-1} - 3$$

위 등식이 모든 자연수 n 에 대하여 성립하므로

$$\frac{ar}{r-1} = 2a \Rightarrow r = 2$$

$$\frac{a}{r-1} = 3 \Rightarrow a = 3$$

$$\therefore a_n = 3 \times 2^{n-1}$$

$$\therefore a_2 = 6, a_4 = 24 \Rightarrow a_2 + a_4 = 30$$

(다른 풀이)

$$S_1 = a_1 \text{ 이므로 } a_1 = 2a_1 - 3 \Rightarrow a_1 = 3$$

이고,

$$S_n = 2a_n - 3$$

$$S_{n-1} = 2a_{n-1} - 3 \quad (n \geq 2)$$

에서 위 두 등식을 변변 빼면

$$S_n - S_{n-1} = 2a_n - 2a_{n-1}$$

$$a_n = 2a_n - 2a_{n-1} \Rightarrow a_n = 2a_{n-1}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 공비는 2이다.

$$\therefore a_n = 3 \times 2^{n-1}, a_2 + a_4 = 30$$

62. [출제 의도] 여러 가지 수열의 합을 계산할 수 있는가?

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_n + \beta_n = -4$$

$$\alpha_n \beta_n = -4n^2 + 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} = \frac{\alpha_n + \beta_n}{\alpha_n \beta_n}$$

$$= \frac{-4}{-4n^2 + 1}$$

$$= \frac{4}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$= 2 \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

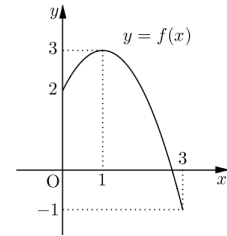
$$\therefore \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} \right)$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$= 2 \times \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{21} \right) \right\}$$

$$= 2 \left(1 - \frac{1}{21} \right) = \frac{40}{21}$$

63. [출제 의도] 지수함수의 최대, 최소를 구할 수 있는가?



$$f(x) = -x^2 + 2x + 2$$

$$= -(x-1)^2 + 3 \quad (0 \leq x \leq 3)$$

이므로 그림에서 닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값은 각각 3, -1 이다.

함수 $g(x)$ 는 감소함수이므로 $0 \leq x \leq 3$ 에서

함수 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ 의 최댓값과 최솟값은 각각

$$g(-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8, \quad g(3) = \frac{1}{2}$$

이다.

$$\therefore M \times m = 8 \times \frac{1}{2} = 4$$

64. [출제 의도] 귀납적으로 정의된 수열의 일반항을 추론하고, 그 합을 구할 수 있는가?

주어진 수열의 각 항을 구하면

$$a_1 = k, a_2 = -2k, a_3 = k+1, a_4 = 2k+2$$

$$a_5 = -k, a_6 = 2k, a_7 = -k+1, a_8 = -2k+2$$

$$a_9 = k, a_{10} = -2k, \dots$$

따라서 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+8} = a_n$ 이다.

이를 이용하여 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 을 구하면 다음과 같다.

n	1	2	3	4
S_n	k	$-k$	1	$2k+3$
n	5	6	7	8
S_n	$k+3$	$3k+3$	$2k+4$	6
n	9	10	11	12
S_n	$k+6$	$-k+6$	7	$2k+9$
n	13	14	15	16
S_n	$k+9$	$3k+9$	$2k+10$	12
n	17	18	19	20
S_n	$k+12$	$-k+12$	13	$2k+15$
n	21	22	23	24
S_n	$k+15$	$3k+15$	$2k+16$	18
n	25	26	27	28
S_n	$k+18$	$-k+18$	19	$2k+21$

...

위와 같은 식으로 $S_{n+8} = S_n + 6$ 이고,

$S_{24} = 18$ 이므로 문제의 조건을 만족시키기 위해서 $S_m = 18$ 이 되는 24가 아닌 자연수 m 이 존재해야 한다.

k 는 자연수이므로 위 표로부터

(i) $m < 24$ 일 때,

$S_m = 18$ 이 될 수 있는 S_m 의 값은

$$k, k+3, k+6, k+9, k+12, k+15$$

$$3k+3, 3k+9, 3k+15$$

$$2k+4, 2k+10, 2k+16$$

이고, 이때 자연수 k 의 값은

$$1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 12, 15, 18$$

이다.

(ii) $m > 24$ 일 때,

k 는 자연수이므로 $m = 8p + 2$ (p 는 자연수)일 때를 제외함 모든 S_m 의 값은 18보다 크다.

따라서 $S_m = 18$ 이 될 수 있는 S_m 의 값은

$$S_{34} = -k + 24, S_{42} = -k + 30, S_{50} = -k + 36$$

$$S_{58} = -k + 42, S_{66} = -k + 48, S_{74} = -k + 54$$

$$S_{82} = -k + 60, S_{90} = -k + 66, S_{98} = -k + 72$$

이고, 이때 자연수 k 의 값은

$$6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54$$

이다.

(i), (ii)에서 문제의 조건을 만족시키는 모든 자연수 k 의 값의 합은

$$1 + 3 + 4 + 5 + 7 + 9 + 15 + \sum_{k=1}^9 6k = 314$$

수학II

정답

1	②	2	①	3	⑤	4	③	5	①
6	④	7	①	8	49	9	22	10	12
11	⑤	12	②	13	①	14	②	15	③
16	6	17	13	18	⑤	19	①	20	③
21	③	22	⑤	23	9	24	36	25	64
26	④	27	③	28	④	29	④	30	③
31	12	32	71	33	51	34	⑤	35	③
36	④	37	③	38	②	39	⑤	40	24
41	48	42	⑤	43	⑤	44	③	45	①
46	22	47	12	48	36	49	100	50	

해설

1. [출제 의도] 함수의 연속의 정의를 이용하여 미정계수를 구할 수 있는가?

함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이고, $f(2)=3$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+ax+b}{x-2} = 3$$

위 극한이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2+ax+b) = 0 \text{에서 } 2a+b = -4 \dots (*)$$

$b = -2a - 4$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+ax+b}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+ax-2a-4}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+a+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+a+2)$$

$$= a+4 = 3, \quad a = -1$$

(*)에서 $b = -2a - 4 = -2$

$\therefore a+b = -3$

2. [출제 의도] 접선의 방정식을 구하고, 이를 이용하여 미정계수를 계산할 수 있는가?

$f(1) = a$ 이고,

$$f'(x) = 3x^2 - 2(2a+1)x + 3a, \quad f'(1) = 1 - a$$

이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$ 에서 그은 접선의 방정식은 $y = (1-a)x + 2a - 1$ 이다.

이를 $y = x^3 - (2a+1)x^2 + 3ax$ 와 연결하면

$$x^3 - (2a+1)x^2 + 3ax = (1-a)x + 2a - 1$$

$$\Rightarrow x^3 - (2a+1)x^2 + (4a-1)x - 2a + 1 = 0$$

문제의 조건에 의하여 이 방정식의 한 근이 $x=3$ 이므로

$$27 - 9(2a+1) + 3(4a-1) - 2a + 1 = 0$$

$$\Rightarrow -8a + 16 = 0, \quad a = 2$$

$\therefore f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x, \quad f(2) = 0$

3. [출제 의도] 적분과 미분의 관계를 이용하여 다항함수의 식을 구할 수 있는가?

$$\int_0^1 tf(t)dt = a \text{라 하고 } (a \text{는 상수})$$

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 3x^2 - 4ax$$

$$\Rightarrow xf(x) = 3x^3 - 4ax^2$$

$$\Rightarrow \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 (3x^3 - 4ax^2)dx$$

$$\Rightarrow a = \left[\frac{3}{4}x^4 - \frac{4}{3}ax^3 \right]_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{4a}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{7a}{3} = \frac{3}{4}, \quad a = \frac{9}{28}$$

$$\therefore f(x) = 3x^2 - \frac{9x}{7}, \quad f(1) = \frac{12}{7}$$

4. [출제 의도] 함수의 그래프를 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

함수 $f(x)$ 가 불연속인 점은 $x=1$ 과 $x=3$ 뿐이다.

(i) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$ 이므로

$a=1$ 은 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2$ 이므로

$a=3$ 은 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) 함수 $f(x)$ 가 연속인 경우

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \text{에서}$$

$f(a) = 2$ 여야 한다.

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이면서 $f(a) = 2$ 인 실수 a 는 열린 구간 $(0, 4)$ 에 2개 존재한다.

(i), (ii), (iii)에서 문제의 조건을 만족시키는 실수 a 의 개수는 3이다.

5. [출제 의도] 도함수와 사잇값 정리를 활용하여 다항함수의 식을 추론할 수 있는가?

함수 $f(x)$ 는 실수 전체에서 연속이므로 $f(x)$ 가 실수 전체에서 정의된 역함수를 가지기 위해서는 $f(x)$ 가 실수 전체에서 증가하거나 감소해야 한다.

즉, $f'(x) = x^2 - (2k-3)x + k$ 에서 $f'(x)$ 는 최고차항의 계수가 양수인 이차함수이므로 모든 실수 전체에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

방정식 $x^2 - (2k-3)x + k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D \leq 0$ 일 때 $f'(x) \geq 0$ 이다.

$$D = (2k-3)^2 - 4k = 4k^2 - 16k + 9$$

즉 $4k^2 - 16k + 9 \leq 0$ 이므로 근의 공식에서

$$2 - \frac{\sqrt{7}}{2} \leq k \leq 2 + \frac{\sqrt{7}}{2} \text{이다.} \dots (1)$$

한편 조건 (나)와 사잇값 정리에 의하여 $f(0)f(3) < 0$ 이어야 한다.

$$f(0) = -11 < 0 \text{에서}$$

$$f(3) = 9 - \frac{9}{2}(2k-3) + 3k - 11$$

$$= -6k + \frac{23}{2} > 0$$

즉 $6k < \frac{23}{2}$ 이므로 $k < \frac{23}{12} \dots (2)$

(1), (2)를 동시에 만족시키는 정수 k 의 값은 1뿐이므로 $k=1$ 이다.

6. [출제 의도] 함수의 연속의 정의를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

$$f(x)g(x) = \begin{cases} (x^2-1)(x-2a+9) & (|x| \geq a) \\ 8(x-2a+9) & (|x| < a) \end{cases}$$

에서 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=-a, x=a$ 를 제외한

모든 실수 x 에서 연속이다.

(i) $f(x)g(x)$ 가 $x=-a$ 에서 연속인 경우

$$\lim_{x \rightarrow -a^-} f(x)g(x) = f(-a)g(-a) = (a^2-1)(-3a+9)$$

$$\lim_{x \rightarrow -a^+} f(x)g(x) = 8(-3a+9)$$

에서 함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=-a$ 에서 연속이면

$$(a^2-1)(-3a+9) = 8(-3a+9)$$

$$(a^2-9)(-3a+9) = 0, \quad (a+3)(a-3)^2 = 0$$

$a > 0$ 이므로 $a=3$

그런데 $a=3$ 이면

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1 & (|x| \geq 3) \\ 8 & (|x| < 3) \end{cases} \text{이므로}$$

함수 $f(x)$ 는 $x=3, x=-3$ 에서 연속이다.

즉, 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$ 도 실수 전체의 집합에서 연속이다.

이는 문제의 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(x)g(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속인 경우

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)g(x) = f(a)g(a) = (a^2-1)(-a+9)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)g(x) = 8(-a+9)$$

에서 함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이면

$$(a^2-1)(-a+9) = 8(-a+9)$$

$$(a^2-9)(-a+9) = 0, \quad (a+3)(a-3)(a-9) = 0$$

$a > 0$ 이므로 $a=3$ 또는 $a=9$

(i)에서 $a=3$ 인 경우는 문제의 조건을 만족시키지 않으므로 $a=9$ 이다. 따라서

$$f(x)g(x) = \begin{cases} (x^2-1)(x-9) & (|x| \geq 9) \\ 8(x-9) & (|x| < 9) \end{cases}$$

이고,

$$\lim_{x \rightarrow -9^-} f(x)g(x) = f(-9)g(-9) = -1440$$

$$\lim_{x \rightarrow -9^+} f(x)g(x) = -144$$

이므로 $f(x)g(x)$ 는 $x=-9$ 에서만 불연속이다.

$\therefore k=-9, g(k)=-18$

7. [출제 의도] 다항함수의 미분법을 활용하여 접선의 방정식을 구하고, 함수의 그래프를 그려서 문제를 해결할 수 있는가?

원점에서 곡선 $y=f(x)$ 에 그은 접선과 곡선

$y=f(x)$ 가 접하는 점의 좌표를

$(p, p^4+2p^3-3p^2-9p+4)$ 라 하면

$$f'(x) = 4x^3+6x^2-6x-9 \text{에서}$$

원점에서 곡선 $y=f(x)$ 에 그은 접선의 방정식은

$$y - (p^4+2p^3-3p^2-9p+4) = (4p^3+6p^2-6p-9)(x-p)$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$-(p^4+2p^3-3p^2-9p+4)$$

$$= -p(4p^3+6p^2-6p-9)$$

$$\Rightarrow 3p^4+4p^3-3p^2-4 = 0$$

$$\Rightarrow (p-1)(3p^3+7p^2+4p+4) = 0$$

$$\Rightarrow (p-1)(p+2)(3p^2+p+2) = 0$$

방정식 $3p^2+p+2=0$ 은 실근을 갖지 않으므로

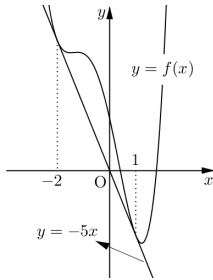
원점에서 곡선 $y=f(x)$ 에 그은 접선은 두 점 $(-2, f(-2)), (1, f(1))$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 와 접한다. ... (*)

$$f(-2) = 16 - 16 - 12 + 18 + 4 = 10$$

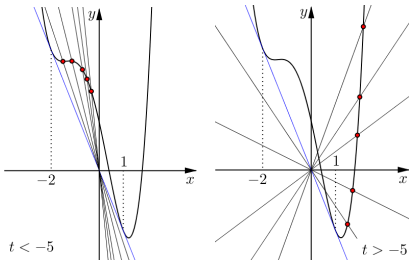
$$f(1) = 1 + 2 - 3 - 9 + 4 = -5$$

이므로 원점에서 곡선 $y=f(x)$ 에 그은 접선의 방정식은 $y=-5x$ 이다.

이를 그래프로 나타내면 다음과 같다.



이를 이용하여 $t > -5$ 인 경우와 $t < -5$ 인 경우 직선 $y=tx$ 와 곡선 $y=f(x)$ 의 그래프는 각각 아래와 같다.



$t < -5$ 인 경우, t 의 값이 증가함에 따라 $g(t)$ 는 연속적으로 감소하고, (*)에서 $-2 < g(t) < 0$ 이다.

$t > -5$ 인 경우, t 의 값이 증가함에 따라 $g(t)$ 의 값은 연속적으로 증가하고, (*)에서 $g(t) > 1$ 이다.

따라서 $\lim_{t \rightarrow -5^-} g(t) = -2, \lim_{t \rightarrow -5^+} g(t) = 1$ 이다.

$$\therefore k = -5, \alpha = 3$$

이때 $g(\alpha) = g(3)$ 은 방정식

$$x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 9x + 4 = 3x$$

의 실근 중 가장 큰 값이다.

$$x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4 = 0 \text{ 에서}$$

$$(x-2)(x^3 + 4x^2 + 5x - 2) = 0$$

$x > 2$ 이면 $x^3 + 4x^2 + 5x - 2 > 0$ 이므로

$$g(\alpha) = g(3) = 2 \text{ 이다.}$$

$$\therefore k + (f \circ g)(\alpha) = -5 + f(2) = -5 + 6 = 1$$

8. [출제 의도] 함수의 극한의 성질을 이용하여 함수의 식을 추론할 수 있는가?

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 2x^3}{x^2} = 1 \text{ 에서}$$

함수 $f(x) - 2x^3$ 은 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.

즉, 상수 a, b 에 대하여

$$f(x) = 2x^3 + x^2 + ax + b \text{ 라 둘 수 있다.}$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + ax + b}{x-1} = 0$$

이고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 극한의 성질에서 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} (2x^3 + ax + b) = 2 + a + b = 0 \text{ 에서}$$

$$b = -a - 2 \text{ 이다. ... (1)}$$

이를 위의 극한에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + ax - a - 2}{x-1} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x^2 + 2x + a + 2)}{x-1} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + 2x + a + 2) = 0$$

$$\Rightarrow a + 6 = 0, a = -6$$

(1)에서 $b = 6 - 2 = 4$ 이다.

$$\therefore f(x) = 2x^3 + x^2 - 6x + 4, f(3) = 49$$

9. [출제 의도] 도함수를 이용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있는가?

방정식 $f(x) = g(x)$ 이 닫힌 구간 $[0, 3]$ 에서 서로 다른 두 실근을 갖는 것은 방정식

$$x^3 - 6x^2 + 11x + 4 - 2x = k$$

$$\Rightarrow x^3 - 6x^2 + 9x + 4 = k$$

이 닫힌 구간 $[0, 3]$ 에서 서로 다른 두 실근을 갖는 것과 같다.

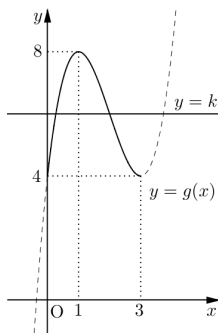
즉, 함수 $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 닫힌 구간 $[0, 3]$ 에서 서로 다른 두 교점을 가져야 한다.

$$g'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

에서 함수 $g(x)$ 의 증감표를 그리면 아래와 같다.

x	0		1		3
$g'(x)$		+	0	-	0
$g(x)$	4	\nearrow	8	\searrow	4

이를 이용하여 함수 $g(x)$ 의 그래프와 $y=k$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



위 그래프로부터 함수 $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 닫힌 구간 $[0, 3]$ 에서 서로 다른 두 교점을 가지기 위해서는 $4 \leq k < 8$ 이어야 함을 알 수 있다.

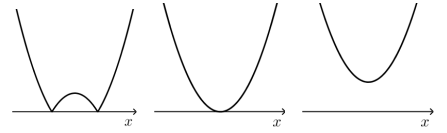
따라서 문제의 조건을 만족시키는 모든 자연수 k 의 값의 합은 $4 + 5 + 6 + 7 = 22$ 이다.

10. [출제 의도] 적분과 미분의 관계를 이용하여 함수의 그래프와 식의 형태를 추론할 수 있는가?

적분과 미분의 관계에 의하여

$$g'(x) = |f(x)| - 1 \text{ 이다.}$$

$f(x)$ 는 이차함수이므로 $|f(x)|$ 의 그래프는 다음과 같이 세 가지 형태로 나타날 수 있다.

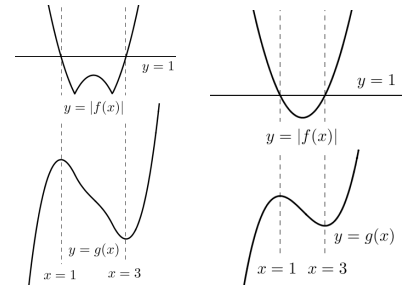


조건 (가)에서 함수 $|f(x)|$ 는 직선 $y=1$ 과 두 점 $(1, 1)$ 과 $(3, 1)$ 에서 접하지 않으면서 만나야 한다.

따라서 함수 $g(x)$ 가 조건 (가)를 만족하려면 함수 $|f(x)|$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 이 두 점 이상에서 만나야 하고, 그것은 다음과 같은 세 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) 함수 $|f(x)|$ 의 그래프가 직선 $y=1$ 과 단 두 점에서 만나는 경우

함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 유일한 극댓값과 $x=3$ 에서 유일한 극솟값을 가지므로 함수 $|f(x)|$ 의 그래프에 따른 함수 $g(x)$ 의 그래프의 개형은 아래와 같다.



함수 $g(x)$ 는 실수 전체에서 미분가능한 함수이므로 함수 $|g(x)|$ 가 $x=c$ 에서 미분가능하지 않으려면 $g(c) = 0, g'(c) \neq 0 \dots (*)$

이어야 한다.

이러한 c 의 개수는 $g(x)$ 의 그래프의 형태로부터 항상 1 또는 3이다.

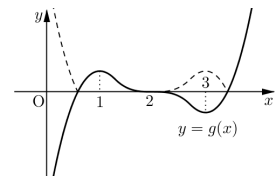
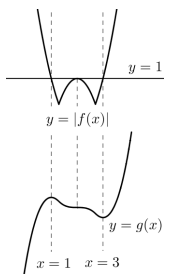
따라서 함수 $|g(x)|$ 가 서로 다른 두 점에서만 미분가능하지 않은 경우는 존재하지 않는다.

(ii) 함수 $|f(x)|$ 의 그래프가 직선 $y=1$ 과 서로 다른 세 점에서 만나는 경우

함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 유일한 극댓값과 $x=3$ 에서 유일한 극솟값을 가지고,

함수 $|f(x)|$ 는 $x=2$ 에 대칭인 함수이므로 $g'(2) = 0$ 이다.

따라서 $g(2) = 0$ 인 경우에만 그림과 같이 함수 $|g(x)|$ 는 서로 다른 두 점에서만 미분가능하지 않다.

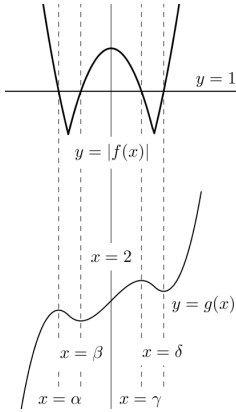


(iii) 함수 $|f(x)|$ 의 그래프가 직선 $y=1$ 과 서로

다른 네 점에서 만나는 경우

함수 $|f(x)|$ 는 $x=2$ 에 대하여 대칭인 함수이므로 다음 그림과 같이 $x=2$ 를 기준으로 좌우로 (i)과 같은 함수의 그래프를 두 개 얻을 수 있다.

(i)에서 함수 $|g(x)|$ 가 미분가능하지 않은 점의 개수는 1 또는 3이므로, 이 경우 함수 $|g(x)|$ 가 서로 다른 두 점에서 미분가능하지 않으려면 $x=2$ 를 기준으로 왼쪽 그래프와 오른쪽 그래프에서 각각 1개의 미분가능하지 않은 점을 얻어야 한다.



이때 함수 $g(x)$ 가 $x=\alpha$, $x=\gamma$ 에서 극대, $x=\beta$, $x=\delta$ 에서 극소라고 하자. ($\alpha < \beta < \gamma < \delta$)

(*)을 만족하는 실수 c 에 대하여 그래프의 형태로부터

(1) $c > 2$ 이면

$c > \delta$ 이고 $g(c) \geq g(\gamma)$ 또는 $c < \alpha$ 이고 $g(c) \leq g(\beta)$

(2) $c < 2$ 이면

$c > \beta$ 이고 $g(c) \geq g(\alpha)$ 또는 $c < \alpha$ 이고 $g(c) \leq g(\beta)$ 이어야 한다.

그런데 함수 $g(x)$ 는 열린 구간 (β, γ) 에서 증가하므로 (1)과 (2)의 한 경우만을 각각 만족하는 실수 c 는 존재하지 않는다.

따라서 이 경우, 함수 $|g(x)|$ 가 서로 다른 두 점에서만 미분가능하지 않은 경우는 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 문제의 조건을 만족하는 경우는 (ii)뿐이고, (ii)에서

이차함수 $f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이고, $|f(x)|$ 는 $y=1$ 에 접하므로 $f(x)$ 의 최솟값은 -1 이다.

즉, $f(x) = p(x-2)^2 - 1$ ($p > 0$) 이고,

$f(1) = f(3) = 1$ 이므로 $p=2$ 이다.

한편, 조건 (나)와 (ii)에서 함수 $|g(x)|$ 의 개형으로부터 $g(a) = 0$ 이고, 함수 $|g(x)|$ 가 $x=a$ 에서 미분가능한 실수 a 는 2뿐이다.

따라서 $a=2$ 이다.

이때 함수 $|f(x)|$ 가 x 축과 만나는 점을 구하면

$$f(x) = 2(x-2)^2 - 1 = 0$$

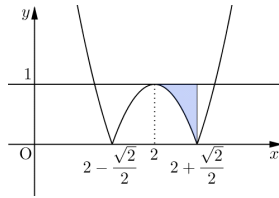
$$\Rightarrow x = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore g\left(a + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \int_2^{2+\frac{\sqrt{2}}{2}} (|f(x)| - 1) dx$$

$$= \int_2^{2+\frac{\sqrt{2}}{2}} \{1 - 2(x-2)^2 - 1\} dx$$

$$= - \int_2^{2+\frac{\sqrt{2}}{2}} 2(x-2)^2 dx = - \left[\frac{2}{3}(x-2)^3 \right]_2^{2+\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 = - \frac{\sqrt{2}}{6}$$



$$\therefore k = -\frac{\sqrt{2}}{6}, 216k^2 = 216 \times \frac{1}{18} = 12$$

11. [출제 의도] 적분과 미분의 관계를 이용하여 함수의 극값을 구할 수 있는가?

$f'(x) = (x-1)(x-a)$ 에서 함수 $f(x)$ 가 극값을 가지려면 $a \neq 1$ 이어야 한다.

이때 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 과 $x=a$ 에서 극값을 가지고, 이때 $f(1) = 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 극댓값이 $\frac{4}{3}$ 이려면 $f(a) = 4$ 이고 $a < 1$ 이어야 한다.

$$\begin{aligned} f(a) &= \int_1^a (t-1)(t-a) dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}(a+1)t^2 + at \right]_1^a \\ &= -\frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{6} \\ &= -\frac{(a-1)^3}{6} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore a = -1$$

12. [출제 의도] 수직선 위의 점의 위치와 속도에 대하여 이해하고 있는가?

두 점 P, Q의 시각 t 에서의 속도를 각각 v_1, v_2 라 하면

$$v_1 = 3t^2 - 1, v_2 = 6t - 10$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |v_1 - v_2| &= |3t^2 - 6t + 9| \\ &= |3(t-1)^2 + 6| = 3(t-1)^2 + 6 \end{aligned}$$

이므로 $t=1$ 일 때 두 점 P, Q의 속도의 차가 최소이다.

$t=1$ 두 점 P, Q의 위치는 각각 0, -3 이므로 두 점 P, Q 사이의 거리는 3이다.

13. [출제 의도] 곡선 위의 점에서 그은 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

$$f(x) = 3x^2 - 2kx - 2k = -2k \text{에서}$$

$$3x^2 - 2kx = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{2k}{3}$$

$f(0) = 0$ 이므로 곡선 위의 점 $(0, f(0))$ 에서 그은 접선의 방정식은 $y = -2kx$

$$f\left(\frac{2k}{3}\right) = -\frac{4k^3}{27} - \frac{4k^2}{3} \text{이므로}$$

곡선 위의 점 $\left(\frac{2k}{3}, f\left(\frac{2k}{3}\right)\right)$ 에서 그은 접선의

$$\text{방정식은 } y = -2kx - \frac{4k^3}{27}$$

두 점선 사이의 거리는 직선 $y = -2kx - \frac{4k^3}{27}$ 와

원점 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{\left| \frac{4k^3}{27} \right|}{\sqrt{(2k)^2 + 1}} = \frac{k^2}{27}$$

$$\Rightarrow \frac{4k^3}{27} = \frac{k^2}{27} \sqrt{4k^2 + 1}$$

$$\Rightarrow 4k = \sqrt{4k^2 + 1}, 16k^2 = 4k^2 + 1$$

$$\Rightarrow 12k^2 = 1 \therefore k = \frac{\sqrt{3}}{6} (\because k > 0)$$

14. [출제 의도] 함수의 연속의 정의를 이해하고 있는가?

두 함수 $f(x)$ 와 $f(3-x)$ 는 $x=1$ 과 $x=2$ 를 제외한 다른 모든 점에서는 연속이다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)f(3-x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \\ &= a(-2b+4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)f(3-x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \\ &= (a+1)(2a+1) \end{aligned}$$

$$f(1)f(3-1) = f(1)f(2) = (a+1)(-2b+4)$$

이고 함수 $f(x)f(3-x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이므로 $a(-2b+4) = (a+1)(-2b+4) \Rightarrow b=2$

$$(a+1)(2a+1) = 0 \text{에서 } a = -1 \text{ 또는 } a = -\frac{1}{2}$$

함수 $f(x)f(3-x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이므로 위와 같은 방법으로 $b=2$ 이고, $a=-1$ 또는 $a=-\frac{1}{2}$ 을 얻을 수 있다.

함수 $f(2-x)$ 는 $x=0$ 과 $x=1$ 을 제외한 모든 점에서 연속이다.

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이고 $f(0)=0$ 이므로 함수 $f(x)f(2-x)$ 는 $x=0, x=2$ 에서 연속이다.

한편

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)f(2-x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a(a+1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)f(2-x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a(a+1)$$

$$f(1)f(2-1) = \{f(1)\}^2 = (a+1)^2$$

이고 함수 $f(x)f(2-x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이므로

$$a(a+1) = (a+1)^2 \Rightarrow a = -1$$

$$\therefore a = -1, b = 2, a + b = 1$$

15. [출제 의도] 적분과 미분의 관계를 이용하여 다항함수에 관한 문제를 해결할 수 있는가?

$$\neg) g'(x) = \int_1^x f(t) dt + (x-1)f(x)$$

이므로 $g'(1) = 0$ 이다. (참)

↳) $f(1) > 0$ 이므로 $x=1$ 근방에서

$x < 1$ 이면 $g'(x) < 0$ 이고,

$x > 1$ 이면 $g'(x) > 0$ 이다.

즉, $x=1$ 좌우에서 $g'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 극솟값을 갖는다. (거짓)

ㄷ) $f(1) = 0$ 이면 $h(x) = \int_1^x f(t)dt$ 에 대하여
 $h(1) = h'(1) = 0$ 이므로 함수 $h(x)$ 는 $(x-1)^2$ 을
 인수로 갖는다.

$h(x)$ 의 최고차항의 계수는 $\frac{1}{3}$ 이므로

$g(x) = \frac{1}{3}(x-1)^3(x-\alpha)$ 의 꼴로 나타낼 수 있다.

$g'(x) = \frac{1}{3}(x-1)^2(4x-3\alpha-1)$

에서 함수 $g(x)$ 는 $x = \frac{3\alpha+1}{4}$ 에서 유일한 극솟값을

가지므로 $x = \frac{3\alpha+1}{4}$ 에서 최솟값을 갖는다.

$$g\left(\frac{3\alpha+1}{4}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{3\alpha-3}{4}\right)^3\left(\frac{-\alpha+1}{4}\right)$$

$$= -\frac{9(\alpha-1)^4}{256} = -\frac{1}{9}$$

에서 $(\alpha-1)^4 = \frac{256}{81} \Rightarrow (\alpha-1)^2 = \frac{16}{9}$ 이고,

$$\int_1^x f(t)dt = \frac{1}{3}(x-1)^2(x-\alpha)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}\{(x-1)(3x-2\alpha-1)\}$$

$$= \frac{1}{3}\{(3x^2-2(\alpha+2)x+2\alpha+1)\}$$

$$= \left(x - \frac{\alpha+2}{3}\right)^2 - \frac{(\alpha-1)^2}{9}$$

$$= \left(x - \frac{\alpha+2}{3}\right)^2 - \frac{16}{81}$$

이므로 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $-\frac{16}{81}$ 이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

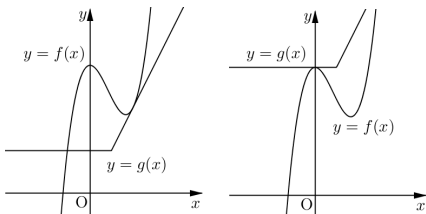
16. [출제 의도] 도함수를 활용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있는가?

$f'(x) = 3x^2 - 5x = x(3x-5)$ 에서

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값을, $x = \frac{5}{3}$ 에서
 극솟값을 갖는다. 따라서

$$g(x) = \begin{cases} 2x-1+k & (x \geq 1) \\ k+1 & (x < 1) \end{cases}$$

에서 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 그래프가 서로 다른
 두 점에서만 만나려면 다음 그림과 같이 두 함수의
 그래프가 접하면서 만나는 점이 존재해야 한다.



(1) 두 함수의 그래프가 $x > 1$ 에서 접하는 경우
 곡선 $y = f(x)$ 위의 점에서 접선의 기울기가 2인
 접선의 방정식을 구하면

$$f'(x) = 2$$

$$3x^2 - 5x - 2 = 0, (3x+1)(x-2) = 0$$

$$x > 1$$
이므로 $x = 2$

즉, 구하는 접선은 $(2, f(2)) = (2, 4)$ 를 지나므로
 $y = 2x$ 이다. $\therefore k = 1$

(2) 두 함수의 그래프가 $x < 1$ 에서 접하는 경우
 $k+1$ 이 함수 $f(x)$ 의 극댓값이어야 하고, 함수
 $f(x)$ 의 극댓값은 $f(0) = 6$ 이므로

$$k+1 = 6, k = 5$$

(1), (2)에서 문제의 조건을 만족시키는 모든 k 의
 값의 합은 $1+5 = 6$ 이다.

17. [출제 의도] 도함수를 활용하여 문제의 조건을 만족하는 함수를 구할 수 있는가?

함수 $g(x)$ 가 실수 전체에서 정의된 역함수를
 가지려면 함수 $f(x)$ 가 열린 구간 $(1, 3)$ 에서 극값을
 갖지 않아야 한다. 따라서 다음과 같은 두 가지
 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(1) 닫힌 구간 $[1, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 가 증가하는
 경우

이 경우 함수 $g(x)$ 또한 실수 전체에서 증가한다.
 즉, 조건 (가)를 만족하려면 함수 $g(x)$ 는 실수
 전체의 집합에서 연속이어야 한다.

즉, $f(1) = 3, f(3) = 5$ 이다.

한편 열린 구간 $(1, 3)$ 에서 함수 $g(x)$ 는
 미분가능하고,

$$\lim_{x \rightarrow t^-} g'(x) + \lim_{x \rightarrow t^+} g'(x) = 2f'(t)$$

이다. 또한, 조건 (나)에서 $1 < t < 3$ 일 때,

$$2f'(t) < 1 \Rightarrow f'(t) < \frac{1}{2}$$
이어야 한다.

즉, 열린 구간 $(1, 3)$ 에서 $0 \leq f'(x) < \frac{1}{2}$ 이어야
 한다. ... (#)

그런데 함수 $f(x)$ 는 닫힌 구간 $[1, 3]$ 에서 연속이고
 열린 구간 $(1, 3)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에
 의하여

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = 1 = f'(c)$$

인 c 가 열린 구간 $(1, 3)$ 에 적어도 하나 존재해야
 한다. 이는 (#)에 모순이다.

(2) 닫힌 구간 $[1, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 가 감소하는
 경우

조건 (가)에 의하여 $f(1) = 5, f(3) = 3$ 이어야 한다.

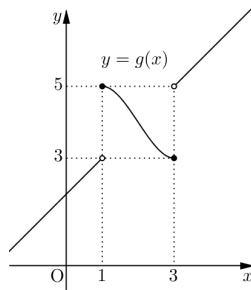
한편 $\lim_{x \rightarrow 1^-} g'(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 3^+} g'(x) = 1$ 이고

닫힌 구간 $[1, 3]$ 에서 $f'(x) \leq 0$ 이므로

조건 (나)에서

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g'(x) = f'(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} g'(x) = f'(3) = 0$$
이어야 한다.



따라서 $f'(x) = a(x-1)(x-3)$ ($a > 0$)의 꼴로

나타낼 수 있고,

$$f(x) = a\left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right) + b$$
 (b 는 상수)

이다.

$$f(1) = 5, f(3) = 3$$
이므로

$$\frac{4}{3}a + b = 5, b = 3 \quad \therefore a = \frac{3}{2}, b = 3$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x + 3$$

$$\therefore f(5) = 13$$

18. [출제 의도] 함수의 극한을 이해하고 있는가?

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2$$
이므로

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 2$$
이어야 한다.

문제의 그림에서 위 조건을 만족시키는 실수 a 의
 값은 $a = 2$ 또는 $a = 3$ 이다.

따라서 문제의 조건을 만족시키는 모든 실수 a 의
 값의 합은 $2+3 = 5$

19. [출제 의도] 수직선 위의 점이 이동한 거리를 구할 수 있는가?

점 P의 시간 t 에서의 속도를 v 라 하면

$$v = 3t^2 - 9t + 6 = 3(t-1)(t-2)$$

따라서 $\alpha = 1, \beta = 2$ 이다.

$1 < t < 2$ 에서 $v < 0$ 이므로

점 P가 $t = \alpha$ 에서 $t = \beta$ 까지 이동한 거리는

$$|x(1) - x(2)| = \frac{9}{2} - 4 = \frac{1}{2}$$

20. [출제 의도] 적분과 미분의 관계를 이해하고 있는가?

문제에서 주어진 등식의 양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$\int_0^1 (t^3 + at - 2)dt = 0$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{2}at^2 - 2t \right]_0^1 = \frac{1}{4}a - \frac{7}{4} = 0$$

$$\therefore a = \frac{7}{2}$$

주어진 등식으로부터

(1) $x \neq 0$ 일 때,

$$(x-1)f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \left(t^3 + \frac{7}{2}t - 2\right)dt$$

이고, 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이므로

적분과 미분의 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x-1)f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x \left(t^3 + \frac{7}{2}t - 2\right)dt$$

$$\Rightarrow -f(0) = -2, f(0) = 2$$

(2) $x \neq 1$ 일 때,

$$xf(x) = \frac{1}{x-1} \int_0^x \left(t^3 + \frac{7}{2}t - 2\right)dt$$

$$= \frac{1}{x-1} \int_1^x \left(t^3 + \frac{7}{2}t - 2\right)dt$$

$$\left(\because \int_0^1 \left(t^3 + \frac{7}{2}t - 2\right)dt = 0 \right)$$

이고, 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이므로

적분과 미분의 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 1} xf(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x \left(t^3 + \frac{7}{2}t - 2\right)dt$$

$$\Rightarrow f(1) = 1 + \frac{7}{2} - 2 = \frac{5}{2}$$

(1), (2)에서

$$\therefore f(0) + f(1) = 2 + \frac{5}{2} = \frac{9}{2}$$

21. [출제 의도] 도함수의 성질을 이용하여 함수의 식을 추론할 수 있는가?

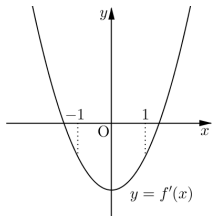
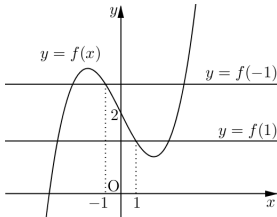
$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 라 두면

$$f(-x) + f(x) = 2ax^2 + 2c = 2$$

위 등식은 항등식이므로 $a = 0, c = 1$

$$\therefore f(x) = x^3 + bx + 1$$

조건 (나)를 만족시키려면 아래 그림과 같이 열린 구간 $(-1, 1)$ 에서 함수 $f(x)$ 가 감소해야 한다.

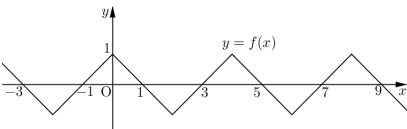


$f'(x) = 3x^2 + b$ 에서 모든 실수 x 에 대하여 $f'(-x) = f'(x)$ 이므로 함수 $f(x)$ 가 열린 구간 $(-1, 1)$ 에서 감소하려면 $f'(1) \leq 0$ 이어야 한다.

$$f'(1) = b + 3 \leq 0 \text{에서 } b \leq -3$$

$$\therefore f(2) = 2b + 9 \leq 3$$

22. [출제 의도] 정적분을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?



함수 $f(x)$ 는 주기가 4인 주기함수이고,

위 그래프에서 $\int_0^4 f(x)dx = 0$ 이므로

임의의 실수 a 에 대하여 $\int_a^{a+4} f(x)dx = 0$ 이다.

따라서

$$\begin{aligned} h(x+4) &= \int_t^{x+4} f(u)du \\ &= \int_t^x f(u)du + \int_x^{x+4} f(u)du \\ &= \int_t^x f(u)du + h(x) \end{aligned}$$

이다. ... (1)

(ㄱ) (1)에 의하여 $g(3)$ 은 닫힌 구간 $[3, 7]$ 에서

함수 $\int_3^x f(u)du$ 의 최솟값과 같다.

$h'(x) = f(x)$ 이고, 함수 $f(x)$ 의 그래프로부터

$3 < x < 5$ 일 때 $f(x) > 0 \Rightarrow h(x)$ 는 증가
 $5 < x < 7$ 일 때 $f(x) < 0 \Rightarrow h(x)$ 는 감소
 이므로

함수 $\int_3^x f(u)du$ 는 $x=3$ 또는 $x=7$ 일 때 최솟값을 갖는다.

이때 $\int_3^3 f(u)du = \int_3^7 f(u)du = 0$ 이므로

$g(3) = 0$ 이다. (참)

(ㄴ) (1)로부터 함수 $h(x)$ 가 극소인 모든 점에서 함숫값이 동일하고, 함수 $h(x)$ 가 극소인 점에서 함수 $h(x)$ 가 최솟값을 갖는다.

함수 $h'(x) = f(x)$ 에서

함수 $h(x)$ 가 극소인 점은 $f(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌는 점이므로 함수 $h(x)$ 는 $x = 4k + 3$ (k 는 정수)에서 극솟값을 갖는다.

특히 $x = 3$ 일 때 함수 $h(x)$ 는 극솟값을 가지고, (#)에 의하여 $x = 3$ 일 때 함수 $h(x)$ 는 최솟값을 갖는다.

$$\therefore g(t) = h(3) = \int_t^3 f(u)du \dots (2)$$

한편 $g(1) = -1$ 이고, (1)과 같은 방법으로 모든 실수 t 에 대하여 $g(t+4) = g(t)$ 이므로

$$g(t) = -1 \Leftrightarrow t = 4k + 3 \text{ (} k \text{는 정수)}$$

이고, (2)에서

$$g'(t) = -f(t)$$

이고 $f(4k+3) = 0$ 이므로 $g'(t) = 0$ 이다. (참)

(ㄷ) 닫힌구간 $[0, 4]$ 에서

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & (0 \leq x < 2) \\ x-3 & (2 \leq x < 4) \end{cases}$$

이므로

$0 \leq t < 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} g(t) &= h(3) \\ &= \int_t^3 f(x)dx \\ &= \int_t^2 (-x+1)dx + \int_2^3 (x-3)dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^2 + x \right]_t^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}t^2 - t - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$2 \leq t < 4$ 일 때,

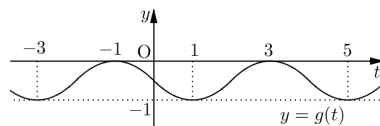
$$\begin{aligned} g(t) &= h(3) \\ &= \int_t^3 f(x)dx = \int_t^3 (x-3)dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 - 3x \right]_t^3 = -\frac{1}{2}t^2 + 3t - \frac{9}{2} \end{aligned}$$

따라서 함수 $g(t)$ 는

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 - t - \frac{1}{2} & (0 \leq t < 2) \\ -\frac{1}{2}t^2 + 3t - \frac{9}{2} & (2 \leq t < 4) \end{cases}$$

이고, 모든 실수 t 에 대하여 $g(t+4) = g(t)$ 를 만족시킨다. 즉, 임의의 실수 t 에 대하여

$$\int_t^{t+4} g(t)dt = \int_0^4 g(t)dt \text{ 이다.}$$



또한

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 g(t)dt &= \int_3^4 g(t)dt \\ &= \int_3^4 \left(-\frac{1}{2}t^2 + 3t - \frac{9}{2} \right) dt \\ &= \left[-\frac{1}{6}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - \frac{9}{2}t \right]_3^4 = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(t)dt &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}t^2 - t - \frac{1}{2} \right) dt \\ &= \left[\frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t \right]_0^1 = -\frac{5}{6} \end{aligned}$$

이므로 $\int_{-1}^1 g(t)dt = -1$ 이고,

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 g(t)dt &= \int_0^4 g(t)dt \\ &= \int_0^2 \left(\frac{1}{2}t^2 - t - \frac{1}{2} \right) dt \\ &\quad + \int_2^4 \left(-\frac{1}{2}t^2 + 3t - \frac{9}{2} \right) dt \\ &= \left[\frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t \right]_0^2 \\ &\quad + \left[-\frac{1}{6}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - \frac{9}{2}t \right]_2^4 \\ &= -\frac{5}{3} - \frac{1}{3} = -2 \end{aligned}$$

이고 모든 실수 t 에 대하여 $g(t+4) = g(t)$ 이므로

$$\int_{-1}^3 g(t)dt = \int_0^4 g(t)dt = -2 \text{ 이다.}$$

따라서 $\int_1^3 g(t)dt = -1$ 이다.

한편 $\int_{-n}^n g(t)dt$ 의 값은

(i) n 이 짝수인 경우

$$\int_{-n}^n g(t)dt = \frac{n}{2} \int_0^4 g(t)dt = -n$$

(ii) n 이 홀수인 경우

$n = 2k - 1$ (k 는 자연수)라 하면

$$\begin{aligned} \int_{-n}^n g(t)dt &= \int_{-2k+1}^{2k-1} g(t)dt \\ &= \int_{-2k+1}^{-2k+1+4(k-1)+2} g(t)dt \\ &= (k-1) \int_{-2k+1}^{-2k+5} g(t)dt + \int_{2k-3}^{2k-1} g(t)dt \\ &= (k-1) \int_0^4 g(t)dt + \int_{2k-3}^{2k-1} g(t)dt \\ &= -2(k-1) + \int_{2k-3}^{2k-1} g(t)dt \end{aligned}$$

이고

$$\int_{2k-3}^{2k-1} g(t)dt \text{의 값은 } \int_{-1}^1 g(t)dt \text{ 또는 } \int_1^3 g(t)dt \text{와}$$

같으므로 $\int_{2k-3}^{2k-1} g(t)dt = -1$ 이다.

$$\therefore \int_{-2k+1}^{2k-1} g(t)dt = -2(k-1) - 1 = -2k + 1$$

따라서 (i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여

$$\int_{-n}^n g(t)dt = -n \text{ 이다. (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

23. [출제 의도] 함수의 극한의 성질을 이용하여 함수의 식을 구할 수 있는가?

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{|x-1|} = \alpha \text{ 이므로 함수의 극한의 성질에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0$$

인수정리에 의하여 최고차항의 계수가 1인 이차식 $g(x)$ 에 대하여

$$f(x) = (x-1)g(x)$$

한편

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)g(x)}{x-1} = g(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)g(x)}{-(x-1)} = -g(1)$$

이고 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{|x-1|}$ 의 값이 존재하므로

$$g(1) = -g(1) \Rightarrow g(1) = 0$$

따라서 $f(x) = (x-1)^2(x-a)$ (a 는 실수)

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x-a)}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1} |x-1|(x-a) = 0$$

$$\therefore \alpha = 0$$

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = \beta$ 이므로 함수의 극한의 성질에서

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = 0$$

$$\therefore f(x) = (x-1)^2(x-3)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x-1)^2 = 4$$

$$\therefore \beta = 4$$

$$\therefore f(\alpha + \beta) = f(4) = 9$$

24. [출제 의도] 도함수를 활용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있는가?

$$f'(1) = g'(1) = 0, f'(3) = g'(3) = 2$$

이므로 두 방정식

$$f'(x) - (x-1) = 0, g'(x) - (x-1) = 0 \text{은 각각 } x=1, x=3 \text{을 실근으로 갖는다.}$$

인수정리에 의하여 실수 a, b 에 대하여

$$f'(x) - (x-1) = a(x-1)(x-3)$$

$$g'(x) - (x-1) = b(x-1)(x-3)$$

주어진 그림으로부터

$$f'(0) = 2 \text{이므로 } a = 1$$

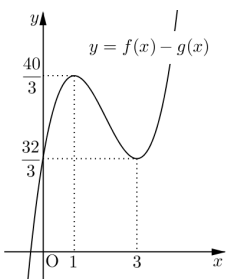
$$g'(4) = 0 \text{이므로 } b = -1$$

$$\therefore f'(x) - g'(x) = 2(x-1)(x-3) = 2x^2 - 8x + 6 \dots (*)$$

$$\Rightarrow f(x) - g(x) = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x + c \text{ (} c \text{는 상수)}$$

$$f(-1) - g(-1) = 0 \text{이므로 } c = \frac{32}{3}$$

(*)에서 함수 $f(x) - g(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값 $\frac{40}{3}$ 을 가지고, $x=3$ 에서 극솟값 $\frac{32}{3}$ 을 갖는다.



방정식 $f(x) - g(x) = n$ 의 실근의 개수가 3이라면

함수 $y = f(x) - g(x)$ 와 $y = n$ 의 교점의 개수가 3이어야 한다.

$$\text{따라서 } \frac{32}{3} < n < \frac{40}{3} \text{이고,}$$

가능한 정수 n 의 값은 $n = 11, 12, 13$ 이다.

따라서 문제의 조건을 만족시키는 모든 정수 n 의 값의 합은 $11 + 12 + 13 = 36$

25. [출제 의도] 도함수를 활용하여 문제의 조건을 만족하는 함수를 구할 수 있는가?

$$g(x) = \begin{cases} -2 & (x < 0) \\ 2x - 2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

에서 방정식 $g(x) = h(x)$ 를 풀면

(i) $x < 0$ 일 때

$$-\frac{1}{2}x(x-2) + 2 = -2$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0, (x+2)(x-4) = 0$$

에서 $x < 0$ 이므로 $x = -2$

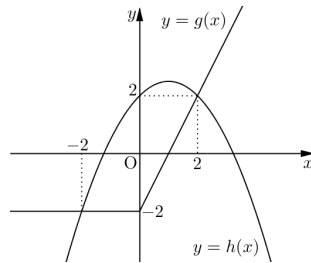
(ii) $x \geq 0$ 일 때

$$-\frac{1}{2}x(x-2) + 2 = 2x - 2$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0, (x+4)(x-2) = 0$$

에서 $x \geq 0$ 이므로 $x = 2$

따라서 두 함수 $y = g(x)$ 와 $y = h(x)$ 가 만나는 두 점의 좌표는 $(-2, -2)$ 와 $(2, 2)$ 이고, 아래 그림과 같이 $-2 \leq x \leq 2$ 에서 $g(x) \leq h(x)$ 이다.



한편 부등식 $\{f(x) - g(x)\}\{f(x) - h(x)\} \leq 0$ 을 만족하려면

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \text{ 또는}$$

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

이어야 하고, 그 해가 $-2 \leq x \leq 2$ 뿐이므로

$-2 \leq x \leq 2$ 에서만 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ 이어야

한다. 즉, 함수 $f(x)$ 의 그래프가

$-2 \leq x \leq 2$ 에서만 두 함수 $y = g(x), y = h(x)$ 의 그래프 사이에 존재해야 한다.

이때 두 함수 $y = g(x)$ 와 $y = h(x)$ 가 만나는 두 점의 좌표가 $(-2, -2)$ 와 $(2, 2)$ 이므로

$$f(2) = 2, f(-2) = -2 \text{이다.} \dots (1)$$

한편 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ 이고

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -2, \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty \text{이므로}$$

충분히 작은 x 에 대하여 $f(x) > g(x)$ 이고

$$f(x) > h(x) \text{이다.}$$

따라서 문제의 조건을 만족시키려면

구간 $(-\infty, -2)$ 에 속하는 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) > g(x) \text{이고 } f(x) > h(x) \text{이어야 한다.}$$

즉, $x < -2$ 일 때와 $x > 2$ 일 때 모두

$$f(x) > g(x) \text{이므로 함수 } f(x) - g(x) \text{는 } x = -2 \text{에서 극솟값을 갖는다.}$$

위와 비슷한 방법으로 함수 $f(x) - g(x)$ 는 $x = 2$ 에서도 극솟값을 가져야 한다.

$$\therefore f'(-2) = 0, f'(2) = 2 \dots (2)$$

(1)에서 인수정리에 의하여

$$f(x) - x = (x+2)(x-2)(ax^2 + bx + c) = (x^2 - 4)(ax^2 + bx + c) \text{ (} a > 0 \text{)}$$

$$\Rightarrow f(x) = (x^2 - 4)(ax^2 + bx + c) + x \text{ (} a > 0 \text{)}$$

따라서

$$f'(x) = 2x(ax^2 + bx + c) + (x^2 - 4)(2ax + b) + 1$$

이므로 (2)에서

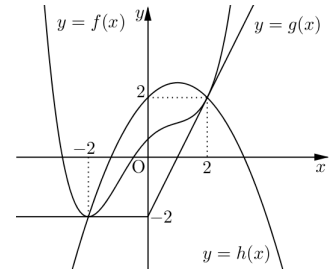
$$f'(-2) = -4(4a - 2b + c) + 1$$

$$f'(2) = 4(4a + 2b + c) + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 16a - 8b + 4c = 1 \\ 16a + 8b + 4c = 1 \end{cases}$$

위 연립방정식을 풀면 $b = 0, c = \frac{1}{4} - 4a$

$$\therefore f(x) = (x^2 - 4)\left(ax^2 - 4a + \frac{1}{4}\right) + x \text{ (} a > 0 \text{)}$$



한편 $-2 \leq x \leq 2$ 에서

$$f(x) - h(x) = (x^2 - 4)\left(ax^2 - 4a + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}x^2 - 2 = (x^2 - 4)\left(ax^2 - 4a + \frac{3}{4}\right) \leq 0$$

이어야 하고,

$$-2 \leq x \leq 2 \text{에서 } x^2 - 4 \leq 0 \text{이므로}$$

$$-2 \leq x \leq 2 \text{에서 } ax^2 - 4a + \frac{3}{4} \geq 0 \text{이어야 한다.}$$

$$\text{즉, } ax^2 \geq 4a - \frac{3}{4} \text{이어야 하고,}$$

$$-2 \leq x \leq 2 \text{에서 함수 } y = ax^2 \text{의 최솟값은}$$

$$0 \text{이므로 } 4a - \frac{3}{4} \leq 0 \text{이어야 한다.}$$

$$\therefore a \leq \frac{3}{16} \dots (3)$$

한편

$$\int_{-2}^2 \{f(x) - h(x)\} dx$$

$$= \int_{-2}^2 \left\{ ax^4 - \left(8a - \frac{3}{4}\right)x^2 + 16a - 3 \right\} dx$$

$$= 2 \int_0^2 \left\{ ax^4 - \left(8a - \frac{3}{4}\right)x^2 + 16a - 3 \right\} dx$$

$$= 2 \left[\frac{1}{5}ax^5 - \frac{1}{3}\left(8a - \frac{3}{4}\right)x^3 + (16a - 3)x \right]_0^2$$

$$= 2 \left\{ \frac{32}{5}a - \frac{8}{3}\left(8a - \frac{3}{4}\right) + 2(16a - 3) \right\}$$

$$= \frac{512}{15}a - 8$$

(3)에 의하여

$$\int_{-2}^2 \{f(x) - h(x)\} dx \leq \frac{512}{15} \cdot \frac{3}{16} - 8 = -\frac{8}{5}$$

$$\therefore M = -\frac{8}{5}, 25M^2 = 25 \cdot \left(-\frac{8}{5}\right)^2 = 64$$

26. [출제 의도] 함수의 그래프를 이용하여 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

주어진 그래프로부터 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$

$$\begin{aligned} \therefore f(a) + \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \\ = f(3) + \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 4 + 2 = 6 \end{aligned}$$

27. [출제 의도] 정적분의 값을 계산할 수 있는가?

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^1 (ax + b) dx \\ &= 2b = 2 \Rightarrow b = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (x-1)f(x) dx &= \int_{-1}^1 xf(x) dx - \int_{-1}^1 f(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 (ax^2 + bx) dx - 2 \\ &= \left[\frac{1}{3} ax^3 \right]_{-1}^1 - 2 = \frac{2}{3} a - 2 = 2 \\ \Rightarrow a &= 6 \end{aligned}$$

$$\therefore f(2) = 2a + b = 12 + 1 = 13$$

28. [출제 의도] 도함수를 활용하여 함수의 극대와 극소를 판정할 수 있는가?

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 6(k+1)x + 6k \\ &= 6(x-1)(x-k) \end{aligned}$$

에서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$, $x=k$ 에서 극값을 갖는다.

(1) $k > 1$ 인 경우

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극대값을 갖는다.

문제의 조건에서 $2k+1=1$ 이므로 $k=0$ 이다.

이는 가정과 모순이다.

(2) $k < 1$ 인 경우

함수 $f(x)$ 는 $x=k$ 에서 극대값을 갖는다.

문제의 조건에서 $2k+1=k$ 이므로 $k=-1$ 이다.

(1), (2)에서 $k=-1$ 이므로

$$f(x) = 2x^3 - 6x + 1$$

이고, 함수 $f(x)$ 의 극소값은 $f(1) = -3$ 이다.

29. [출제 의도] 도함수와 함수의 극한의 성질을 이용하여 함수의 식을 구할 수 있는가?

문제의 조건에서 $f(1) = g(1)$, $f'(1) = g'(1)$

이므로 다항식 $f(x) - g(x)$ 는 $(x-1)^2$ 을 인수로 갖는다.

또한 주어진 극한으로부터 $f(4) - g(4) = 0$

이므로 다항식 $f(x) - g(x)$ 는 $x-4$ 를 인수로 갖는다.

$f(x) - g(x) = a(x-1)^2(x-4)$ 라 하면

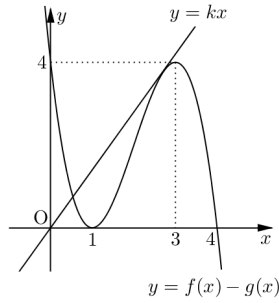
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - g(x)}{x-4} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{a(x-1)^2(x-4)}{x-4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} a(x-1)^2 = 9a = -9 \end{aligned}$$

$$\therefore a = -1, f(x) - g(x) = -(x-1)^2(x-4)$$

그림과 같이 방정식 $f(x) - g(x) = kx$ 가 서로 다른 두 실근을 가지려면 직선 $y = kx$ 가 곡선 $y = f(x) - g(x)$ 의 접선이어야 한다.

직선 $y = kx$ 와 곡선 $y = f(x) - g(x)$ 가 접하는 점의 좌표를 $(t, f(t) - g(t)) = (t, -(t-1)^2(t-4))$

라 하면



$$\begin{aligned} f'(x) - g'(x) &= -2(x-1)(x-4) - (x-1)^2 \\ &= (x-1)(-2x+8-x+1) \\ &= -3(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

에서

$$\frac{-(t-1)^2(t-4)}{t-0} = -3(t-1)(t-3)$$

(1) $t=1$ 인 경우 $f'(1) - g'(1) = 0$ 이므로 $k=0$ 이다.

(2) $t \neq 1$ 인 경우 주어진 방정식은

$$\frac{(t-1)(t-4)}{t} = 3(t-3)$$

$$\Rightarrow t^2 - 5t + 4 = 3t^2 - 9t$$

$$\Rightarrow t^2 - 2t - 2 = 0$$

이다. 위 두 방정식의 두 실근을 α, β 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -2$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 8$$

이때 $k = f'(t) = -3t^2 + 12t - 9$

이므로 문제의 조건을 만족시키는 모든 실수 k 의 값의 합은

$$\begin{aligned} 0 + (-3\alpha^2 + 12\alpha - 9) + (-3\beta^2 + 12\beta - 9) \\ = -3(\alpha^2 + \beta^2) + 12(\alpha + \beta) - 18 \\ = -24 + 24 - 18 = -18 \end{aligned}$$

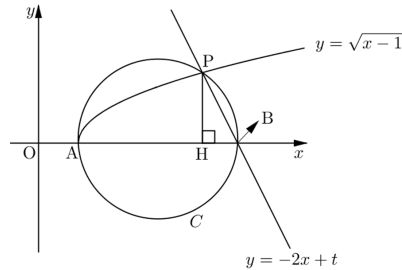
30. [출제 의도] 삼각함수를 활용하여 함수의 극한값을 계산할 수 있는가?

점 P의 좌표를 $(u, \sqrt{u-1})$ 라 하고, 점 P에서

x 축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\tan \angle PBH = 2$ 이고 $\angle PBH$ 는 예각이므로

$$\sin \angle PBH = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos \angle PBH = \frac{1}{\sqrt{5}}$$



$\overline{AP} = \sqrt{(u-1)^2 + u-1} = \sqrt{u(u-1)}$ 이고,

원 C의 반지름을 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$$2R = \frac{\overline{AP}}{\sin \angle PBH} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{5u(u-1)}}{4}$$

따라서 원 C의 넓이는

$$\pi R^2 = \frac{5u(u-1)}{16} \pi \dots \textcircled{1}$$

한편 $\overline{PH} = \sqrt{u-1}$ 이므로

$$\overline{BP} = \frac{\sqrt{5}}{2} \overline{PH} = \frac{\sqrt{5(u-1)}}{2} \dots \textcircled{2}$$

또한 직선 BP의 기울기가 -2 이므로

$$\frac{\sqrt{u-1}}{u - \frac{t}{2}} = -2 \Rightarrow 2u + \sqrt{u-1} = t - 2$$

$$\Rightarrow 2(u-1) + \sqrt{u-1} = t - 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{u-1}(2\sqrt{u-1} + 1) = t - 2$$

따라서 $2\sqrt{t-1} + 1 > 0$ 이므로

$$t \rightarrow 2 + \text{일 때 } u \rightarrow 1 + \dots \textcircled{3}$$

①, ②, ③에 의하여

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 2+} \frac{f(t)g(t)}{(t-2)^3} \\ = \lim_{u \rightarrow 1+} \frac{\frac{5u(u-1)}{16} \pi \times \frac{\sqrt{5(u-1)}}{2}}{\{\sqrt{u-1}(2\sqrt{u-1} + 1)\}^3} \\ = \lim_{u \rightarrow 1+} \frac{(\sqrt{u-1})^3 \times \frac{5u}{16} \pi \times \frac{\sqrt{5}}{2}}{(\sqrt{u-1})^3 (2\sqrt{u-1} + 1)^3} \\ = \frac{5\pi}{16} \times \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{5\sqrt{5}}{32} \pi \end{aligned}$$

31. [출제 의도] 직선 위를 운동하는 점의 위치, 속도, 가속도의 관계를 이해하고 있는가?

점 P의 시간 t 에서의 가속도를 $a(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned} a(t) = v'(t) &= 3t^2 - 12t + 10 \\ &= 3(t-2)^2 - 2 \end{aligned}$$

에서 점 P의 가속도는 $t=2$ 일 때 최소이다.

점 P의 시간 $t=0$ 에서의 위치는 0이므로

점 P의 시간 $t=2$ 에서의 위치는

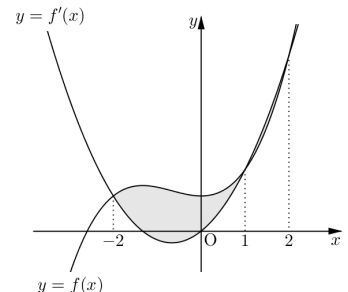
$$\begin{aligned} \int_0^2 v(t) dt &= \int_0^2 (t^3 - 6t^2 + 10t + 2) dt \\ &= \left[\frac{1}{4} t^4 - 2t^3 + 5t^2 + 2t \right]_0^2 \\ &= 4 - 16 + 20 + 4 = 12 \end{aligned}$$

32. [출제 의도] 두 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

$f'(x) = 3x^2 + 4x$ 에서

$$\begin{aligned} f(x) = f'(x) &\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + 4 = 3x^2 + 4x \\ &\Leftrightarrow x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+2)(x-2)(x-1) = 0 \end{aligned}$$

따라서 두 곡선 $y = f(x)$ 와 $y = f'(x)$ 가 만나는 점의 x 좌표는 $-2, 1, 2$ 이다.



따라서 위 그림으로부터 두 곡선 $y = f(x)$ 와

$y = f'(x)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^2 |f(x) - f'(x)| dx \\ &= \int_{-2}^1 \{f(x) - f'(x)\} dx + \int_1^2 \{f'(x) - f(x)\} dx \\ &= \int_{-2}^1 (x^3 - x^2 - 4x + 4) dx \\ &\quad + \int_1^2 (-x^3 + x^2 + 4x - 4) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x \right]_{-2}^1 \\ &\quad + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 4x \right]_1^2 \\ &= \frac{45}{4} + \frac{7}{12} = \frac{71}{6} \end{aligned}$$

$\therefore 6S = 71$

33. [출제 의도] 적분과 미분의 관계를 이용하여 함수의 식을 추론할 수 있는가?

함수 $h(x)$ 가 $x = 0$ 에서 연속이고 $h(0) = 0$ 이므로 $f(0) = 0 \dots \textcircled{1}$ 이고

$$\int_0^2 g(t) dt = 0 \dots \textcircled{2} \text{ 이다.}$$

또한 $h(0) = 0$ 이므로 함수 $|h(x)|$ 는 $x = 0$ 에서 극솟값을 가지고, ($\because |h(x)| \geq 0$)

함수 $|h(x)|$ 가 $x = 0$ 에서 미분가능하므로 $h'(0) = 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h(x)}{x} = f'(0) = 0 \dots \textcircled{3}$ 이고

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x)}{x} = g(2) - g(0) = 0 \dots \textcircled{4} \text{ 이다.}$$

$$\left(\because \frac{d}{dx} \int_x^{x+2} g(t) dt = g(x+2) - g(x) \right)$$

함수 $|h(x)|$ 가 $x = -2$ 에서 미분가능하지 않으므로 $h(-2) = f(-2) = 0$ 이어야 한다. $\dots \textcircled{5}$

따라서 $\textcircled{1}, \textcircled{3}, \textcircled{5}$ 에서 $f(x) = x^2(x+2)$ 이다.

$\textcircled{4}$ 에서 $g(0) = g(2) = b$ 라 하면 인수정리에

$$g(x) = x(x-2)(x-a) + b$$

로 둘 수 있다. (a, b 는 실수)

$\textcircled{2}$ 에서

$$\begin{aligned} \int_0^2 g(x) dx &= \int_0^2 \{x^3 - (a+2)x^2 + 2ax + b\} dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}(a+2)x^3 + ax^2 + bx \right]_0^2 \\ &= 4 - \frac{8}{3}(a+2) + 4a + 2b \\ &= \frac{4}{3}a + 2b - \frac{4}{3} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow b = -\frac{2}{3}a + \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore g(x) &= x^3 - (a+2)x^2 + 2ax - \frac{2}{3}a + \frac{2}{3} \\ &= x(x-a)(x-2) - \frac{2}{3}(a-1) \end{aligned}$$

$x > 0$ 일 때

$$\begin{aligned} h'(x) &= g(x+2) - g(x) \\ &= x(x+2)(x+2-a) - x(x-a)(x-2) \\ &= x(6x-4a+4) \end{aligned}$$

이고, $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \infty$ 이므로

$x > 0$ 일 때 함수 $h(x)$ 의 함숫값이 0보다 작은 점이 존재하면 사잇값 정리에 의해 함수 $|h(x)|$ 가 $x > 0$ 에서 미분가능하지 않은 점(즉, $h(x) = 0$ 이고 $h'(x) \neq 0$ 인 점)이 존재한다.

따라서 조건 (나)를 만족하려면 $x > 0$ 일 때 $h(x) \geq 0$ 이어야 한다.

$h'(x) = x(6x - 4a + 4)$ 에서

$a > 1$ 이면 함수 $h(x)$ 가 열린구간 $(0, k)$ 에서 감소하게 되는 양수 k 가 존재하고,

$a \leq 1$ 이면 함수 $h(x)$ 는 열린구간 $(0, \infty)$ 에서 증가한다.

따라서 조건 (나)를 만족하려면 $a \leq 1$ 이어야 한다.

$$\begin{aligned} \therefore f(3) + g(3) &= 45 + 27 - 9(a+2) + 6a - \frac{2}{3}a + \frac{2}{3} \\ &= 54 - \frac{11}{3}a + \frac{2}{3} \\ &\geq 54 - \frac{11}{3} + \frac{2}{3} = 51 \end{aligned}$$

따라서 $f(3) + g(3)$ 의 최솟값은 51이다.

34. [출제 의도] 정적분의 값을 계산할 수 있는가?

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 (x-1)(x^2+2x-1) dx \\ &= \int_{-1}^1 (x^3+x^2-3x+1) dx \\ &= 2 \int_0^1 (x^2+1) dx = 2 \left[\frac{1}{3}x^3+x \right]_0^1 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

35. [출제 의도] 평균변화율과 순간변화율의 정의를 알고 있는가?

함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 0에서 2까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{-2 - 0}{2} = -1$$

이고 $f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$ 이므로

$f'(k) = 3k^2 - 6k + 1 = -1$ 에서

$$3k^2 - 6k + 2 = 0$$

위 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 3^2 - 3 \times 2 = 3 > 0 \text{ 이므로}$$

위 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 문제의 조건을 만족시키는 모든 실수 k 의 값의

곱은 $\frac{2}{3}$ 이다.

36. [출제 의도] 도함수를 이용하여 함수의 증가와 감소를 판정할 수 있는가?

$$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + a$$

이고, 함수 $f(x)$ 가 열린구간 $(1, 2)$ 에서 감소하려면 열린구간 $(1, 2)$ 에서 항상 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

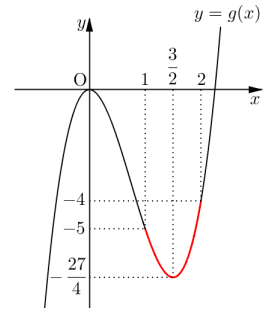
$g(x) = 4x^3 - 9x^2$ 라 하면

$$g'(x) = 12x^2 - 18x = 6x(2x - 3)$$

이므로 그림과 같이 함수 $g(x)$ 는

$x = 0$ 에서 극댓값 0을 갖고,

$x = \frac{3}{2}$ 에서 극솟값 $-\frac{27}{4}$ 을 갖는다.



이때 $g(1) = -5, g(2) = -4$ 이므로

열린구간 $(1, 2)$ 에서 $f'(x) \leq 0$ 이라면

$a - 4 \leq 0$ 이고 $a - 5 \leq 0$ 이어야 한다.

따라서 문제의 조건을 만족시키는 실수 a 의 최댓값은 4이다.

37. [출제 의도] 직선 위의 운동하는 점의 속도와 위치의 관계를 이해하고 있는가?

두 점 P, Q가 $t = a$ 에서 동시에 원점에서 출발하므로 $t = a$ 에서 두 점의 위치가 같으려면

$$\int_0^a v_1(t) dt = \int_0^a v_2(t) dt$$

$$\Rightarrow \int_0^a \{v_1(t) - v_2(t)\} dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^a (3t^2 + 2t - 6) dt = 0$$

$$\Rightarrow \left[t^3 + t^2 - 6t \right]_0^a = a^3 + a^2 - 6a = 0$$

$$\Rightarrow a(a+3)(a-2) = 0 \quad \therefore a = 2 \quad (\because a > 0)$$

따라서 $t = 2a$ 에서 두 점 P, Q 사이의 거리는

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^4 v_1(t) dt - \int_0^4 v_2(t) dt \right| \\ &= \left| \int_0^4 \{v_1(t) - v_2(t)\} dt \right| \\ &= \left| \left[t^3 + t^2 - 6t \right]_0^4 \right| = 64 + 16 - 24 = 56 \end{aligned}$$

38. [출제 의도] 함수의 연속의 정의를 이해하고, 그래프를 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

두 함수 $y = |x^2 - 3|$ 과 $y = |2x - a|$ 는 모두 실수 전체의 집합에서 연속이므로

함수 $|f(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이라면

함수 $|f(x)|$ 가 $x = k$ 에서 연속이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow k^-} |f(x)| = |k^2 - 3|$$

$$\lim_{x \rightarrow k^+} |f(x)| = |2k - a| = |f(k)|$$

이므로 함수 $|f(x)|$ 가 $x = k$ 에서 연속이라면

$$|k^2 - 3| = |2k - a|$$

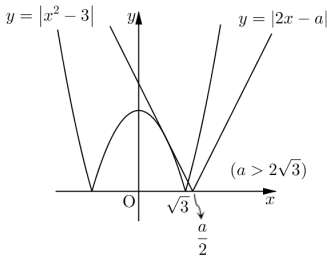
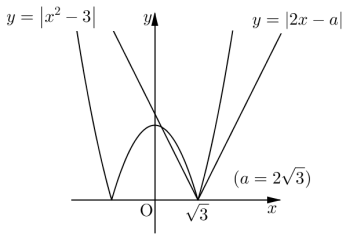
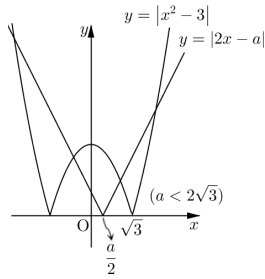
이어야 한다.

따라서 문제의 조건을 만족시키는 경우는 방정식

$$|x^2 - 3| = |2x - a|$$

가 서로 다른 세 실근을 가지는 경우이다.

즉, 두 함수 $y = |x^2 - 3|$ 과 $y = |2x - a|$ 의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.



위 그림에서 두 함수 $y = |x^2 - 3|$ 과 $y = |2x - a|$ 의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나는 경우는 (i) $a = 2\sqrt{3}$ 일 때와 (ii) 두 함수 $y = |x^2 - 3|$ 과 $y = |2x - a|$ 의 그래프가 접하는 경우이다.

위 그림에서 양수 a 에 대하여 두 함수 $y = |x^2 - 3|$ 과 $y = |2x - a|$ 의 그래프가 접하는 경우는 방정식

$$-(x^2 - 3) = -(2x - a)$$

이 중근을 갖는 경우이다. 즉, 이차방정식

$$x^2 - 2x + a - 3 = 0$$

이 중근을 가져야 하므로 위 방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - (a - 3) = 0 \Rightarrow a = 4$$

(i), (ii)에서 문제의 조건을 만족시키는 모든 양수 a 의 값의 곱은 $2\sqrt{3} \times 4 = 8\sqrt{3}$

39. [출제 의도] 다항함수의 미분법을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

$$(ㄱ) \int_0^x (x-t)f(t)dt = x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt$$

에서 주어진 등식의 양변을 미분하면

$$\int_0^x f(t)dt = g(x) + (x-1)g'(x) \dots (*)$$

양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$0 = g(0) - g'(0) \therefore g(0) = g'(0) \text{ (참)}$$

$$(ㄴ) h(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt \text{ 라 하면}$$

$h(0) = 0$ 이고

주어진 등식으로부터 $h(1) = 0$ 이고, ㄱ에서

$$h'(x) = \int_0^x f(t)dt \text{ 이므로}$$

롤의 정리에 의하여 $h'(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 $(0, 1)$ 에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $\int_0^x f(t)dt = 0$ 은 열린구간

$(0, 1)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. (참)

$$(ㄷ) F(x) = \int_0^x f(t)dt \text{ 라 하면}$$

$F(0) = 0$ 이고,

ㄴ에서 $F(c) = 0$ ($0 < c < 1$)이고,

(*)에서 $g(1) = 0$ 이므로 $F(1) = 0$ 이다.

$F'(x) = f(x)$ 이므로 롤의 정리에 의하여

$f(\alpha) = 0$ 인 α 가 열린구간 $(0, c)$ 에 적어도 하나 존재하고,

$f(\beta) = 0$ 인 β 가 열린구간 $(c, 1)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$f(x)$ 는 이차함수이므로 위의 사실로부터 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간 $(0, 1)$ 에서 서로 다른 두 실근 α, β 를 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

(다른 풀이)

$$f(x) = x^2 + ax + b \text{ 라 하면}$$

$$\int_0^x (x-t)f(t)dt$$

$$= x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt$$

$$= x \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2 + bx \right) - \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 \right)$$

$$= \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2$$

$$= \frac{1}{12}(x^4 + 2ax^3 + 6bx^2)$$

이고, 주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{6}a + \frac{1}{2}b = 0 \Rightarrow 1 + 2a + 6b = 0$$

이므로

$$\int_0^x (x-t)f(t)dt = \frac{1}{12}\{x^4 + 2ax^3 - (2a+1)x^2\}$$

(ㄱ) 주어진 등식의 양변을 미분하면

$$\frac{1}{6}\{2x^3 + 3ax^2 - (2a+1)x\} = g(x) + (x-1)g'(x)$$

양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$g(0) - g'(0) = 0 \therefore g(0) = g'(0) \text{ (참)}$$

$$(ㄴ) \int_0^x f(t)dt = \int_0^x (t^2 + at + b)dt$$

$$= \frac{1}{6}\{2x^3 + 3ax^2 - (2a+1)x\}$$

$$= \frac{1}{6}x(2x^2 + 3ax - 2a - 1)$$

이므로

$$h(x) = 2x^2 + 3ax - (2a+1) \text{ 이라 하면}$$

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(a+1),$$

$$h(1) = a + 1$$

$$\text{이므로 } h\left(\frac{1}{2}\right) \times h(1) = -\frac{1}{2}(a+1)^2 \leq 0$$

(i) $a = -1$ 이면 $h\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ 이므로 방정식 $h(x) = 0$ 은

열린구간 $(0, 1)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

(ii) $a \neq -1$ 이면 사잇값 정리에 의하여 방정식

$h(x) = 0$ 은 열린구간 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 방정식 $\int_0^x f(t)dt = 0$ 은 열린구간

$(0, 1)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. (참)

$$(ㄷ) \frac{1}{6}\{2x^3 + 3ax^2 - (2a+1)x\}$$

$$= g(x) + (x-1)g'(x)$$

에서 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$g(1) = 0$ 이므로

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2}a - \frac{1}{6}(2a+1) = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$1 + 2a + 6b = 0 \text{ 에서 } b = \frac{1}{6}$$

$$\therefore f(x) = x^2 + ax + b = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

근의 공식에 의하여

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{2}{3}}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$\frac{1}{2} > \frac{1}{2\sqrt{3}}$ 이므로 방정식 $f(x) = 0$ 의 두 실근은

모두 열린구간 $(0, 1)$ 에 속한다.

따라서 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간 $(0, 1)$ 에서 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

(참고) ㄷ에서

$$f(0) = f(1) > 0, f\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \text{ 임을 이용하여 사이값}$$

정리를 통해 방정식 $f(x) = 0$ 의 두 실근이 모두 열린구간 $(0, 1)$ 에 존재함을 보일 수도 있다.

40. [출제 의도] 함수의 연속과 미분계수의 뜻을 알고 있는가?

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1^3 - 2 + a = a - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = b$$

에서 $a - 1 = b, a - b = 1 \dots \textcircled{1}$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 3 - 2 = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = b$$

이므로 문제의 조건에서

$$b - 1 = 2, b = 3 \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $a = 4, b = 3$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + 4 & (x < 1) \\ 3x & (x \geq 1) \end{cases}$$

$$\therefore f(0) \times f(2) = 4 \times 6 = 24$$

41. [출제 의도] 도함수를 부등식에 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

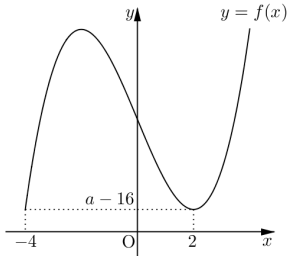
주어진 부등식은 연립부등식

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 & \dots \textcircled{1} \\ f(x) \leq f(x+4) + b & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

과 같다.

$$(1) f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$$

에서 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 극댓값을 갖고,
 $x=2$ 에서 극솟값 $a-16$ 을 갖는다.

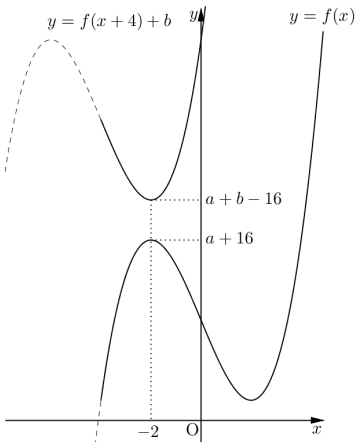


또한 $f(-4)=f(2)=a-16$ 이므로
 그림과 같이 구간 $[-4, \infty)$ 에서 부등식 $f(x) \geq 0$ 이
 성립하려면

$$a-16 \geq 0 \Rightarrow a \geq 16$$

(2) 곡선 $y=f(x+4)+b$ 는 곡선 $y=f(x)$ 를
 x 축의 방향으로 -4 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼
 평행이동시킨 것이다.

함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 극댓값 $a+16$ 을 가지므로
 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=f(x+4)+b$ 를 각각 그리면
 그림과 같다.



부등식 $f(x) \leq f(x+4)+b$ 는 이차부등식이므로
 그림으로부터 위 부등식이 구간 $[-4, \infty)$ 에서 항상
 성립하려면

$$a+b-16 \geq a+16 \Rightarrow b \geq 32$$

$$(1), (2) \text{에서 } a+b \geq 16+32=48$$

이므로 $a+b$ 의 최솟값은 48이다.

42. [출제 의도] 미분을 이용하여 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

$f'(x)=3x^2+6x$ 이고, 문제의 조건에서
 $f'(a)=0$ 이므로

$$3a^2+6a=0, a(3a+6)=0$$

$$\therefore a=-2 \text{ 또는 } a=0$$

$$a=-2 \text{ 인 경우, } f(-2)=3 \text{ 에서 } k=3$$

$$a=0 \text{ 인 경우, } f(0)=-1 \text{ 에서 } k=-1$$

이므로 양수 k 의 값은 3이다.

43. [출제 의도] 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 계산할 수 있는가?

$$g(x)=(x^2+1)f(x) \text{ 라 하면}$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로
 함수 $g(x)$ 도 미분가능하다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2+1)f(x)-2}{x-1} = 3 \text{ 에서}$$

$$g(1)=2 \Rightarrow f(1)=1 \dots \textcircled{1}$$

$$g'(x)=2xf(x)+(x^2+1)f'(x) \text{ 에서}$$

$$g'(1)=3 \Rightarrow 2f(1)+2f'(1)=3, f'(1)=\frac{1}{2} \dots \textcircled{2}$$

문제의 조건에서

$$f(x)=a(x+1)^2+b \text{ (} a, b \text{는 상수)라 하면}$$

$$f'(x)=2a(x+1) \text{ 이므로}$$

①, ②에서

$$4a+b=1, 4a=\frac{1}{2} \Rightarrow a=\frac{1}{8}, b=\frac{1}{2}$$

$$\therefore f(3)=\frac{1}{8} \times 4^2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

44. [출제 의도] 다항함수의 정적분을 계산할 수 있는가?

함수 $f(x)$ 가 최고차항의 계수가 $c(c \neq 0)$ 인
 n 차함수라 하면

$$2f(x)=2cx^n + \dots$$

$$f(1-x)=c(1-x)^n + \dots$$

이므로 n 의 홀짝에 관계없이 함수

$$2f(x)+f(1-x) \text{ 는 } n \text{ 차함수이다.}$$

$$\text{따라서 } 2f(x)+f(1-x)=x^2+ax$$

에서 $n=2$ 이다.

또한 양변의 최고차항의 계수끼리 비교하면

$$3c=1 \text{ 이므로 } c=\frac{1}{3} \text{ 이다.}$$

$$f(x)=\frac{1}{3}x^2+px+q \text{ 라 하면}$$

$$\begin{aligned} f(1-x) &= \frac{1}{3}(1-x)^2+p(1-x)+q \\ &= \frac{1}{3}x^2 - \left(p + \frac{2}{3}\right)x + \frac{1}{3} + p + q \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} 2f(x)+f(1-x) &= x^2 + \left(p - \frac{2}{3}\right)x + \frac{1}{3} + p + 3q \\ &= x^2 + ax \end{aligned}$$

계수끼리 비교하면

$$p - \frac{2}{3} = a \Rightarrow p = a + \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3} + p + 3q = 0 \Rightarrow q = -\frac{1}{3}(a+1)$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \left(a + \frac{2}{3}\right)x - \frac{a+1}{3}$$

따라서

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)dx &= \int_0^1 \left\{ \frac{1}{3}x^2 + \left(a + \frac{2}{3}\right)x - \frac{a+1}{3} \right\} dx \\ &= \left[\frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{3}\right)x^2 - \frac{a+1}{3}x \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{6}a + \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{6}a + \frac{1}{9} = \frac{1}{2}a \text{ 이므로 } a = \frac{1}{3}$$

(다른 풀이)

$$2f(x)+f(1-x)=x^2+ax \dots \textcircled{1}$$

가 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

양변에 x 대신 $1-x$ 를 대입하면

$$\begin{aligned} 2f(1-x)+f(x) &= (1-x)^2+a(1-x) \\ &= x^2 - (a+2)x + a+1 \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$4f(x)+2f(1-x)=2x^2+2ax$$

$$f(x)+2f(1-x)=x^2-(a+2)x+a+1$$

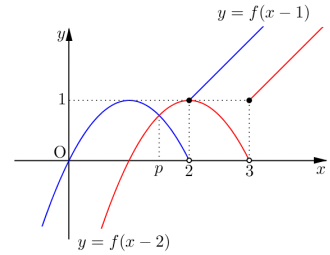
에서

$$3f(x)=x^2+(3a+2)x-a-1$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^2 + \left(a + \frac{2}{3}\right)x - \frac{a+1}{3}$$

이후 계산은 본 풀이와 같다.

45. [출제 의도] 함수의 연속의 정의를 이해하고 있는가?



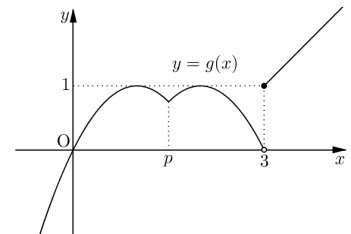
두 함수 $y=f(x-1), y=f(x-2)$ 의 그래프는
 위 그림과 같다.

(1) $k < 2$ 인 경우

그림에서 $k=p$ 인 경우에만 함수 $g(x)$ 가 $x=k$ 에서
 연속이다.

또한, 이 경우 함수 $g(x)$ 는 $x=3$ 에서도
 불연속이므로 함수 $(x-a)g(x)$ 가 실수 전체의
 집합에서 연속이 되는 경우는 $k=p$ 이고, $a=3$ 인
 경우뿐이다. 이때 이차함수의 대칭성에 의하여

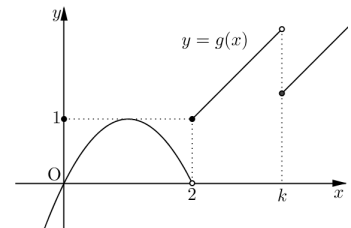
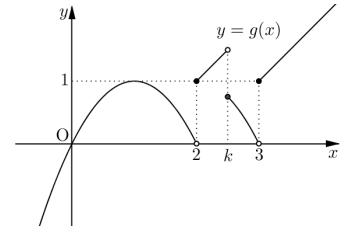
$$p = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2} \text{ 이다.}$$



(2) $k \geq 2$ 인 경우

그림과 같이 k 의 값과 관계없이 함수 $g(x)$ 는
 $x=k$ 와 $x=3$ 에서 불연속이다.

따라서 함수 $(x-a)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서
 연속이 되는 a 의 값은 존재하지 않는다.



(1), (2)에서

문제의 조건을 만족시키는 a, k 의 값은
 $a = 3, k = \frac{3}{2}$ 이므로 $a+k = \frac{9}{2}$

(참고)

함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 연속이고
 함수 $g(x)$ 가 $x = a$ 에서 불연속인 경우

(i) 함수 $f(x)g(x)$ 가 $x = a$ 에서 연속이면
 $f(a) = 0$ 이다.

(ii) $\lim_{x \rightarrow a^-} g(x), \lim_{x \rightarrow a^+} g(x), g(a)$ 가 각각

존재하고, $f(a) = 0$ 이면 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x = a$ 에서 연속이다.

46. [출제 의도] 도함수를 이용하여 함수의 최댓값을 구할 수 있는가?

$$f'(x) = -4x^3 + 12x + 8$$

$$= -4(x-2)(x+1)^2$$

에서 함수 $f(x)$ 의 증감표를 그리면

x		-1		2	
$f'(x)$	(+)	0	(+)	0	(-)
$f(x)$	↗		↗		↘

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = 2$ 에서만 극댓값을 가지므로
 $x = 2$ 에서 최댓값을 갖는다.

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은

$$f(2) = -16 + 24 + 16 - 2 = 22$$

47. [출제 의도] 직선 위의 움직이는 점의 속도와 가속도를 구할 수 있는가?

점 P의 시간 t 에서의 속도를 $v(t)$ 라 하면

$$v(t) = x'(t) = 3t^2 + 6t - 9$$

$$= 3(t+3)(t-1)$$

따라서 점 P는 시간 $t = 1$ 에서 운동 방향을 바꾼다.

점 P의 시간 t 에서의 가속도를 $a(t)$ 라 하면

$$a(t) = v'(t) = 6t + 6$$

이므로 점 P의 운동 방향이 바뀔 때, 점 P의
 가속도의 크기는 $|a(1)| = 12$

48. [출제 의도] 함수의 적분과 미분의 관계를 이해하고 있는가?

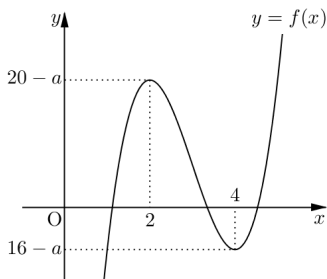
$g'(x) = f(x)$ 에서

함수 $g(x)$ 가 극댓값을 가지므로 $f(x)$ 의 값이 양에서
 음으로 바뀌는 지점이 존재해야 한다.

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$$

$$= 3(x-2)(x-4)$$

에서 함수 $y = f(x)$ 는 $x = 2$ 과 $x = 4$ 에서 각각
 극댓값 $f(2) = 20 - k, f(4) = 16 - k$ 를 가지고,
 함수 $f(x)$ 의 값이 양에서 음으로 바뀌는 지점이
 존재하려면, 그림과 같이
 $f(4) < 0 < f(2)$ 이어야 한다.



따라서 $16 < k < 20$ 이어야 하고, 문제의 조건을
 만족시키는 자연수 k 의 최댓값과 최솟값의 합은
 $17 + 19 = 36$

49. [출제 의도] 도함수를 활용하여 함수의 그래프를 그리고, 문제를 해결할 수 있는가?

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

이므로

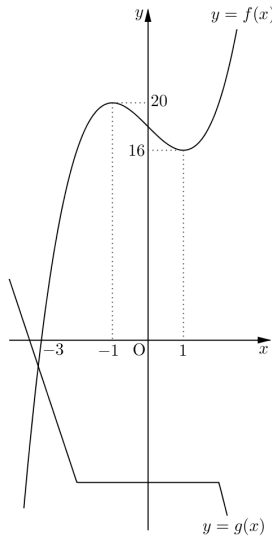
함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극댓값 20, $x = 1$ 에서
 극솟값 16을 갖는다.

또한, $f(-3) = 0$ 이다.

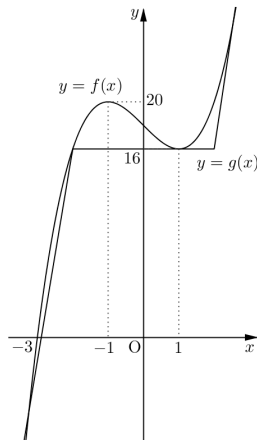
문제의 조건으로부터 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는
 각각

열린구간 $(-\infty, p)$ 에서 기울기가 $\frac{2}{3}a$ 인 직선,
 열린구간 (p, q) 에서 기울기가 0인 직선,
 열린구간 (q, ∞) 에서 기울기가 a 인 직선이다.

$x \geq -3$ 일 때 $f(x) \geq g(x)$ 이므로 $a < 0$ 이면
 그림과 같이 조건 (가)를 만족시키는 경우는
 존재하지 않는다.



$a > 0$ 인 경우, 조건 (가)를 만족시키는 경우는
 다음과 같이 함수 $g(x)$ 의 그래프와 함수 $f(x)$ 가
 열린구간 $(-3, \infty)$, $(-3, 0)$ 에서 각각 한 점에서
 만나고, 점 $(1, 16)$ 과 열린구간 $(1, \infty)$ 의 한 점에서
 접하는 경우뿐이다.



이때 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = 16$ 이 만나는 점은
 $f(x) - 16 = 0$

$$\Rightarrow x^3 - 3x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-1)^2 = 0$$

에서 $(-2, 16)$ 과 $(1, 16)$ 이므로 $p = -2$ 이다.

조건 (나)에서 $\int_{-3}^{-2} g(x)dx$ 의 값은 함수 $g(x)$ 의

그래프가 점 $(-3, 0)$ 을 지날 때 가장 크고,

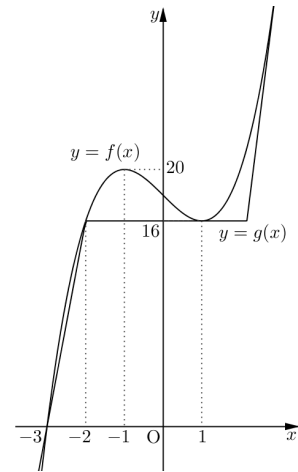
$$\int_{-3}^{-2} f(x)dx$$
의 값은 일정하므로

함수 $g(x)$ 의 그래프가 점 $(-3, 0)$ 을 지날 때

$$\int_{-3}^{-2} \{f(x) - g(x)\}dx$$
의 값이 가장 작다.

직선 $y = g(x)$ 가 $(-3, 0)$ 을 지날 때

$$\frac{2}{3}a = 16, a = 24$$
이므로 $a \geq 24 \dots (*)$



한편 a 의 값이 가장 작을 때(즉, $x > 1$ 에서 곡선
 $y = f(x)$ 에 그은 점선의 기울기가 가장 작을 때)
 q 의 값도 가장 작으므로

$$\int_{-2}^q \{f(x) - g(x)\}dx$$
의 값이 가장 작다.

따라서 (*)에서 $a = 24$ 일 때,

$$\int_{-3}^q \{f(x) - g(x)\}dx$$
의 값이 가장 작다.

$$a = 24 \Rightarrow f'(x) = 24$$

$$3x^2 - 3 = 24, x = 3 (\because x > 1)$$

에서 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(3, 36)$ 에서 그은
 점선의 기울기가 $a = 24$ 이고,

그 점선의 방정식은

$$y - 36 = 24(x - 3) \Rightarrow y = 24x - 36$$

이 직선이 점 $(q, 16)$ 을 지나므로

$$24q - 36 = 16, q = \frac{13}{6}$$

$$\therefore a \times (q - p) = 24 \times \left(\frac{13}{6} + 2\right) = 100$$

확률과 통계

정답

1	⑤	2	④	3	③	4	③	5	①
6	115	7	48	8	53	9	455	10	①
11	②	12	⑤	13	⑤	14	④	15	6
16	77	17	612	18	31	19	④	20	⑤
21	①	22	①	23	③	24	⑤	25	⑤
26	78	27	59	28	276	29	⑤	30	①
31	53	32	20	33	⑤	34	①	35	③
36	①	37	①	38	⑤	39	372	40	144
41	21	42	③	43	③	44	④	45	①
46	35	47	8	48	⑤	49	①	50	②
51	①	52	③	53	11	54	27	55	117
56	60	57	④	58	11	59	50	60	

해설

1. [출제 의도] 확률의 성질을 이용하여 식의 값을 계산할 수 있는가?

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

두 사건 A, B^C 또한 서로 독립이다. 따라서

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{3} \dots ①$$

$$P(A \cap B^C) = P(A)P(B^C) = P(A)\{1 - P(B)\} = \frac{1}{6} \dots ②$$

①, ②를 변형 더하면

$$P(A) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore P(B) = \frac{1}{3P(A)} = \frac{2}{3}$$

따라서

$$P(A \cup B^C) = P(A) + P(B^C) - P(A \cap B^C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

2. [출제 의도] 이항정리를 이용하여 다항식의 전개식의 계수를 구할 수 있는가?

(x+3)ⁿ의 전개식에서 xⁿ⁻¹의 계수는

$${}_nC_{n-1} \times 3 = 3n = a$$

$$(2x-1)^2(x+1)^{n-2} = (4x^2-4x+1)(x+1)^{n-2}$$

의 전개식에서 xⁿ⁻¹의 계수는

$$4 \times {}_{n-2}C_{n-3} - 4 \times {}_{n-2}C_{n-2} = 4(n-2) - 4 = 4n - 12 = b$$

a = b 이므로 n = 12

3. [출제 의도] 원순열과 중복순열의 수를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

합동인 삼각형 3개에 3개의 색을 칠하는 방법의

$$\text{수는 } \frac{3!P_3}{3} = 2 \dots ①$$

합동인 삼각형 외부에 인접한 활꼴에 색을 칠하는 방법의 수는 각 활꼴마다 서로 다른 2개의 색 중 하나를 칠하는 방법의 수이므로

$$2^3 = 8 \dots ②$$

①, ②에 의하여 구하는 경우의 수는
2 × 8 = 16

4. [출제 의도] 독립인 사건의 성질을 이해하고 있는가?

$$x^2 - 6x + 5 \leq 0$$

$$(x-1)(x-5) \leq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq 5 \dots ①$$

$$\text{이므로 } P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$|x-4| = n$$

$$\Leftrightarrow x = 4+n \text{ 또는 } x = 4-n \dots ②$$

이므로 P(B)가 될 수 있는 값은 0, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{5}$ 이다.

두 사건 A, B가 독립이려면

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

이어야 하고, P(B) ≠ 0이므로

$$P(A \cap B) = \frac{1}{10} \text{이고 } P(B) = \frac{1}{5} \text{이다.}$$

즉, n(A ∩ B) = 1, n(B) = 2이므로

①, ②에서 n = 2, 3이어야 한다.

따라서 자연수 n의 값의 합은 5이다.

5. [출제 의도] 중복순열의 수를 활용한 문제 해결 과정을 이해할 수 있는가?

(가): f(2), f(4), f(5)를 선택하는 방법의 수는 서로 다른 3개의 원소 중에서 중복을 허락하여 3개를 택할 때, 선택한 3개의 값이 모두 1 또는 3이 아닌 경우의 수이므로

$$3^3 - 2^3 = 27 - 8 = 19 \quad \therefore p = 19$$

(나): 함수 f의 치역이 {2, a}인 경우의 수는 f(2), f(4), f(5)의 값을 2와 a 중 중복을 허락하여 3개를 선택할 때, f(2), f(4), f(5)의 값이 모두 2인 경우를 제외하는 경우의 수이므로

$$2^3 - 1 = 7 \quad \therefore q = 7$$

(다): 구하는 함수 f의 개수는

$$3 \times 19 + 3 \times 19 + 6 \times (26 - 2 \times 7) = 186$$

$$\therefore r = 186$$

$$\therefore p + q + r = 19 + 7 + 186 = 212$$

6. [출제 의도] 독립시행의 확률과 확률의 곱셈정리를 이해하고 있는가?

주사위의 눈이 짝수이므로 다음과 같은 경우로 나누어 생각한다.

(1) 주사위의 눈이 2인 경우

동전의 앞면과 뒷면이 나온 횟수가 같을 확률은

$$\frac{1}{6} \times {}_2C_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}$$

(2) 주사위의 눈이 4인 경우

동전의 앞면과 뒷면이 나온 횟수가 같을 확률은

$$\frac{1}{6} \times {}_4C_2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

(3) 주사위의 눈이 6인 경우

동전의 앞면과 뒷면이 나온 횟수가 같을 확률은

$$\frac{1}{6} \times {}_6C_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{5}{96}$$

(1), (2), (3)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{5}{96} = \frac{19}{96}$$

$$\therefore p = 96, q = 19 \Rightarrow p + q = 115$$

7. [출제 의도] 같은 것이 있는 순열과 확률의 곱셈정리를 이해하고 있는가?

(1) 숫자 1이 적힌 카드를 2장 선택하는 경우

이 경우는 1, 1, 2, 2, 3 또는 1, 1, 2, 3, 3이 적힌 카드를 선택하여 나열하는 경우이다.

숫자 1인 적힌 카드를 2장 선택할 확률은

$$\frac{{}_3C_2 \times {}_4C_3}{{}_7C_5} = \frac{4}{7}$$

숫자 1이 적힌 카드끼리 이웃하지 않을 확률은

$$1 - \frac{\frac{4!}{2!2!}}{2!2!} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

따라서 이 경우 문제의 조건을 만족시킬 확률은

$$\frac{4}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{35}$$

(2) 숫자 1이 적힌 카드를 3장 선택하는 경우

이 경우는 1, 1, 1, 2, 2 또는 1, 1, 1, 3, 3 또는 1, 1, 1, 2, 3이 적힌 카드를 선택하여 나열하는 경우이다.

(a) 1, 1, 1, 2, 2 또는 1, 1, 1, 3, 3를 선택할 확률은

$$\frac{{}_3C_3 \times {}_2C_2 \times 2}{{}_7C_5} = \frac{2}{21}$$

이 경우 숫자 1이 적힌 카드끼리 이웃하지 않을 확률은

$$\frac{1}{5!} = \frac{1}{10}$$

따라서 이 경우 문제의 조건을 만족할 확률은

$$\frac{2}{21} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{105}$$

(b) 1, 1, 1, 2, 3을 선택할 확률은

$$\frac{{}_3C_3 \times {}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_7C_5} = \frac{4}{21}$$

이 경우 숫자 1이 적힌 카드끼리 이웃하지 않을 확률은

$$\frac{2!}{5!} = \frac{1}{10}$$

따라서 이 경우 문제의 조건을 만족할 확률은

$$\frac{4}{21} \times \frac{1}{10} = \frac{2}{105}$$

(1), (2)에 의하여 문제의 조건을 만족할 확률은

$$\frac{12}{35} + \frac{1}{105} + \frac{2}{105} = \frac{13}{35}$$

$$\therefore p + q = 13 + 35 = 48$$

(다른 풀이) 같은 것이 적힌 카드도 서로 다른 것으로 간주하고 문제를 해결할 수 있다.

(1) 숫자 1이 적힌 카드를 2장 선택하는 경우

1이 적힌 카드를 제외한 3장의 카드를 먼저 일렬로 나열하고, 3장의 카드의 사이에 1이 적힌 카드 2장을 배열하면 되므로 구하는 확률은

$$\frac{{}_4P_3 \times ({}_3C_2 \times {}_4P_2)}{{}_7P_5} = \frac{12}{35}$$

(2) 숫자 1이 적힌 카드를 3장 선택하는 경우

1이 적힌 카드를 먼저 모두 나열하고, 3장의 카드의 사이에 1이 아닌 수가 적힌 카드 2장을 선택하여 배열하면 되므로 구하는 확률은

$$\frac{3! \times {}_4P_2}{7P_5} = \frac{1}{35}$$

(1), (2)에 의하여 문제의 조건을 만족할 확률은

$$\frac{12}{35} + \frac{1}{35} = \frac{13}{35}$$

$$\therefore p + q = 13 + 35 = 48$$

8. [출제 의도] 중복조합과 중복순열의 수를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

문제의 조건에 의하여 x 는 맨 왼쪽에 오른쪽에만 연이어 나열하고, 가운데에는 y, z 만 배열하되 x 와 인접하는 한 쪽엔 y , 한 쪽엔 z 가 배치되어야 한다. (예를 들어, x, x, y, z, y, z, x 와 같은 배치가 가능하다.)

(1)	x	(2)	x	(1)
-----	-----	-----	-----	-----

위의 그림에서 (1)에 들어가는 x 의 총 개수에 따라 다음과 같은 경우가 있다.

(a) (1)에 들어가는 x 의 총 개수가 0인 경우 x 를 배열하는 방법의 수는 1이고,

(2)에 y 또는 z 를 나열하는 방법의 수는 $2 \times 2^3 = 16$ 이므로 구하는 경우의 수는 $2 \times 2^3 = 16$

(b) (1)에 들어가는 x 의 총 개수가 1인 경우 x 를 배열하는 방법의 수는 ${}_2H_1 = 2$ 이고,

(2)에 y 또는 z 를 나열하는 방법의 수는 $2 \times 2^2 = 8$ 이므로 구하는 경우의 수는 $2 \times 2 \times 2^2 = 16$

(c) (1)에 들어가는 x 의 총 개수가 2인 경우 x 를 배열하는 방법의 수는 ${}_2H_2 = 3$ 이고,

(2)에 y 또는 z 를 나열하는 방법의 수는 $2 \times 2 = 4$ 이므로 구하는 경우의 수는 $3 \times 2 \times 2 = 12$

(d) (1)에 들어가는 x 의 총 개수가 3인 경우 x 를 배열하는 방법의 수는 ${}_2H_3 = 4$ 이고,

(2)에 y 또는 z 를 나열하는 방법의 수는 2이므로 구하는 경우의 수는 $4 \times 2 = 8$

(e) (1)에 들어가는 x 의 총 개수가 4인 경우 가운데에 y 또는 z 1개만 올 수 있는데, 이는 조건 (나) 또는 (다)를 만족하지 않는다.

(f) (1)에 들어가는 x 의 총 개수가 5인 경우 x 만 7개 선택하여 일렬로 나열하는 방법의 수이므로 구하는 경우의 수는

$$1$$

(a)~(f)에서 구하는 경우의 수는 $16 + 16 + 12 + 8 + 1 = 53$

9. [출제 의도] 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 조건을 만족하는 함수의 개수를 구할 수 있는가?

$f(x) = n$ 을 만족시키는 x 의 개수를 a_n 이라 하자. 그러면 문제의 조건을 만족시키는 경우는 다음의 세

가지 경우 중 하나이다.

(1) $a_1 = 2, a_2 = 2, a_3 = 3$ 인 경우

문제의 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수는

1, 1, 2, 2, 3, 3, 3을 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

$$\frac{7!}{2!2!3!} = 210$$

(2) $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 3$ 인 경우

문제의 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수는

1, 2, 2, 2, 3, 3, 3을 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

$$\frac{7!}{3!1!} = 140$$

(3) $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4$ 인 경우

문제의 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수는

1, 2, 2, 3, 3, 3, 3을 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

$$\frac{7!}{2!4!} = 105$$

(1), (2), (3)에 의하여 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수는

$$210 + 140 + 105 = 455$$

10. [출제 의도] 원순열의 성질을 이해하고 있는가?

문제의 조건을 만족하는 경우는 마주보는 부채꼴의 각 쌍에 숫자 1, 6과 2, 5와 3, 4를 적는 경우이다.

문제의 그림에서 숫자 1, 6을 마주보는 부채꼴에 적는 방법의 수는 $\frac{2!}{2} = 1$

숫자 1이 적힌 부채꼴의 왼쪽에 적는 수를 결정하는 방법의 수는 4이고,

이때 이 숫자가 적힌 부채꼴과 마주보는 부채꼴에 적힌 숫자는 결정되므로

남은 두 개의 마주보는 부채꼴에 숫자를 적는 방법의 수는 2

따라서 구하는 방법의 수는 $1 \times 4 \times 2 = 8$ 이다.

11. [출제 의도] 수학적 확률의 정의를 이해하고 있는가?

집합 X 의 공집합이 아닌 부분집합의 개수는

$2^4 - 1 = 15$ 이므로 여기서 두 집합 A, B 를 선택하는 모든 방법의 수는

$$15 \times 14 = 210$$

(1) $n(A) = 4, n(B) = 2$ 인 경우

두 집합 A, B 를 선택하는 방법의 수는

$${}_4C_4 \times {}_4C_2 = 6$$

(2) $n(A) = n(B) = 3$ 인 경우

두 집합 A, B 를 선택하는 방법의 수는

$${}_4C_3 \times ({}_4C_3 - 1) = 12$$

(3) $n(A) = 2, n(B) = 4$ 인 경우

두 집합 A, B 를 선택하는 방법의 수는

$${}_4C_2 \times {}_4C_4 = 6$$

따라서 문제에서 구하는 확률은

$$\frac{6+12+6}{210} = \frac{4}{35}$$

12. [출제 의도] 중복조합을 이용하여 문제를 해결할

수 있는가?

주어진 조건을 만족시키기 위해서는 $a \leq 3$ 이어야 한다.

(1) $a = 3$ 인 경우

$b + c = 5$ 이므로 이를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c 의 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$${}_2H_5 = {}_6C_5 = 6$$

(2) $a = 2$ 인 경우

$b + c = 6$ 이므로 이를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c 의 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$${}_2H_6 = {}_7C_6 = 7$$

(3) $a = 1$ 인 경우

$b + c = 7$ 이므로 이를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c 의 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$${}_2H_7 = {}_8C_7 = 8$$

(4) $a = 0$ 인 경우

$b + c = 8$ 이므로 이를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c 의 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$${}_2H_8 = {}_9C_8 = 9$$

따라서 문제의 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c 의 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$$6 + 7 + 8 + 9 = 30$$

13. [출제 의도] 여러 가지 수학적 확률의 성질을 이해하고 있는가?

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{4}$$

에서 $P(A \cap B) = k (k > 0)$ 라 하면

$$P(A) = 4k, P(B) = 3k \text{이다.}$$

$$(㉠) \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{3k}{4k} = \frac{3}{4} \text{ (참)}$$

$$(㉡) P(A \cap B) = \frac{1}{8} \text{ 이면}$$

$$P(A^c) = 1 - P(A) = \frac{1}{2} \text{ 이고 } P(B) = \frac{3}{8} \text{ 이고}$$

$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

이므로

$$\begin{aligned} P(A^c \cup B) &= P(A^c) + P(B) - P(A^c \cap B) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8} \text{ (참)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (㉢) P(A^c)P(B) &= \{1 - P(A)\}P(B) \\ &= (1 - 4k) \cdot 3k = -12k^2 + 3k \\ &= -12\left(k - \frac{1}{8}\right)^2 + \frac{3}{16} \end{aligned}$$

이고, $P(A \cup B) = 6k \leq 1$ 에서 $0 < k \leq \frac{1}{6}$ 이므로

$P(A^c)P(B)$ 는 $k = \frac{1}{8}$ 일 때 최댓값 $\frac{3}{16}$ 을 갖는다.

$$\therefore P(A^c)P(B) \leq \frac{3}{16} \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢이다.

14. [출제 의도] 중복조합을 활용하여 문제의 조건을 만족하는 경우의 수를 구할 수 있는가?

함수 f 의 치역을 A 라 하자. 문제의 조건을 만족하는 모든 함수 f 의 개수는 $n = 1, 2, 3, 4, 5$ 일 때 $f(n) \leq f(n+1)$ 을 만족하는 함수 f 중에서 $f(n+1) > f(n)+1$ 이 존재하는 함수 f 를 제외한 것의 개수를 구하는 것과 같다.

X 에서 Y 로의 함수 중 $n = 1, 2, 3, 4, 5$ 일 때 $f(n) \leq f(n+1)$ 을 만족시키는 함수 f 의 개수는 서로 다른 4개의 수 중에서 중복을 허락하여 6개의 수를 선택하는 방법의 수와 같다.
따라서 ${}_4H_6 = 84$

한편, $n = 1, 2, 3, 4, 5$ 일 때 $f(n) \leq f(n+1)$ 을 만족하면서 $f(n+1) > f(n)+1$ 인 n 이 존재하는 경우는 다음 중 하나이다.

(1) $A = \{1, 3\}$ 또는 $A = \{1, 4\}$ 또는 $A = \{2, 4\}$ 인 경우, 이를 만족하는 함수 f 의 개수는 서로 다른 2개의 수 중에서 중복을 허락하여 6개의 수를 선택할 때, 2개의 숫자를 각각 적어도 한 개 이상 선택하는 방법의 수와 같다.

따라서 이 경우 함수 f 의 개수는 $3 \times {}_2H_{6-2} = 15$

(2) $A = \{1, 2, 4\}$ 또는 $A = \{1, 3, 4\}$ 인 경우, 이를 만족하는 함수 f 의 개수는 서로 다른 3개의 수 중에서 중복을 허락하여 6개의 수를 선택할 때, 3개의 숫자를 각각 적어도 한 개 이상 선택하는 방법의 수와 같다.

따라서 이 경우 함수 f 의 개수는 $2 \times {}_3H_{6-3} = 20$

(1), (2)에서 문제의 조건을 만족시키는 모든 함수 f 의 개수는 $84 - 15 - 20 = 49$

15. [출제 의도] 이항정리를 이용하여 식을 전개할 수 있는가?

$$(x+2)^2 \left(x - \frac{k}{x}\right)^4 = (x^2 + 4x + 4) \left(x - \frac{k}{x}\right)^4$$

에서 상수항은

$$x^2 \cdot {}_4C_1 \cdot x \cdot \left(-\frac{k}{x}\right)^3 + 4 \cdot {}_4C_2 \cdot x^2 \cdot \left(-\frac{k}{x}\right)^2 = -4k^3 + 24k^2$$

문제의 조건에서

$$-4k^3 + 24k^2 = 0 \Rightarrow k^2(k-6) = 0$$

$k > 0$ 이므로 $\therefore k = 6$

16. [출제 의도] 조건부확률의 정의를 이해하고 있는가?

$a = 3c$ 이면 $(b-a)(b-3c) \geq 0$ 이므로 $(b-a)(b-3c) < 0$ 이려면 $a > 3c$ 또는 $a < 3c$ 이어야 한다.

(1) $a > 3c$ 인 경우

$$(b-a)(b-3c) < 0 \Leftrightarrow 3c < b < a$$

에서

(a) $c = 1$ 인 경우

$$a = 5 \text{ 이면 } b = 4$$

$$a = 6 \text{ 이면 } b = 4, 5$$

(b) $c \geq 2$ 인 경우

조건을 만족하는 자연수 a, b 는 존재하지 않는다.

따라서 이 경우 문제의 조건을 만족하는 순서쌍

(a, b, c) 의 개수는 3이다.

(2) $a < 3c$ 인 경우

$$(b-a)(b-3c) < 0 \Leftrightarrow a < b < 3c$$

에서

(a) $c = 1$ 인 경우

$$a = 1 \text{ 이면 } b = 2$$

(b) $c = 2$ 인 경우

$$a = 1 \text{ 이면 } b = 2, 3, 4, 5$$

$$a = 2 \text{ 이면 } b = 3, 4, 5$$

$$a = 3 \text{ 이면 } b = 4, 5$$

$$a = 4 \text{ 이면 } b = 5$$

(c) $c \geq 3$ 인 경우

$$a = 1 \text{ 이면 } b = 2, 3, 4, 5, 6$$

$$a = 2 \text{ 이면 } b = 3, 4, 5, 6$$

$$a = 3 \text{ 이면 } b = 4, 5, 6$$

$$a = 4 \text{ 이면 } b = 5, 6$$

$$a = 5 \text{ 이면 } b = 6$$

따라서 이 경우 문제의 조건을 만족하는 순서쌍

$$(a, b, c) \text{의 개수는 } 1 + 10 + 4 \cdot 15 = 71$$

(1), (2)에서 조건부확률의 정의에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{3}{3+71} = \frac{3}{74}$$

$$\therefore p+q = 77$$

17. [출제 의도] 같은 것이 있는 순열의 수를 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

$a_k + k$ 가 홀수이려면 a_k 와 k 의 홀짝이 서로 달라야 한다.

그런데, 상자에 적힌 숫자 중 홀수와 짝수의 개수가 각각 4이고, 카드에 적힌 숫자 중 홀수와 짝수의 개수도 각각 4이므로

$a_k + k$ 가 짝수가 되는 k 의 개수와 $a_k + k$ 가 홀수가 되는 k 의 개수는 각각 짝수여야 한다.

따라서 $a_k + k$ 의 값이 홀수인 k 의 개수가 4보다 작으려면 그 개수는 0 또는 2이어야 한다.

(1) $a_k + k$ 의 값이 홀수인 k 의 개수가 0인 경우

숫자 1, 3, 5, 7이 적혀 있는 상자에 각각

1, 1, 3, 3이 적힌 카드를 넣어야 하고

숫자 2, 4, 6, 8이 적혀 있는 상자에 각각

2, 2, 4, 4가 적힌 카드를 넣어야 하므로

구하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!2!} \times \frac{4!}{2!2!} = 36$$

(2) $a_k + k$ 의 값이 홀수인 k 의 개수가 2인 경우

$a_k + k$ 의 값이 홀수가 되는 상자 2개를

숫자 1, 3, 5, 7이 적힌 상자 중에 한 개 선택하고

숫자 2, 4, 6, 8이 적힌 상자 중에 한 개 선택해야

한다.

따라서 $a_k + k$ 의 값이 홀수가 되는 상자 2개를

선택하는 방법의 수는

$${}_4C_1 \times {}_4C_1 = 16$$

위에서 숫자 1이 적힌 상자와 숫자 2가 적힌 상자를

각각 선택했다고 하면

숫자 1이 적힌 상자에 넣을 짝수가 적힌 카드를

결정하는 방법의 수는 2

숫자 2가 적힌 상자에 넣을 홀수가 적힌 카드를 결정하는 방법의 수는 2

남은 6개의 상자에 적힌 수와 홀짝이 같도록 카드를 넣는 방법의 수는

$$\frac{3!}{2!} \times \frac{3!}{2!} = 9$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$16 \times 2 \times 2 \times 9 = 576$$

(1), (2)에서 문제에서 구하는 경우의 수는

$$36 + 576 = 612$$

18. [출제 의도] 중복순열과 같은 것이 있는 순열을 이용하여 확률을 계산할 수 있는가?

문제에서 주어진 시행을 3회 반복하였을 때 나올 수 있는 모든 경우의 수는 $3^3 = 27$

(1) 뽑은 카드에 적힌 숫자의 합이 8인 경우

세 카드에 적힌 숫자가 각각 2, 3, 3인 경우이므로

구하는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

(2) 뽑은 카드에 적힌 숫자의 합이 9인 경우

세 카드에 적힌 숫자가 모두 3인 경우이므로

구하는 경우의 수는 1

(1), (2)에서 구하는 확률은

$$\frac{3+1}{27} = \frac{4}{27}$$

$$\therefore p+q = 31$$

19. [출제 의도] 같은 것이 있는 순열을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

상자를 숫자가 작은 것부터 큰 것의 순서대로 나열했다고 생각하면, 홀수가 적힌 공끼리는 적힌 숫자가 작은 공일수록 왼쪽에 있는 상자에 들어가야 하고, 짝수가 적힌 공끼리도 적힌 숫자가 작은 공일수록 왼쪽에 있는 상자에 들어가야 한다. ... (#)

이때 조건 (가)를 만족하는 경우는 다음과 같이 두 가지 경우가 있다.

(1) $a_7 < a_8$ 인 경우

a_7 은 홀수가 적힌 공이 들어 있는 상자 중 가장 오른쪽에 있는 상자에 적힌 숫자이고, a_8 은 짝수가 적힌 공이 들어 있는 상자 중 가장 오른쪽에 있는 상자에 적힌 숫자이므로 $a_8 = 8$ 이어야 한다.

상자 7에 들어갈 수 있는 공에 적힌 숫자는 6 또는 7이어야 하므로 조건 (가)에서 $a_7 = 7$ 이어야 한다.

따라서 문제에서 구하는 경우의 수는 1에서 6까지 적힌 공을 1에서 6까지 적힌 상자에 (#)를 만족하도록 넣는 방법의 수이므로

$$\frac{6!}{3!3!} = 20$$

(2) $a_8 < a_7$ 인 경우

(1)과 같은 방법으로 $a_7 = 8$ 이어야 한다. 또한 이 경우 $a_6 < a_8 < a_7$ 이므로 문제에서 구하는 경우의 수는 1에서 7까지 적힌 공을 1에서 7까지 적힌 상자에 (#)를 만족하도록 넣는 방법의 수이므로

$$\frac{7!}{3!4!} = 35$$

(1), (2)에서 문제에서 구하는 경우의 수는
 $20 + 35 = 55$

20. [출제 의도] 독립인 사건의 성질을 이용하여 확률을 계산할 수 있는가?

두 사건 A, B가 독립이므로 확률의 덧셈정리에 의하여

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = \frac{1}{2} \dots \textcircled{1}$$

$$P(A \cup B^c) = P(A) + P(B^c) - P(A \cap B^c) \\ = P(A) + \{1 - P(B)\} - P(A)\{1 - P(B)\} \\ = 1 - P(B) + P(A)P(B) = \frac{2}{3} \dots \textcircled{2}$$

①, ②를 변변 더하면

$$1 + P(A) = \frac{7}{6}, P(A) = \frac{1}{6}$$

이를 ②에 대입하여 풀면

$$1 - P(B) + \frac{1}{6}P(B) = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{2}{5}$$

$$\therefore P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{15}$$

21. [출제 의도] 이항분포의 정의를 이해하고 있는가?

$$P(X=1) = {}_n C_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = n \cdot \frac{2^{n-1}}{3^n}$$

$$P(X=2) = {}_n C_2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{2^{n-2}}{3^n}$$

이것 문제의 조건으로부터

$$\frac{P(X=2)}{P(X=1)} = 6 \text{ 이므로}$$

$$\frac{\frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{2^{n-2}}{3^n}}{n \cdot \frac{2^{n-1}}{3^n}} = \frac{n-1}{4} = 6$$

$$\therefore n = 25$$

22. [출제 의도] 여사건을 이용하여 확률을 계산할 수 있는가?

문제에서 구하는 확률은 주머니에서 3개의 공을 꺼낼 때, 노란 공과 파란 공의 개수의 합이 1 이하일 확률을 전체에서 제외한 것과 같다.

(1) 노란 공과 파란 공의 개수의 합이 1일 확률은 빨간 공을 2개 선택하고, 나머지 1개의 공을 노란 공 또는 파란 공 중 하나를 선택할 확률이므로

$$\frac{{}_3 C_2 \times {}_2 C_1 + {}_3 C_2 \times {}_2 C_1}{{}_7 C_3} = \frac{12}{35}$$

(2) 노란 공과 파란 공의 개수의 합이 0일 확률은 빨간 공을 3개 선택할 확률이므로

$$\frac{{}_3 C_3}{{}_7 C_3} = \frac{1}{35}$$

따라서 (1), (2)에서 문제에서 구하는 확률은

$$1 - \frac{12}{35} - \frac{1}{35} = \frac{22}{35}$$

23. [출제 의도] 조건부확률의 정의를 이해하고 있는가?

세 수 a, b, c 중 두 수만 서로 같은 사건을 A라 하고, $a \times b \times c$ 가 6의 배수인 사건을 B라 하자.

$$n(A) = {}_3 C_2 \times {}_6 P_2 = 90$$

이것, 사건 $A \cap B$ 는 아래와 같은 경우로 나누어

생각할 수 있다.

(1) 같은 두 수가 1 또는 5인 경우
 남은 하나의 수는 6이어야 하므로 가능한 경우의 수는 ${}_3 C_2 \times 1 \times 2 = 6$

(2) 같은 두 수가 2 또는 4인 경우
 남은 하나의 수는 3 또는 6이어야 하므로 가능한 경우의 수는 ${}_3 C_2 \times 2 \times 2 = 12$

(3) 같은 두 수가 3인 경우
 남은 하나의 수는 2 또는 4 또는 6이어야 하므로 가능한 경우의 수는 ${}_3 C_2 \times 3 = 9$

(4) 같은 두 수가 6인 경우
 남은 하나의 수는 6을 제외한 다섯 개의 수가 모두 될 수 있으므로 가능한 경우의 수는 ${}_3 C_2 \times 5 = 15$

(1)~(4)에서

$$n(A \cap B) = 6 + 12 + 9 + 15 = 42$$

조건부확률의 정의에 의하여 구하는 확률은

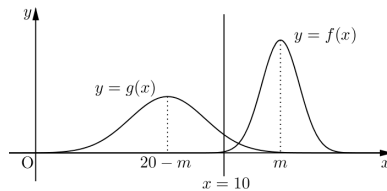
$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{7}{15}$$

24. [출제 의도] 정규분포의 성질을 이해하고, 이를 이용하여 확률을 계산할 수 있는가?

두 확률변수 X, Y의 평균인 m, 20-m의 평균이 10이므로 다음과 같은 경우로 나누어 생각한다.

(1) $m \geq 10$ 인 경우

두 확률변수 X, Y의 확률밀도함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$ 라 하면 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



이 경우

$$P(10 \leq X \leq m) = P(10 - m \leq Z \leq 0)$$

$$P(20 - m \leq Y \leq 10) = P\left(0 \leq Z \leq \frac{m-10}{2}\right)$$

이므로

$$P(10 \leq X \leq m) \geq P(20 - m \leq Y \leq 10)$$

이다. 따라서

$$P(X \leq 10) = \frac{1}{2} - P(10 \leq X \leq m)$$

$$P(Y \geq 10) = \frac{1}{2} - P(20 - m \leq Y \leq 10)$$

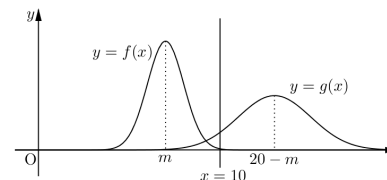
에서

$$P(X \leq 10) \leq P(Y \geq 10)$$

이다. 이는 문제의 조건을 만족시키지 않는다.

(2) $m < 10$ 인 경우

두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



k의 값이 증가할 때,

$P(X \leq k)$ 의 값은 증가하고 $P(Y \geq k)$ 의 값은 감소하므로 문제의 조건에서 $k=9$ 일 때

$$P(X \leq k) = P(Y \geq k) \text{ 이어야 한다.}$$

$$P(X \leq 9) = P(Z \leq 9 - m)$$

$$P(Y \geq 9) = P\left(Z \geq \frac{m-11}{2}\right)$$

$$\text{즉, } P(Z \leq 9 - m) = P\left(Z \geq \frac{m-11}{2}\right)$$

이므로 표준정규분포의 성질에서

$$9 - m + \frac{m-11}{2} = 0 \Rightarrow m = 7$$

$$\therefore P(X \geq 8) + P(Y \leq 14)$$

$$= P(Z \geq 1) + P\left(Z \leq \frac{1}{2}\right)$$

$$= (0.5 - 0.3413) + (0.5 + 0.1915) = 0.8502$$

25. [출제 의도] 조건부확률과 독립시행의 정의를 이용한 문제 해결 과정을 이해할 수 있는가?

(가): $X=3$ 인 경우는 주사위를 던져서 처음 두 번에는 3의 배수인 눈과 3의 배수가 아닌 눈이 각각 한 번씩 나오고, 세 번째에는 3의 배수의 눈이 나와야 한다. (총 2가지 경우)

또한, 네 번째와 다섯 번째에는 3의 배수가 아닌 눈이 나오고, 여섯 번째에는 3의 배수인 눈이 나와야 한다. (총 1가지 경우)

$$\therefore P(X=3) = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \Rightarrow p = 2$$

(나): $X=4$ 인 경우는 주사위를 던져서 처음 세 번에는 3의 배수인 눈이 한 번, 3의 배수가 아닌 눈이 두 번 나오고 네 번째에는 3의 배수인 눈이 나와야 한다. (총 3가지 경우)

또한, 다섯 번째와 여섯 번째에는 모두 3의 배수가 아닌 눈이 나와야 한다. (총 1가지 경우)

$$\therefore P(X=4) = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \Rightarrow q = 3$$

(다): (1), (2), (3)에서 구하는 확률은

$$\frac{3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^4}{\left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^4}$$

$$= \frac{48}{12 + 16 + 48} = \frac{12}{19} \Rightarrow r = \frac{12}{19}$$

$$\therefore p \times q \times r = 2 \times 3 \times \frac{12}{19} = \frac{72}{19}$$

26. [출제 의도] 이산확률분포를 따르는 확률변수와 표본평균의 성질을 이해하고 있는가?

$$P(X=x) = \frac{k}{x+1} C_2 \\ = \frac{2k}{x(x+1)} \quad (x=1, 2, 3, 4)$$

이것 확률질량함수의 성질에 의하여

$$\sum_{x=1}^4 \frac{2k}{x(x+1)} \\ = 2k \sum_{x=1}^4 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) \\ = 2k \left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{8}{5} k = 1 \quad \therefore k = \frac{5}{8}$$

$$\text{따라서 } P(X=x) = \frac{5}{4x(x+1)} \quad (x=1, 2, 3, 4)$$

이고,

$$E(X) = \sum_{x=1}^4 x \cdot \frac{5}{4x(x+1)}$$

$$= \frac{5}{4} \sum_{x=1}^4 \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{5}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) = \frac{77}{48}$$

한편 이 모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본의 표본평균을 \bar{X} 라 하면

$$Y = X_1 + X_2 = 2\bar{X}$$

이므로 확률변수와 표본평균의 성질에 의하여

$$\therefore E(24Y+1) = E(48\bar{X}+1)$$

$$= 48E(\bar{X})+1$$

$$= 48E(X)+1 = 77+1 = 78$$

27. [출제 의도] 원순열을 이용한 경우의 수를 구할 수 있는가?

(1) $n = 12$ 인 경우

조건 (가)를 만족하는 모든 경우는 1이 적힌 부채꼴의 양 옆에는 홀수를 배열하고, 나머지 부채꼴에 남은 수를 배열하는 경우이므로 그 경우의 수는 ${}_5P_2 \times 9! = 20 \times 9!$

조건 (가)를 만족하는 모든 경우에서 조건 (나)를 만족하지 않는 경우는 1이 적힌 부채꼴의 양 옆에 적힌 수의 합이 18 이상인 경우이고,

1이 적힌 부채꼴의 양 옆에 배열한 두 홀수의 합이 18 이상인 경우는 두 수가 각각 (7, 11), (9, 11)인 경우뿐이므로 조건 (가)를 만족하고, 조건 (나)를 만족하지 않는 경우의 수는 $2 \times 2 \times 9! = 4 \times 9!$

따라서 $f(12) = 20 \times 9! - 4 \times 9! = 16 \times 9!$

(2) $n = 13$ 인 경우

조건 (가)를 만족하는 모든 경우는 1이 적힌 부채꼴의 양 옆에는 홀수를 배열하고, 나머지 부채꼴에 남은 수를 배열하는 경우이므로 그 경우의 수는 ${}_6P_2 \times 10! = 30 \times 10!$

조건 (가)를 만족하는 모든 경우에서 조건 (나)를 만족하지 않는 경우는 1이 적힌 부채꼴의 양 옆에 적힌 수의 합이 20 이상인 경우이고,

1이 적힌 부채꼴의 양 옆에 배열한 두 홀수의 합이 20 이상인 경우는 두 수가 각각 (7, 13), (9, 11), (9, 13), (11, 13)인 경우뿐이므로

조건 (가)를 만족하고, 조건 (나)를 만족하지 않는 경우의 수는 $4 \times 2 \times 10! = 8 \times 10!$

따라서 $f(13) = 30 \times 10! - 8 \times 10! = 22 \times 10!$

(1), (2)에서 $\frac{f(13)}{f(12)} = \frac{22 \times 10!}{16 \times 9!} = \frac{55}{4}$

$\therefore p + q = 59$

28. [출제 의도] 중복조합을 이용하여 문제의 조건을 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있는가?

함수 f 의 치역을 선택하는 방법의 수는

$${}_4C_3 = 4 \dots \textcircled{1}$$

조건 (나), (다)에서 선택된 함수 f 의 치역의 원소 중에서 가장 큰 것은 $f(4)$ 이고,

$f(1), f(2), f(3)$ 을 선택하는 모든 방법의 수는

$${}_3H_3 = {}_5C_3 = 10$$

$f(5), f(6), f(7)$ 을 선택하는 모든 방법의 수는

$${}_3H_3 = {}_5C_3 = 10$$

이므로 함수 f 의 치역의 원소의 개수가 3 이하가 되도록 함수 f 를 결정하는 방법의 수는

$$10 \times 10 = 100 \dots \textcircled{2}$$

이 중에서

함수 f 의 치역의 원소의 개수가 1이 되도록 함수 f 를 결정하는 방법의 수는 1 $\dots \textcircled{3}$

함수 f 의 치역의 원소의 개수가 2가 되도록 함수 f 를 결정하는 방법의 수는

$${}_2C_1 \times ({}_2H_3 \times {}_2H_3 - 1) = 30 \dots \textcircled{4}$$

①, ②, ③, ④에서

문제의 조건을 만족시키는 모든 함수 f 의 개수는

$$4 \times (100 - 1 - 30) = 276$$

29. [출제 의도] 이산확률변수의 성질을 이해하고, 평균과 분산을 구할 수 있는가?

이산확률변수의 성질에 의하여

$$\frac{1}{3} + a + b + \frac{1}{6} = 1 \Rightarrow a + b = \frac{1}{2} \dots \textcircled{1}$$

$$E(X) = \frac{1}{3} + 2a + 3b + \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$$

에서 $2a + 3b = \frac{4}{3} \dots \textcircled{2}$

①, ②를 연립하여 풀면 $a = \frac{1}{6}, b = \frac{1}{3}$

따라서

$$E(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{1}{6} + 3^2 \times \frac{1}{3} + 4^2 \times \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 3 + \frac{8}{3} = \frac{20}{3}$$

이므로

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{20}{3} - \frac{49}{9} = \frac{11}{9}$$

$$\therefore V(3X+1) = 9V(X) = 11$$

30. [출제 의도] 같은 것이 있는 순열의 수를 활용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

문자 a 가 적힌 카드끼리 서로 이웃하지 않게 카드를 나열하는 방법의 수는 카드를 나열하는 모든 방법의 수에서 a 가 적힌 카드끼리 이웃하는 경우의 수를 제외하면 되므로

$$\frac{7!}{2!2!} - \frac{6!}{2!} = 1260 - 360 = 900$$

한편, 숫자가 적힌 카드가 작은 수부터 크기순으로 왼쪽부터 오른쪽으로 나열해야 하므로 숫자 1, 2, 3이 적힌 카드를 서로 같은 것으로 봐야 한다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$900 \times \frac{1}{3!} = 150$$

31. [출제 의도] 모평균의 신뢰구간을 구할 수 있는가?

승객 n 명을 임의추출하여 버스를 기다리는 시간을 조사한 표본평균을 \bar{x} 라 하면 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

이므로

$$2 \times 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 11.12 - 8.88 = 2.24$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2.24}{3.92} = \frac{4}{7} \dots \textcircled{1}$$

문제의 조건에서 $\frac{n}{\sigma} = 12.25 = \frac{49}{4} \dots \textcircled{2}$

①, ②에서 $n = 49, \sigma = 4 \therefore n + \sigma = 53$

32. [출제 의도] 조건부확률의 정의를 이해하고 있는가?

$a + b + c \leq 4$ 인 경우는 뽑은 공에 적힌 세 수가 각각 1, 1, 1이거나 1, 1, 2인 경우뿐이다.

따라서 $a + b + c > 4$ 일 확률은

$$1 - \frac{{}_3C_3}{{}_6C_3} - \frac{{}_3C_2 \times {}_2C_1}{{}_6C_3} = \frac{13}{20} \dots \textcircled{1}$$

이때 $a + b + c > 4$ 이면서 세 수 a, b, c 중 적어도 두 수가 같은 경우는 뽑은 세 수가 1, 1, 1이거나 1, 1, 2이거나 1, 2, 3이 아닌 경우이다.

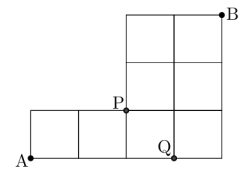
따라서 $a + b + c > 4$ 이고 a, b, c 중 적어도 두 수가 같은 확률은

$$1 - \frac{{}_3C_3 + {}_3C_2 \times {}_2C_1 + {}_3C_1 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1}{{}_6C_3} = \frac{7}{20} \dots \textcircled{2}$$

①, ②에서 구하는 확률은

$$\frac{\frac{7}{20}}{\frac{13}{20}} = \frac{7}{13} \therefore p + q = 20$$

33. [출제 의도] 같은 것이 있는 순열을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?



위 그림과 같이 도로망을 따라 A 지점에서 B 지점까지 최단거리로 가기 위해서는 P 지점 또는 Q 지점 중 하나를 반드시 지나야 한다.

(1) $A \rightarrow P \rightarrow B$ 의 경로로 이동하는 방법의 수는

$$\frac{3!}{2!} \times \frac{4!}{2!2!} = 3 \times 6 = 18$$

(2) $A \rightarrow Q \rightarrow B$ 의 경로로 이동하는 방법의 수는

$$1 \times \frac{4!}{3!} = 4$$

(1), (2)에서 도로망을 따라 A 지점에서 B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는

$$18 + 4 = 22$$

34. [출제 의도] 경우의 수를 이용한 수학적 확률을 구할 수 있는가?

흰 공의 개수가 검은 공의 개수보다 많은 경우는 꺼낸 3개의 공 중 흰 공의 개수가 2이거나 3인 경우이다.

흰 공의 개수가 2일 확률은

$$\frac{{}_3C_2 \times {}_4C_1}{{}_7C_3} = \frac{12}{35}$$

흰 공의 개수가 3일 확률은

$$\frac{{}_3C_3 \times {}_4C_0}{{}_7C_3} = \frac{1}{35}$$

이므로 구하는 확률은 $\frac{12+1}{35} = \frac{13}{35}$ 이다.

35. [출제 의도] 이산확률분포를 따르는 확률변수의 기댓값과 분산을 구할 수 있는가?

주어진 함수의 그래프로부터

$a = 1$ 일 때 $X = 0$

$a = 2, 3$ 일 때 $X = 1$

$a = 4, 5$ 일 때 $X = 3$

$a = 6$ 일 때 $X = 4$

이므로 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

따라서

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{6} = 2$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{6} + 1^2 \times \frac{1}{3} + 3^2 \times \frac{1}{3} + 4^2 \times \frac{1}{6} = 6$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 6 - 4 = 2$$

36. [출제 의도] 모평균에 대한 신뢰구간을 구할 수 있는가?

모집단에서 크기가 n 인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균이 \bar{X} 일 때, 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\bar{X} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{X} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

이므로 문제의 조건에서

$$(a + 2.94) - a = 2 \times 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}} \text{ 에서 } \sigma = 3$$

한편, 학생 25명을 임의추출하여 얻은 신뢰구간은

$$\bar{x} - 1.96 \times \frac{3}{\sqrt{25}} \leq m \leq \bar{x} + 1.96 \times \frac{3}{\sqrt{25}}$$

$$\Leftrightarrow \bar{x} - 1.176 \leq m \leq \bar{x} + 1.176$$

이므로 문제의 조건에서

$$\bar{x} - 1.176 = 5.324 \quad \therefore \bar{x} = 6.5$$

$$\Rightarrow c = 6.5 + 1.176 = 7.676$$

$$\therefore \bar{x} + c = 14.176$$

37. [출제 의도] 독립시행의 확률을 이용하여 조건부확률을 계산할 수 있는가?

$x_4 > y_4$ 인 경우는 한 개의 동전을 네 번 던지는 시행에서 앞면이 나오는 횟수가 뒷면이 나오는 횟수보다 많은 경우이다.

따라서 $x_4 > y_4$ 일 확률은

$$({}_4C_0 + {}_4C_1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16}$$

한편

(1) $x_4 > y_4$ 이고 $x_2 = y_2$ 인 경우는 동전을 던지는 시행에서 2회까지는 동전의 앞면과 뒷면이 한 번씩 나오고, 3회, 4회에서는 모두 앞면이 나오는 경우이다. 따라서 $x_2 = y_2$ 일 확률은

$${}_2C_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}$$

(2) $x_4 > y_4$ 이고 $x_6 = y_6$ 인 경우는 동전을 던지는 시행에서 4회까지는 동전의 앞면이 세 번, 뒷면이 한 번 나오고, 5회와 6회에서는 모두 뒷면이 나오는 경우이다. 따라서 $x_6 = y_6$ 일 확률은

$${}_4C_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{16}$$

(3) $x_4 > y_4$ 이고 $x_2 = y_2$ 이고 $x_6 = y_6$ 인 경우는 2회까지는 동전의 앞면과 뒷면이 한 번씩 나오고, 3회, 4회에서는 모두 앞면이, 5회, 6회에서는 모두 뒷면이 나오는 경우이다.

따라서 $x_2 = y_2$ 이고 $x_6 = y_6$ 일 확률은

$${}_2C_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{32}$$

(1)~(3)에서 $x_4 > y_4$ 이고 $(x_2 - y_2)(x_6 - y_6) = 0$

$$\text{일 확률은 } \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} = \frac{5}{32}$$

따라서 조건부확률의 정의에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{\frac{5}{32}}{\frac{5}{16}} = \frac{1}{2}$$

38. [출제 의도] 중복조합을 활용하여 문제의 조건을 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있는가?

두 사건 A, B 에 대하여

$$n(A \cup B) = n(A) + n(A^c \cap B)$$

이므로 다음과 같은 두 가지 경우로 나누어 생각한다.

(1) a_4 가 3의 배수인 경우

$a_4 = 3$ 인 경우 $a_1 + a_2 + a_3 = 9$ 이므로

이를 만족시키는 순서쌍 (a_1, a_2, a_3, a_4) 의 개수는

$${}_3H_{9-3} = {}_8C_2 = 28$$

$a_4 = 6$ 인 경우 $a_1 + a_2 + a_3 = 6$ 이므로

이를 만족시키는 순서쌍 (a_1, a_2, a_3, a_4) 의 개수는

$${}_3H_{6-3} = {}_5C_3 = 10$$

$a_4 = 9$ 인 경우 $a_1 + a_2 + a_3 = 3$ 이므로

이를 만족시키는 순서쌍 (a_1, a_2, a_3, a_4) 의 개수는

$${}_3H_{3-3} = 1$$

따라서 a_4 가 3의 배수이고, 문제의 조건을

만족시키는 순서쌍 (a_1, a_2, a_3, a_4) 의 개수는

$$28 + 10 + 1 = 39$$

(2) a_4 가 3의 배수가 아니고 $a_1 = a_2$ 인 경우

$a_1 = a_2 = 1$ 인 경우 $a_3 + a_4 = 10$ 이고 a_4 가 3의

배수가 아니므로 이를 만족시키는 순서쌍

(a_1, a_2, a_3, a_4) 의 개수는 $9 - 3 = 6$ 이다.

비슷한 방법으로

$a_1 = a_2 = 2$ 인 경우 $a_3 + a_4 = 8$ 이므로 순서쌍

(a_1, a_2, a_3, a_4) 의 개수는 $7 - 2 = 5$

$a_1 = a_2 = 3$ 인 경우 $a_3 + a_4 = 6$ 이므로 순서쌍

(a_1, a_2, a_3, a_4) 의 개수는 $5 - 1 = 4$

$a_1 = a_2 = 4$ 인 경우 $a_3 + a_4 = 4$ 이므로 순서쌍

(a_1, a_2, a_3, a_4) 의 개수는 $3 - 1 = 2$

$a_1 = a_2 = 5$ 인 경우 $a_3 + a_4 = 2$ 이므로 순서쌍

(a_1, a_2, a_3, a_4) 의 개수는 1

따라서 a_4 가 3의 배수가 아니고 $a_1 = a_2$ 인 경우

문제의 조건을 만족시키는 순서쌍 (a_1, a_2, a_3, a_4) 의

개수는 $6 + 5 + 4 + 2 + 1 = 18$

(1), (2)에서 문제의 조건을 만족시키는 모든

순서쌍 (a_1, a_2, a_3, a_4) 의 개수는

$$39 + 18 = 57$$

39. [출제 의도] 이항정리를 이용하여 식의 값을 계산할 수 있는가?

$$(x+2)(x+1)^7 = x(x+1)^7 + 2(x+1)^7$$

에서 전개식의 x^n 의 계수는

$$a_n = {}_7C_{n-1} + 2 \times {}_7C_n$$

$$\therefore \sum_{n=1}^6 a_n = \sum_{n=1}^6 ({}_7C_{n-1} + 2 \times {}_7C_n)$$

$$= \sum_{n=0}^7 (3 \times {}_7C_n) - {}_7C_6 - {}_7C_7$$

$$= 3 \times 2^7 - 12 = 372$$

(다른 풀이1-betive37)

$f(x) = (x+2)(x+1)^7$ 이라 하면

$$\sum_{n=1}^6 a_n = f(1) - (\text{상수항}) - (x^7 \text{의 계수}) - (x^8 \text{의 계수})$$

$$= 3 \times 2^7 - 2 - ({}_7C_6 + 2 \times {}_7C_7) - 1$$

$$= 372$$

(다른 풀이2)

$$(x+2)(x+1)^7 = (x+1)^8 + (x+1)^7$$

에서 전개식의 x^n 의 계수는

$$a_n = {}_8C_n + {}_7C_n$$

$$\therefore \sum_{n=1}^6 a_n = \sum_{n=1}^6 ({}_8C_n + {}_7C_n)$$

$$= \left(\sum_{n=0}^8 {}_8C_n - {}_8C_0 - {}_8C_8 \right)$$

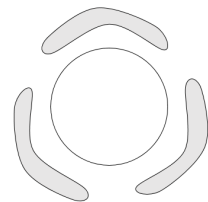
$$+ \left(\sum_{n=0}^7 {}_7C_n - {}_7C_0 - {}_7C_7 \right)$$

$$= (2^8 - 10) + (2^7 - 2) = 372$$

40. [출제 의도] 원순열을 이용한 경우의 수를 구할 수 있는가?

그림과 같이 원탁에 1학년, 2학년, 3학년이 서로 이웃하게 앉을 위치를 정하는 방법의 수는

$$\frac{3!}{3} = 2 \dots \textcircled{1}$$



위에서 구한 각 위치에 대하여 1학년, 2학년, 3학년 학생들이 각각 자리를 바꾸는 방법의 수는

$$3! \times 3! \times 2! = 72 \dots \textcircled{2}$$

①, ②에서 구하는 경우의 수는

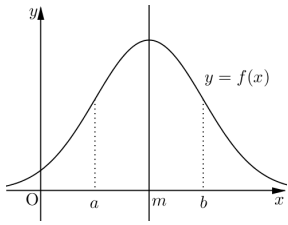
$$2 \times 72 = 144$$

41. [출제 의도] 정규분포의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르는 확률변수 X 의 확률밀도함수 $f(x)$ 의 그래프는 $x = m$ 에 대하여 대칭이므로 아래 그림에서

$$P(X \leq a) + P(X \leq b) = 1 \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} = m$$

이다.



또한,

$$P(X \leq a) + P(X \leq b) < 1 \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} < m$$

이고

$$P(X \leq a) + P(X \leq b) > 1 \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} > m$$

이다.

따라서 문제의 조건 (가)에서

$$P(X \leq 7) + P(X \leq 18) < 1 \Leftrightarrow \frac{25}{2} < m$$

$$P(X \leq 8) + P(X \leq 19) \geq 1 \Leftrightarrow \frac{27}{2} \geq m$$

$$\therefore \frac{25}{2} < m \leq \frac{27}{2}$$

m 은 자연수이므로 $m = 13$

조건 (나)에서

$$\begin{aligned} P(X \geq 2m-1) &= P\left(Z \geq \frac{12}{\sigma}\right) \\ &= \frac{1}{2} - P\left(0 \leq Z \leq \frac{12}{\sigma}\right) = 0.0668 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } P\left(0 \leq Z \leq \frac{12}{\sigma}\right) = 0.4332$$

주어진 표준정규분포표에서 $\frac{12}{\sigma} = 1.5, \sigma = 8$

$$\therefore m + \sigma = 13 + 8 = 21$$

42. [출제 의도] 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 계산할 수 있는가?

$P(A^c) = 1 - P(A)$ 이므로

$$P(B) = 1 - P(A) \Rightarrow P(A) + P(B) = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

43. [출제 의도] 이항분포를 따르는 확률변수의 평균과 분산을 계산할 수 있는가?

두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 두 눈의 수의 곱이 짝수가 될 확률은 (두 눈 중 적어도 하나가

짝수인 경우이므로) $1 - \frac{3^2}{6^2} = \frac{3}{4}$ 이다.

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(16, \frac{3}{4}\right)$ 를 따른다.

$$\therefore E(X) = 16 \times \frac{3}{4} = 12, V(X) = 16 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = 3$$

$$\therefore E(X^2) = V(X) + \{E(X)\}^2 = 3 + 144 = 147$$

44. [출제 의도] 조건부확률의 정의를 이해하고 있는가?

학생 100명 중 한 명을 임의로 선택하였을 때, 사건 A 를 이 학생이 공원 B 를 선택한 학생인 사건, 사건 B 를 이 학생이 남학생인 사건이라고 하자.

문제에서 주어진 표에 의하여

$$n(A) = 45, n(A \cap B) = 30 \text{이므로 조건부확률의}$$

정의에 의하여 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}$$

45. [출제 의도] 중복조합을 활용하여 문제의 조건을 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있는가?

문제에서 구하는 경우의 수는

(1) 빨간 공 3개와 파란 공 4개를 주머니

A, B, C 에 넣는 모든 방법의 수

에서

(2) 주머니 A 에 공이 하나도 들어가지 않는 경우,

(3) 주머니 A 에 공이 1개 들어가는 경우

(4) 주머니 A 에 공이 2개 들어가는 경우

를 제외하면 된다.

(1) 빨간 공 3개와 파란 공 4개를 주머니

A, B, C 에 넣는 모든 방법의 수는

$${}_3H_3 \times {}_3H_4 = {}_5C_3 \times {}_6C_4 = 150$$

(2) 주머니 A 에 공이 하나도 들어가지 않는 경우는

주머니 B, C 에만 빨간 공 3개와 파란 공 4개를

각각 넣는 경우이므로 그 경우의 수는

$${}_2H_3 \times {}_2H_4 = {}_4C_3 \times {}_5C_4 = 20$$

(3) 주머니 A 에 공이 하나만 들어가는 경우는

주머니 A 에 빨간 공 1개가 들어가거나

주머니 A 에 파란 공 1개가 들어가는 경우이므로

그 경우의 수는

$$\begin{aligned} &{}_2H_2 \times {}_2H_4 + {}_2H_3 \times {}_2H_3 \\ &= {}_3C_2 \times {}_5C_4 + {}_4C_3 \times {}_4C_3 \\ &= 15 + 16 = 31 \end{aligned}$$

(4) 주머니 A 에 공이 2개 들어가는 경우는

주머니 A 에 빨간 공 2개가 들어가거나

주머니 A 에 빨간 공과 파란 공이 각각 1개

들어가거나

주머니 A 에 파란 공 2개가 들어가는 경우이므로

그 경우의 수는

$$\begin{aligned} &{}_2H_1 \times {}_2H_4 + {}_2H_2 \times {}_2H_3 + {}_2H_3 \times {}_2H_2 \\ &= {}_2C_1 \times {}_5C_4 + {}_3C_2 \times {}_4C_3 + {}_4C_3 \times {}_3C_2 \\ &= 10 + 12 + 12 = 34 \end{aligned}$$

(1)~(4)에서 문제의 조건을 만족시키는 경우의

수는

$$150 - 20 - 31 - 34 = 65$$

(다른 풀이-이승민)

7개의 공을 3개의 주머니에 넣으므로 어떤 경우라도

적어도 하나의 주머니에는 3개 이상의 공이

들어간다.

또한, 3개 이상의 공이 들어가는 주머니는 한 개

또는 두 개이므로 문제의 조건을 만족시키는 경우는

(i) 주머니 A 에만 3개 이상의 공이 들어가는 경우

(ii) 주머니 A, B 또는 A, C 에 3개 이상의 공이

들어가는 경우뿐이다.

(i) 주머니 A 에만 3개 이상의 공이 들어가는 경우

(i)의 여사건은 2개의 주머니에 각각 3개 이상의

공이 들어가는 경우이고, 이러한 경우는 세 개의

주머니에 들어가는 공의 개수가 3, 3, 1이거나

4, 3, 0인 경우뿐이다.

위의 각 경우에서 주머니에 들어 있는 공의 개수는

정해져 있으므로 빨간 공 3개가 어떻게

들어가는지만 결정하면 된다.

따라서 특정한 세 개의 주머니에 들어가는 공의 개수가 3, 3, 1인 경우의 수는 빨간 공 3개 중 2개 이상의 공이 공의 개수가 1인 주머니에 들어가는 경우의 수를 제외하면 되므로

$${}_3H_3 - {}_3H_1 = 7$$

특정한 세 개의 주머니에 들어가는 공의 개수가

4, 3, 0인 경우의 수는

$${}_2H_3 = 4$$

이다.

세 개의 주머니에 빨간 공 3개와 파란 공 4개를

넣는 모든 방법의 수는

$${}_3H_3 \times {}_3H_4 = 150$$

이므로 한 개의 주머니에만 3개 이상의 공이

들어가는 경우의 수는

$$150 - {}_3C_1 \times 7 - 3! \times 4 = 105$$

이때 주머니 A, B, C 중 하나에만 3개 이상의 공이

들어가는 경우의 수는 모두 동일하므로

주머니 A 에만 3개 이상의 공이 들어가는 경우의 수는

$$\frac{105}{3} = 35$$

(ii) 주머니 A, B 또는 A, C 에 3개 이상의 공이 들어가는 경우

(i)에서 세 개의 주머니에 들어가는 공의 개수가

3, 3, 1인 경우의 수는 7이므로

주머니 A, B 또는 A, C 에 각각 3개의 공이

들어가는 경우의 수는

$${}_2C_1 \times 7 = 14$$

세 개의 주머니에 들어가는 공의 개수가

4, 3, 0인 경우의 수는 4이므로

주머니 A, B 또는 A, C 에 각각 3, 4개의 공이

들어가는 경우의 수는

$${}_2C_1 \times {}_2C_1 \times 4 = 16$$

따라서 주머니 A, B 또는 A, C 에 3개 이상의 공이

들어가는 경우의 수는

$$14 + 16 = 30$$

(i), (ii)에서 문제의 구하는 경우의 수는

$$35 + 30 = 65$$

46. [출제 의도] 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

양 끝에 같은 문자가 오는 경우는 양 끝에 모두

A 가 오거나 B 가 오는 경우이다.

(1) 양 끝에 모두 A 가 오는 경우

구하는 경우의 수는 A, A, B, B, C 를 일렬로

나열하는 방법의 수와 같으므로

$$\frac{5!}{2!2!} = 30$$

(2) 양 끝에 모두 B 가 오는 경우

구하는 경우의 수는 A, A, A, A, C 를 일렬로

나열하는 방법의 수와 같으므로

$$\frac{5!}{4!} = 5$$

(1), (2)에서 구하는 경우의 수는

$$30 + 5 = 35$$

47. [출제 의도] 여사건의 확률을 이용하여 문제의 조건을 만족시킬 확률을 구할 수 있는가?

문제의 사건의 여사건은 상자를 한 장씩 뽑는 시행을 반복할 때, 세 번째 시행과 여섯 번째 시행에서 모두 홀수가 적힌 카드가 뽑히는 경우이다.

세 번째 시행과 여섯 번째 시행에서 모두 홀수가 적힌 카드가 뽑힐 확률은

$$\frac{{}_4P_2 \times 4!}{6!} = \frac{2}{5}$$

이므로 구하는 확률은

$$1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

이다.

$$\therefore p = 5, q = 3 \Rightarrow p + q = 8$$

(다른 풀이-오르비 유지)

카드를 임의로 한 장씩 뽑는 시행을 반복할 때, 각 시행에서 홀수를 뽑을 확률과 짝수를 뽑을 확률은 모두 같다.

따라서 세 번째 시행과 여섯 번째 시행이 모두 홀수가 나올 확률은

$$\frac{4}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

이고, 구하는 확률은

$$1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

이다.

48. [출제 의도] 여사건을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

서로 다른 4개의 공을 세 상자 A, B, C에 넣는 모든 방법의 수는 $3^4 = 81$ 이고, 상자 A에 공이 하나도 들어가지 않는 경우의 수는 $2^4 = 16$ 이므로 구하는 경우의 수는 $81 - 16 = 65$ 이다.

49. [출제 의도] 표본평균과 정규분포의 성질을 이용하여 확률을 계산할 수 있는가?

확률변수 X 가 정규분포 $N(150, 10^2)$ 을 따르므로 표본평균 \bar{X} 는 정규분포 $N\left(150, \left(\frac{10}{5}\right)^2\right)$ 을 따른다.

따라서

$$\begin{aligned} P(X \leq 140) + P(\bar{X} \geq 153) \\ &= P\left(Z \leq \frac{140 - 150}{10}\right) + P\left(Z \geq \frac{153 - 150}{2}\right) \\ &= P(Z \leq -1) + P(Z \geq 1.5) \\ &= (0.5 - 0.3413) + (0.5 - 0.4332) \\ &= 0.1587 + 0.0668 = 0.2255 \end{aligned}$$

50. [출제 의도] 원순열을 이용하여 조건부확률을 계산할 수 있는가?

(1) 6가지의 색을 그림에 칠하는 모든 방법의 수는 $(6-1)! = 120$

빨간색과 파란색을 이웃한 두 정삼각형에 칠하는 방법의 수는

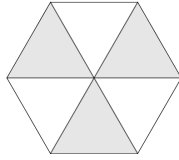
$$(5-1)! \times 2! = 48$$

이므로 빨간색과 파란색을 서로 이웃하지 않는 두 정삼각형에 칠하는 방법의 수는

$$120 - 48 = 72$$

(2) 빨간색과 파란색을 서로 이웃하지 않는 두 정삼각형에 칠하였을 때, 노란색을 칠한

정삼각형이 빨간색과 파란색을 칠한 삼각형과 각각 이웃하지 않으려면 그림과 같이 빨간색, 파란색, 노란색을 칠한 정삼각형 사이에 각각 하나의 정삼각형만 위치해야 한다.



위와 같이 빨간색, 파란색, 노란색이 각각 이웃하지 않도록 여섯 개의 정삼각형을 칠하는 방법의 수는 $(3-1)! \times 3! = 12$

(1), (2)에서 조건부확률의 정의에 의하여 구하는 확률은 $\frac{12}{72} = \frac{1}{6}$

51. [출제 의도] 정규분포의 성질을 이해하고 있는가?

$$P(X \leq 7) = P\left(Z \leq \frac{7-5}{1}\right) = P(Z \leq 2)$$

이고,

$$P(Y \geq k) = P\left(Z \geq \frac{k-10}{\sigma}\right)$$

이고, 표준정규분포의 성질에서

$$P(Z \leq 2) = P(Z \geq -2)$$

이므로 문제의 조건에서

$$\frac{k-10}{\sigma} = -2 \Rightarrow k = 10 - 2\sigma$$

인 실수 k 가 닫힌구간 $[6, 8]$ 에 존재한다. 즉,

$$6 \leq 10 - 2\sigma \leq 8$$

$$\Rightarrow -4 \leq -2\sigma \leq -2, 1 \leq \sigma \leq 2 \dots (*)$$

$$P(Y \geq 12) = P\left(Z \geq \frac{12-10}{\sigma}\right) = P\left(Z \geq \frac{2}{\sigma}\right)$$

이고, (*)에서 $1 \leq \frac{2}{\sigma} \leq 2$ 이므로

$$P(Y \geq 12) \text{의 최댓값은 } P(Z \geq 1) \text{ 이고,}$$

$$P(Y \geq 12) \text{의 최솟값은 } P(Z \geq 2) \text{ 이다.}$$

따라서 $P(Y \geq 12)$ 의 최댓값과 최솟값의 합은

$$P(Z \geq 1) + P(Z \geq 2)$$

$$= 1 - P(0 \leq Z \leq 1) - P(0 \leq Z \leq 2)$$

$$= 1 - 0.3413 - 0.4772 = 0.1815$$

52. [출제 의도] 여사건을 이용한 확률을 계산할 수 있는가?

뽑은 네 개의 공에 적힌 수 중에 가장 작은 수와 큰 수의 곱이 6인 경우는

(i) 가장 작은 수가 1이고 가장 큰 수가 6인 경우 또는

(ii) 가장 작은 수가 2이고 가장 큰 수가 3인 경우 뿐이다.

(i) 가장 작은 수가 1이고 가장 큰 수가 6인 경우 1과 6이 적힌 공이 각각 적어도 하나씩은 선택되어야 하므로 그 여사건인 '1이 적힌 공이 선택되지 않거나 6이 적힌 공이 선택되지 않은 경우'를 제외하여 확률을 계산할 수 있다.

공을 뽑는 시행에서 1이 적힌 공이 선택되지 않을 확률과 6이 적힌 공이 선택되지 않을 확률은 각각

$$\left(\frac{{}_5C_2}{{}_6C_2}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

이고, 1과 6이 적힌 공이 모두 선택되지 않을 확률은

$$\left(\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2}\right)^2 = \frac{4}{25}$$

이므로 확률의 덧셈정리에 의하여 1이 적힌 공이 선택되지 않거나 6이 적힌 공이 선택되지 않을 확률은

$$\frac{4}{9} + \frac{4}{9} - \frac{4}{25} = \frac{164}{225}$$

이다.

따라서 네 개의 공 중 1과 6이 적힌 공이 각각 적어도 하나씩 선택될 확률은

$$1 - \frac{164}{225} = \frac{61}{225}$$

(ii) 가장 작은 수가 2이고 가장 큰 수가 3인 경우가 경우는 각각의 주머니에서 모두 2와 3이 적힌 공을 선택하는 경우이므로 구하는 확률은

$$\left(\frac{1}{{}_6C_2}\right)^2 = \frac{1}{225}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{61}{225} + \frac{1}{225} = \frac{62}{225}$$

(다른 풀이)

다음과 같은 경우로 나누어 확률을 직접 계산할 수도 있다.

(i) 하나의 주머니에서 1, 6이 적힌 공이 모두 선택되는 경우

하나의 주머니에서 1, 6이 적힌 공이 모두 선택될 확률은 각각

$$\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2} = \frac{1}{15}$$

이고, 두 개의 주머니에서 모두 1, 6이 적힌 공이 선택될 확률은

$$\left(\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2}\right)^2 = \frac{1}{225}$$

이므로 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{15} - \frac{1}{225} = \frac{29}{225}$$

(ii) 하나의 주머니에서는 1이 적힌 공만 나오고, 다른 주머니에서는 6이 적힌 공만 나오는 경우 구하는 확률은

$$2 \times \left(\frac{1 \times {}_4C_1}{{}_6C_2}\right)^2 = \frac{32}{225}$$

(iii) 두 개의 주머니에서 모두 2와 3이 적힌 공이 나오는 경우

구하는 확률은

$$\left(\frac{1}{{}_6C_2}\right)^2 = \frac{1}{225}$$

(i), (ii), (iii)에서 문제에서 구하는 확률은

$$\frac{29}{225} + \frac{32}{225} + \frac{1}{225} = \frac{62}{225}$$

53. [출제 의도] 이산확률변수의 성질을 이해하고, 기댓값과 분산을 구할 수 있는가?

확률질량함수의 성질에 의하여

$$\sum_{k=1}^4 (ak + b) = 1 \Rightarrow 10a + 4b = 1 \dots \textcircled{1}$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^4 k(ak+b) = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow 30a+10b = \frac{8}{3}, 90a+30b = 8 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{를 연립하여 풀면 } a = \frac{1}{30}, b = \frac{1}{6}$$

$$\therefore E(X^2) = \sum_{k=1}^4 k^2(ak+b)$$

$$= 100a+30b = \frac{25}{3}$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{25}{3} - \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{11}{9}$$

$$\therefore V(3X) = 9V(X) = 11$$

54. [출제 의도] 사건의 독립의 정의를 이해하고 있는가?

사건 A는 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수의 합이 3, 6, 9, 12가 되는 사건이므로

$$P(A) = \frac{2+5+4+1}{6^2} = \frac{1}{3}$$

두 사건 A, B가 서로 독립이 되려면

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

이어야 하므로 다음과 같이 나누어 생각한다.

(1) $1 \leq n \leq 3$ 인 경우

$$P(A \cap B) = P(A) = \frac{1}{3} \text{이므로}$$

$P(B) = 1$ 이어야 한다. 이를 만족하는 자연수 n의 값은 $n = 1, 2$ 이다.

(2) $3 < n \leq 6$ 인 경우

$$P(A \cap B) = \frac{5+4+1}{6^2} = \frac{5}{18} \text{이므로}$$

$$P(B) = \frac{5}{6} = \frac{30}{36} \text{이어야 한다.}$$

즉, 두 눈의 수의 합이 n 이상이 되는 경우의 수가 30이어야 하므로 이를 만족시키는 자연수 n의 값은 $n = 5$ 이다.

(3) $6 < n \leq 9$ 인 경우

$$P(A \cap B) = \frac{4+1}{6^2} = \frac{5}{36} \text{이므로}$$

$$P(B) = \frac{5}{12} = \frac{15}{36} \text{이어야 한다.}$$

즉, 두 눈의 수의 합이 n 이상이 되는 경우의 수가 15이어야 하므로 이를 만족시키는 자연수 n의 값은 $n = 8$ 이다.

(4) $9 < n \leq 12$ 인 경우

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36} \text{이므로}$$

$$P(B) = \frac{1}{12} = \frac{3}{36} \text{이어야 한다.}$$

즉, 두 눈의 수의 합이 n 이상이 되는 경우의 수가 3이어야 하므로 이를 만족시키는 자연수 n의 값은 $n = 11$ 이다.

(1) ~ (4)에서 문제의 조건을 만족시키는 자연수 n의 값의 합은

$$1+2+5+8+11 = 27$$

55. [출제 의도] 중복조합을 이용하여 수학적 확률을 계산할 수 있는가?

다음과 같이 함수 f의 치역의 원소의 개수로 경우를 나누어 생각한다.

(1) 함수 f의 치역의 원소의 개수가 1인 경우

이 경우 함수 f는 조건 (가)를 만족시킨다.

함수 f의 치역의 원소를 택하는 방법의 수는

$${}_3C_1 = 3$$

함수 f의 치역을 {a}라 하면 조건 (나)에서

$g(a) = a$ 이어야 하므로 조건을 만족시키는

함수 g의 개수는

$$4^3 = 64$$

따라서 이 경우 조건을 만족시키는 함수 f, g의

순서쌍 (f, g)의 개수는

$$3 \times 64 = 192$$

(2) 함수 f의 치역의 원소의 개수가 2인 경우

조건 (가)를 만족시키는 함수 f의 개수는

$${}_3C_2 \times {}_2H_{4-2} = 9$$

함수 f의 치역을 {a, b}라 하면

조건 (나)에서 $g(a) = a, g(b) = b$ 이어야 하므로

조건을 만족시키는 함수 g의 개수는

$$4^2 = 16$$

따라서 이 경우 조건을 만족시키는 함수 f, g의

순서쌍 (f, g)의 개수는

$$9 \times 16 = 144$$

(3) 함수 f의 치역의 원소의 개수가 3인 경우

조건 (가)를 만족시키는 함수 f의 개수는

$${}_3C_3 \times {}_3H_{4-3} = 3$$

함수 f의 치역은 {1, 2, 3}이므로

조건 (나)에서 $g(1) = 1, g(2) = 2, g(3) = 3$ 이어야

하고, 조건을 만족시키는 함수 g의 개수는

$$4^1 = 4$$

따라서 이 경우 조건을 만족시키는 함수 f, g의

순서쌍 (f, g)의 개수는

$$3 \times 4 = 12$$

(1) ~ (3)에서 조건 (가), (나)를 만족시키는 모든

함수 f, g의 순서쌍 (f, g)의 개수는

$$192 + 144 + 12 = 348 \dots \textcircled{1}$$

한편, 두 조건을 만족시키며 함수 f의 치역이

Y이고 함수 g의 치역이 X가 되는 경우는

(3)에서 함수 g가 항등함수가 되는 경우뿐이다.

따라서 조건 (가), (나)를 만족시키면서 함수 f의

치역이 Y이고 함수 g의 치역이 X가 되는 경우의

수는

$$3 \times 1 = 3 \dots \textcircled{2}$$

①, ②에서 구하는 확률은 $\frac{3}{348} = \frac{1}{116}$ 이다.

$$\therefore p+q = 117$$

56. [출제 의도] 같은 것이 있는 순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

문자 a, a, b, b가 적힌 카드를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$$\frac{4!}{2!2!} = 6$$

c가 적힌 카드는 그림과 같이 앞에서 나열한 문자

a, a, b, b가 적힌 카드 4장 사이 또는 양 끝에 한

장씩 배열하면 되므로



c가 적힌 카드 3장을 조건에 맞게 나열하는 방법의 수는

$${}_5C_3 = 10$$

따라서 문제의 조건을 만족시키는 모든 경우의 수는

$$6 \times 10 = 60$$

57. [출제 의도] 중복순열을 이용하여 수학적 확률을 계산할 수 있는가?

집합 X의 15개의 부분집합 중에서 두 개의

부분집합 A, B를 선택하는 방법의 수는

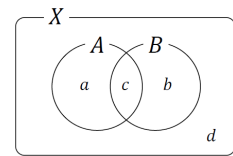
$${}_{15}P_2 = 210$$

이때, 그림과 같이 집합 X와 A, B를 나타낸

벤 다이어그램에서 각 집합으로 나누어진 네 개의

영역에 들어가는 집합 X의 원소의 개수를

a, b, c, d라 하자.



문제의 조건을 만족하는 상황은 $a \geq 1$ 이고 $d \geq 1$ 인

상황이고, $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A \neq B$ 이므로 다음과

같은 경우로 나누어 생각한다.

(1) $a = 1$ 이고, $d = 1$ 인 경우

a, d가 적힌 영역에 각각 들어갈 원소를 정하는

방법의 수는

$${}_4P_2 = 12$$

이 경우 $A \neq \emptyset$ 이고 b, c가 적힌 영역에 남은

두 수를 어디에 배열하더라도 $B \neq \emptyset$,

$A \neq B$ 이므로 남은 두 수를 b, c가 적힌 영역에

배열하는 방법의 수는

$$2^2 = 4$$

따라서 이 경우 조건을 만족시키는 경우의 수는

$$12 \times 4 = 48$$

(2) $a = 1, d = 2$ 인 경우

a, d가 적힌 영역에 세 개의 수를 각각 배열하는

방법의 수는

$${}_4C_1 \times {}_3C_2 = 12$$

남은 한 개의 수를 b, c가 적힌 영역에 배열하는

방법의 수는

$$2^1 = 2$$

따라서 이 경우 조건을 만족시키는 경우의 수는

$$12 \times 2 = 24$$

(3) $a = 2, d = 1$ 인 경우

(2)와 같은 방법으로 조건을 만족시키는 경우의

수는

$$12 \times 2 = 24$$

(4) $a = 2, d = 2$ 인 경우

$B = \emptyset$ 이므로 문제의 조건을 만족시키지 않는다.

(1) ~ (3)에서 문제의 조건을 만족시키도록 두 집합

A, B를 결정하는 방법의 수는

$$48 + 24 + 24 = 96$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{96}{210} = \frac{16}{35}$$

58. [출제 의도] 표본평균의 정의를 이해하고, 기댓값을 구할 수 있는가?

$$\frac{a+3}{2} = 6 \text{ 이므로 } a = 9 \text{ 이다.}$$

$$P(X=3) + P(X=a) = \frac{2}{3} \text{ 에서}$$

$$P(X=3) = k, P(X=9) = \frac{2}{3} - k \text{ 라 하면}$$

$$b = \frac{a+1}{2} = 5 \text{ 이므로}$$

$$P(\bar{X}=5) = 2 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3} - k\right) = \frac{1}{9} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

따라서

$$P(X=3) = \frac{1}{2}, P(X=9) = \frac{1}{6} \text{ 이다.}$$

$$\begin{aligned} \therefore E(3\bar{X}+1) &= 3E(\bar{X})+1 \\ &= 3E(X)+1 \\ &= 3 \times \left(1 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{2} + 9 \times \frac{1}{6}\right) + 1 \\ &= 11 \end{aligned}$$

59. [출제 의도] 중복조합을 이용하여 경우의 수를 계산할 수 있는가?

바구니 A 에 들어가는 사과와 배의 개수에 따라 각각 다음의 경우로 나누어 생각한다.

(1) 바구니 A 에 들어가는 사과와 배의 개수가 1 또는 2인 경우, 두 바구니에 조건에 맞게 배를 나누어주는 방법의 수는

$${}_2H_{3-1} - 1 = 2$$

두 바구니에 조건에 맞게 꺾을 나누어주는 방법의 수는

$${}_2H_{6-1} - 1 - 1 = 4$$

따라서 이 경우 과일을 나누어 넣는 방법의 수는

$$2 \times 2 \times 4 = 16$$

(2) 바구니 A 에 들어가는 사과와 배의 개수가 3인 경우, 두 바구니에 조건에 맞게 배를 나누어주는 방법의 수는

$${}_2H_{3-1} - 1 = 2$$

두 바구니에 조건에 맞게 꺾을 나누어주는 방법의 수는

$${}_2H_{6-1} - 1 = 5$$

따라서 이 경우 과일을 나누어 넣는 방법의 수는

$$2 \times 5 = 10$$

(3) 바구니 A 에 들어가는 사과와 배의 개수가 4 또는 5인 경우, 두 바구니에 조건에 맞게 배를 나누어주는 방법의 수는

$${}_2H_{3-1} = 3$$

두 바구니에 조건에 맞게 꺾을 나누어주는 방법의 수는

$${}_2H_{6-1} - 1 - 1 = 4$$

따라서 이 경우 과일을 나누어 넣는 방법의 수는

$$2 \times 3 \times 4 = 24$$

(1)~(3)에서 문제의 조건에 맞게 과일을 나누어 넣는 모든 방법의 수는

$$16 + 10 + 24 = 50$$

(다른 풀이 - 정호재)

바구니 A 에 들어가는 사과, 배, 꺾의 개수를 각각 a, b, c 라 하자. 그러면 B 에 들어가는 사과, 배,

꺾의 개수는 각각 $6-a, 3-b, 6-c$ 가 된다.

조건 (가)는 $a \geq 1, b \geq 1$ 이고, $a \neq b$ 임을 의미하고, 조건 (나)는 $6-a \geq 1, 6-c \geq 1$ 이고, $a \neq c$ 임을 의미한다.

또한 조건 (다)는 $c \neq 3$ 임을 의미한다.

따라서 $1 \leq a \leq 5, 0 \leq c \leq 5$ 이고

$a \neq b, a \neq c, c \neq 3$ 이다.

b 의 값에 따라 나누어 생각하면

$b = 1$ 일 때, 구하는 경우의 수는

$1 \leq a \leq 5, 0 \leq c \leq 5, a \neq 1, c \neq 3$ 인 경우에서 $a = c$ 인 경우를 제외한 $20 - 3 = 17$

$b = 2$ 일 때, 구하는 경우의 수는

$1 \leq a \leq 5, 0 \leq c \leq 5, a \neq 2, c \neq 3$ 인 경우에서 $a = c$ 인 경우를 제외한 $20 - 3 = 17$

$b = 3$ 일 때, 구하는 경우의 수는

$1 \leq a \leq 5, 0 \leq c \leq 5, a \neq 3, c \neq 3$ 인 경우에서 $a = c$ 인 경우를 제외한 $20 - 4 = 16$

따라서 구하는 경우의 수는 $17 + 17 + 16 = 50$

미 적 분

정 답

1	①	2	⑤	3	①	4	⑤	5	②
6	②	7	⑤	8	③	9	20	10	47
11	37	12	⑤	13	③	14	①	15	④
16	③	17	②	18	②	19	9	20	25
21	10	22	②	23	③	24	④	25	②
26	②	27	①	28	③	29	16	30	25
31	29	32	⑤	33	③	34	④	35	④
36	②	37	③	38	9	39	4	40	7
41	③	42	⑤	43	④	44	①	45	②
46	③	47	②	48	25	49	128	50	13

해 설

1. [출제 의도] e 의 정의를 이용하여 극한을 계산할 수 있는가?

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \{(1-2x)(1+\sin x)\}^{\cot x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (1-2x)^{\frac{1}{\tan x}} (1+\sin x)^{\frac{1}{\tan x}} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (1-2x)^{-\frac{1}{2x} \cdot \frac{-2x}{\tan x}} (1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\tan x}} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left\{ (1-2x)^{-\frac{1}{2x}} \right\}^{-\frac{2x}{\tan x}} \left\{ (1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \right\}^{\frac{\sin x}{\tan x}} \right] \\ &= e^{-2} \times e^1 = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

2. [출제 의도] 합성함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$ 이므로

$$1-a = 4+2b \Rightarrow a+2b = -3 \quad (\#)$$

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{e^{x-2} - a - (1-a)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + bx - (4+2b)}{x-2}$$

$$\Rightarrow 1 = 4+b, b = -3$$

(#)에서 $a=3$

$$\begin{aligned} \therefore g'(2) &= f'(f(2)) \times f'(2) \\ &= f'(-2) \times f'(2) \\ &= -7 \times 1 = -7 \end{aligned}$$

3. [출제 의도] 급수의 성질을 이해하고 있는가?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3 \text{ 이고,}$$

급수의 성질에 의하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 이므로

주어진 등식에 $n \rightarrow \infty$ 인 극한을 취하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 2S_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{kn}{n+1} \Rightarrow k=6$$

주어진 등식에 $n=1$ 을 대입하면

$$a_1 + 2S_1 = 3 \Rightarrow 3a_1 = 3 \quad \therefore a_1 = 1$$

4. [출제 의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 삼각함수를 포함한 식의 값을 계산할 수 있는가?

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \alpha + \sin \beta = \frac{1}{2} \quad \dots \text{①}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{4} \quad \dots \text{②}$$

①의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{4}$$

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \frac{3}{4} \quad (\because \text{②}) \quad \dots \text{③}$$

②의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \alpha \sin^2 \beta = \frac{1}{16}$$

$$(1 - \cos^2 \alpha)(1 - \cos^2 \beta) = \frac{1}{16}$$

$$1 - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta = \frac{1}{16}$$

$$1 - (2 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta) + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta = \frac{1}{16}$$

$$\cos^2 \alpha \cos^2 \beta = \frac{5}{16}$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi < \beta < 2\pi \text{ 이므로}$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ &= \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \end{aligned}$$

(다른 풀이)

근의 공식과 주어진 조건으로부터

$$\sin \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}, \sin \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \text{ 이다.}$$

$$\sin \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \text{ 이고 주어진 조건으로부터}$$

$\cos \alpha > 0$ 이므로

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}$$

$$\sin \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \text{ 이고 주어진 조건으로부터}$$

$\cos \beta > 0$ 이므로

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$$

따라서

$$\cos \alpha \cos \beta = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}} \cdot \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ &= \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \end{aligned}$$

5. [출제 의도] 도형의 성질을 이용하여 등비급수의 합을 구할 수 있는가?

그림 R_1 에서 $\tan \angle A_1 B_1 M_1 = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\tan \angle C B_1 M_1 = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \angle A_1 B_1 M_1 \right) = 2$$

$$\angle C B_1 N_1 = \theta \text{ 라 하면 } \tan 2\theta = 2$$

삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = 2$$

$$2 \tan \theta = 2 - 2 \tan^2 \theta$$

$$\tan^2 \theta + \tan \theta - 1 = 0$$

$$\tan \theta > 0 \text{ 이므로 } \tan \theta = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$\therefore \overline{CN_1} = \sqrt{5} - 1$$

$$\begin{aligned} \therefore S_1 &= \square ABCD - \triangle A_1 B_1 M_1 - \triangle B_1 C N_1 \\ &= 4 - 1 - (\sqrt{5} - 1) = 4 - \sqrt{5} \end{aligned}$$

그림 R_2 에서 $\overline{A_2 B_2} = x$ 라 하면

$$\overline{A_2 B_2} : \overline{B_1 B_2} = \overline{N_1 C} : \overline{B_1 C}$$

$$x : 2 - x = \sqrt{5} - 1 : 2$$

$$2x = (\sqrt{5} - 1)(2 - x)$$

$$(\sqrt{5} + 1)x = 2(\sqrt{5} - 1)$$

$$\therefore x = \frac{2(\sqrt{5} - 1)}{\sqrt{5} + 1} = \frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{2} = 3 - \sqrt{5}$$

따라서 그림 R_2 에서 새로 색칠된 도형의 넓이는 넓이는 R_1 에서 색칠된 부분의 넓이의

$$r = \left(\frac{\overline{A_2 B_2}}{\overline{A_1 B_1}} \right)^2 = \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}$$

베이고, 이는 모든 자연수 n 에 대하여 R_{n+1} 과

R_n 에 대해서도 동일하므로 등비급수 공식에 의하여

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \frac{S_1}{1 - r} \\ &= \frac{4 - \sqrt{5}}{1 - \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}} = \frac{2(4 - \sqrt{5})}{3\sqrt{5} - 5} \\ &= \frac{2(4 - \sqrt{5})(3\sqrt{5} + 5)}{(3\sqrt{5})^2 - 5^2} = \frac{5 + 7\sqrt{5}}{10} \end{aligned}$$

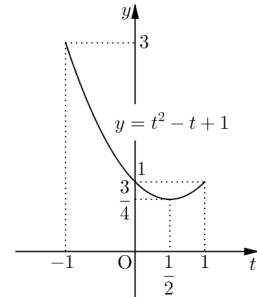
6. [출제 의도] 함수의 극대와 극소를 이해하고 계산할 수 있는가?

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x + 2k + 3 \\ &= 2\sin^2 x - 2\sin x + 2k + 2 \\ &= 2(\sin^2 x - \sin x + k + 1) \end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 가 열린 구간 $(0, 2\pi)$ 에서 단 하나의 극값을 가지려면 함수 $f'(x)$ 의 부호가 열린 구간 $(0, 2\pi)$ 에서 한 번만 바뀌어야 한다.

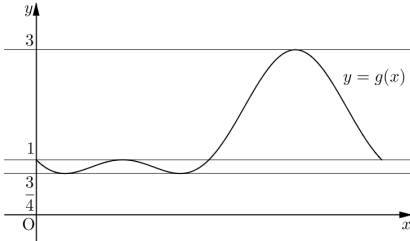
즉, 곡선 $y = \sin^2 x - \sin x + 1$ 과 직선 $y = -k$ 가 접하지 않으면서 만나는 점의 개수가 1이어야 한다.

$y = t^2 - t + 1$ ($-1 \leq t \leq 1$)의 그래프는 아래와 같다.



따라서 함수 $g(x)$ 를 $g(x) = \sin^2 x - \sin x + 1$ 라 하고, $\sin x = t$ 라 하면 $g(x)$ 의 증감표와 그래프는 각각 다음과 같다.

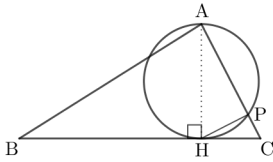
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
t	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	-1	0
$g(x)$	1	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	3	1



따라서 $f'(x)$ 의 부호가 열린구간 $(0, 2\pi)$ 에서 한 번만 바뀌기 위해서는 $k = -1$ 이어야 한다.

7. [출제 의도] 코사인법칙과 합성함수의 미분법을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

ㄱ) 그림과 같이 원의 성질에 의하여 $\overline{AC} \perp \overline{PH}$ 이므로

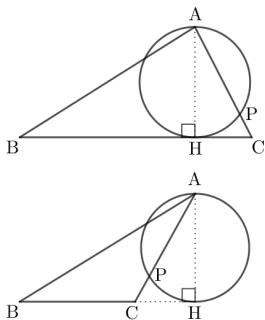


$\triangle AHC \sim \triangle APH$
 $\Rightarrow \overline{AC} : \overline{AH} = \overline{AH} : \overline{AP}$
 $\therefore \overline{AH}^2 = \overline{AC} \times \overline{AP} = 3f(t)$ (참)

ㄴ) $f(t) = 2$ 이면 ㄱ에 의하여 $\overline{AH} = \sqrt{6}$ 이고,

직각삼각형 AHB에서
 $\overline{BH} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{19}$
 직각삼각형 AHC에서
 $\overline{CH} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{3}$

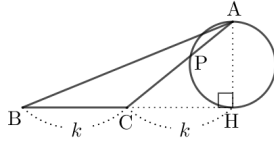
따라서 다음 그림과 같은 두 가지 경우에 대하여 $\overline{BC} = t$ 의 값은 $\sqrt{19} + \sqrt{3}$ 또는 $\sqrt{19} - \sqrt{3}$ 이다.



따라서 $f(t) = 2$ 인 모든 실수 t 의 값의 곱은 $(\sqrt{19} + \sqrt{3})(\sqrt{19} - \sqrt{3}) = 16$ (참)

ㄷ) $\angle ABC = \theta(t)$ 라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여 $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cos\theta(t) = \overline{AC}^2$
 $\Rightarrow 25 + t^2 - 10t \cos\theta(t) = 9$
 $\Rightarrow t^2 - 10t \cos\theta(t) + 16 = 0 \dots \textcircled{1}$

직각삼각형 AHB에서
 $\overline{AH} = \overline{AB} \sin\theta(t) = 5\sin\theta(t)$
 $\Rightarrow \overline{AH}^2 = 3f(t) = 25\sin^2\theta(t)$
 $\Rightarrow f(t) = \frac{25}{3}\sin^2\theta(t) \dots \textcircled{2}$



한편 $\overline{CH} = \overline{BC} = k$ 일 때, 위 그림과 같이 $\overline{BC} < \overline{BH}$ 이고, 직각삼각형 AHB에서

$\cos\theta(k) = \frac{2}{5}k$
 ①에서 $\cos\theta(k) = \frac{k^2 + 16}{10k}$ 이므로
 $\frac{k^2 + 16}{10k} = \frac{2k}{5} \Rightarrow k^2 = \frac{16}{3} \therefore k = \frac{4}{\sqrt{3}}$

$\overline{AH} = \sqrt{\overline{AC}^2 - k^2} = \sqrt{\frac{11}{3}}$ 이므로
 $\therefore \cos\theta(k) = \frac{8}{5\sqrt{3}}, \sin\theta(k) = \frac{\sqrt{11}}{5\sqrt{3}} \dots \textcircled{3}$

①의 양변을 t 에 대하여 미분하면
 $2t - 10\cos\theta(t) + 10t \sin\theta(t) \cdot \theta'(t) = 0$

위 등식의 양변에 $t = k = \frac{4}{\sqrt{3}}$ 를 대입하면

③에 의하여
 $\frac{8}{\sqrt{3}} - \frac{16}{\sqrt{3}} + 10 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{11}}{5\sqrt{3}} \cdot \theta'(k) = 0$
 $\frac{8\sqrt{11}}{3} \theta'(k) = \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot \theta'(k) = \sqrt{\frac{3}{11}} \dots \textcircled{4}$

②에서
 $f'(t) = \frac{50}{3} \sin\theta(t) \cos\theta(t) \cdot \theta'(t)$
 ③, ④에서
 $\therefore f'(k) = \frac{50}{3} \cdot \frac{\sqrt{11}}{5\sqrt{3}} \cdot \frac{8}{5\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{3}{11}} = \frac{16\sqrt{3}}{9}$ (참)

(다른 풀이) 직각삼각형 ABH와 ACH에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AH}^2 = \overline{AB}^2 - (\overline{BC} + \overline{CH})^2$
 $= \overline{AC}^2 - \overline{CH}^2$
 $\Rightarrow 25 - (t + \overline{CH})^2 = 9 - \overline{CH}^2$
 $\Rightarrow \overline{CH} = \frac{8}{t} - \frac{1}{2}t$
 $\overline{CH} = \overline{BC} = k$ 에서
 $k = \frac{8}{k} - \frac{1}{2}k \Rightarrow k = \frac{4}{\sqrt{3}}$

$f(t) = \frac{1}{3}\overline{AH}^2 = \frac{1}{3}\left\{9 - \left(\frac{8}{t} - \frac{1}{2}t\right)^2\right\}$
 $= \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}t^2 - \frac{64}{t^2} + 17\right)$
 $\Rightarrow f'(t) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}t + \frac{128}{t^3}\right)$
 $\therefore f'(k) = f'\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) = \frac{16\sqrt{3}}{9}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

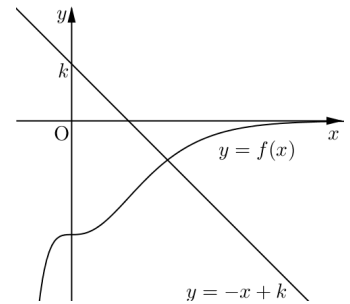
8. [출제 의도] 도함수를 이용하여 함수의 그래프를 그리고 문제를 해결할 수 있는가?

(가) 조건에 의하여 실수 전체의 집합에서 $f'(x) \geq 0$ 이거나 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

(1) $f'(x) \geq 0$ 인 경우
 $f'(x) = \{-ax^2 + (2a-b)x + b-c\}e^{-x}$ 에서 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이라면 $a < 0$ 이어야 한다.

또한, $a < 0$ 이면 충분히 큰 실수 x 에 대하여 $f(x) < 0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) < 0$ 이어야 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이다.

이때 그림과 같이 두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = -x + k$ 는 반드시 제4사분면에서 접점이 아닌 교점을 가지므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.



(2) $f'(x) \leq 0$ 인 경우
 (1)과 같은 방법으로 $a > 0$ 이고 조건 (나)에서 함수 $|f(x) - f(0)|$ 의 그래프는 원점을 지나므로 $f'(0) = 0$ 이어야 한다.

즉, 실수 전체의 집합에서 $f'(x) \leq 0$ 이고, $f'(0) = 0$ 이므로

$f'(x) = \{-ax^2 + (2a-b)x + b-c\}e^{-x}$
 $= -ax^2 e^{-x}$
 $\Rightarrow 2a - b = 0, b - c = 0$
 $\therefore f(x) = a(x^2 + 2x + 2)e^{-x}$

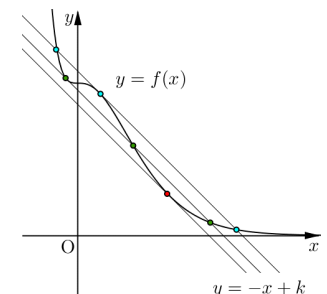
이때 조건 (다)를 만족하려면 함수 $f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = -x + k$ 가 $x < 0$ 에서 접점이 아닌 교점을 하나 가지고, $x > 0$ 에서 교점을 가지면 그 점은 반드시 접점이어야 한다. \dots (#)

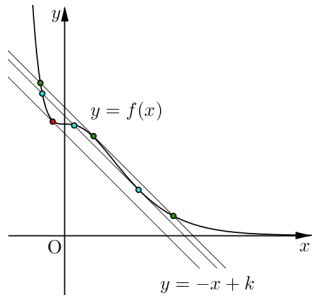
방정식 $f'(x) = -1$ 의 실근은

방정식 $x^2 e^{-x} = \frac{1}{a} \dots$ (a)의 실근과 같다.

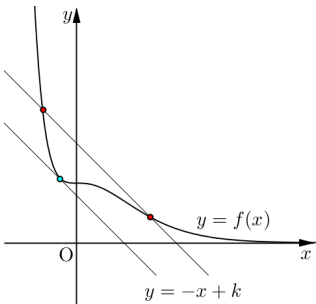
$a > 0$ 이므로 방정식 (a)는 2개 이하의 양의 실근을 갖는다.

방정식 (a)가 2개의 양의 실근을 갖는 경우, 그림과 같이 어느 경우에도 (#)를 만족하지 않는다.

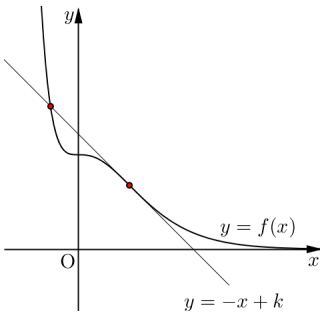




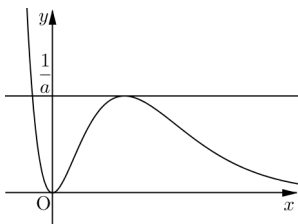
같은 방법으로 방정식 (a)가 양의 실근을 갖지 않는 경우에도 그림과 같이 어느 경우에도 (#)을 만족하지 않는다.



방정식 (a)가 단 하나의 양의 실근을 갖는 경우, 아래와 같은 경우에만 조건 (다)를 만족시킨다.



방정식 $x^2 e^{-x} = \frac{1}{a}$ 가 단 하나의 양의 실근을 갖는 경우는 $\frac{1}{a}$ 가 함수 $y = x^2 e^{-x}$ 의 극댓값인 경우이다.



함수 $y = x^2 e^{-x}$ 의 극댓값은 $\frac{4}{e^2}$ 이므로

$$\therefore a = \frac{e^2}{4}$$

$$\therefore f(x) = \frac{e^2}{4}(x^2 + 2x + 2)e^{-x}, \quad f(2) = \frac{5}{2}$$

(참고) 조건 (다)를 만족하는 경우는 직선 $y = -x + k$ 가 곡선 $y = f(x)$ 의 변곡점에서의 접선일 때이다.

곡선 $y = f(x)$ 는 $x = 2$ 에서 변곡점을 가지므로 $f'(2) = -1$ 이다. 이를 이용해서 a 의 값을 구할 수도 있다.

9. [출제 의도] 로그함수의 극한을 계산할 수 있는가?

접 P의 좌표를 $P(u, 2\ln u)$ 라 하면
접 P는 원 C 위의 점이므로

$$\begin{aligned} (u-1-t)^2 + (2\ln u)^2 &= t^2 \\ t^2 - 2t(u-1) + (u-1)^2 + (2\ln u)^2 &= t^2 \\ (u-1)^2 + 4(\ln u)^2 &= 2t(u-1) \\ \therefore t &= \frac{(u-1)^2 + 4(\ln u)^2}{2(u-1)} \end{aligned}$$

$t \rightarrow 0+$ 일 때 $u \rightarrow 1+$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{AP}{AB} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{AP}{2t} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1+} \frac{\sqrt{(u-1)^2 + (2\ln u)^2}}{(u-1)^2 + 4(\ln u)^2} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1+} \frac{\sqrt{(u-1)^2 + 4(\ln u)^2}}{(u-1)^2 + 4(\ln u)^2} \\ &= \frac{\sqrt{1+4}}{1+4} \quad \left(\because \lim_{u \rightarrow 1} \frac{\ln u}{u-1} = 1 \right) \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

$$\therefore 100a^2 = 100 \times \frac{1}{5} = 20$$

10. [출제 의도] 매개변수의 미분법을 이용하여 함수의 미분계수의 값을 계산할 수 있는가?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos t + a \sin t}{3\sin^2 t \cos t} \quad (t \neq 0)$$

$\frac{dy}{dx}$ 의 값의 부호가 $t = 0$ 좌우에서 바뀌지 않으므로(양의 값을 가지므로) 주어진 함수는 $t = 0$ 에서 극값을 가지지 않는다.

$$t \neq 0 \text{ 이면 } -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \text{ 에서 } 3\sin^2 t \cos t > 0$$

이므로 $y' = \cos t + a \sin t$ 의 부호가 바뀔 때, 주어진 함수가 극값을 가진다.

$$y' = \cos t(a \tan t + 1)$$

$$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \text{ 에서 } \cos t > 0 \text{ 이므로}$$

$a \tan t + 1$ 의 값이 음에서 양으로 바뀔 때 주어진 함수가 극솟값을 갖는다.

$$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \text{ 에서 } \tan t \text{는 증가함수이므로}$$

$$a > 0 \text{ 이다. } \dots \text{ (#)}$$

$$\text{즉, 문제의 조건에서 } \tan \alpha = -\frac{1}{a} \text{ 이고,}$$

$$\begin{aligned} a \sin \alpha &= -\cos \alpha \text{ 에서} \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= (a^2 + 1)\sin^2 \alpha = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{a^2 + 1}$$

$$\text{(#)에서 } \tan \alpha = -\frac{1}{a} < 0 \text{ 이므로}$$

$$\alpha < 0 \text{ 이고, } \sin \alpha < 0 \text{ 이므로}$$

$$\therefore \sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

$$\cos \alpha > 0 \text{ 이고, } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ 이므로}$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

따라서 주어진 함수의 극솟값은

$$\begin{aligned} \sin \alpha - a \cos \alpha &= -\frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} - \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + 1}} \\ &= -(a^2 + 1) \times \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \\ &= -\sqrt{a^2 + 1} = -\frac{\sqrt{10}}{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{1}{9}, \quad a = \frac{1}{3} \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \sin \alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}$$

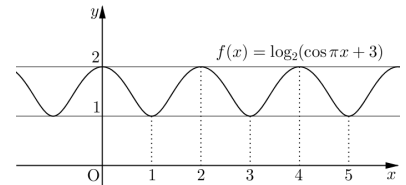
따라서 $x = -\alpha$ 일 때 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} \Big|_{x=-\alpha} &= \frac{\cos(-\alpha) + a \sin(-\alpha)}{3\sin^2(-\alpha) \cos(-\alpha)} \\ &= \frac{\cos \alpha - a \sin \alpha}{3\sin^2 \alpha \cos \alpha} = \frac{2\cos \alpha}{3\sin^2 \alpha \cos \alpha} \\ &= \frac{2}{3\sin^2 \alpha} = \frac{20}{27} \end{aligned}$$

$$\therefore p + q = 20 + 27 = 47$$

11. [출제 의도] 여러 가지 함수의 도함수를 활용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있는가?

$f(x)$ 는 주기가 2이고, 최댓값과 최솟값이 각각 1, 2이므로 함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형은 아래와 같다.



$g(2) = 1$ 이고, $f(0) = f(2) = 2$ 이므로 조건 (다)를 만족하려면

$f(x) = k$ ($1 \leq k \leq 2$), $g(k) = 1$ 인 실수 x 가 열린 구간 $(0, 2)$ 에 오직 하나만 존재해야 한다.

따라서 함수 $f(x)$ 의 그래프로부터 $x = 1$ 이고, $k = 1$ 이어야 한다.

즉, $g(1) = g(2) = 1$ 이므로 인수정리에 의하여

$$g(x) = (x-1)(x-2)(x-\alpha) + 1$$

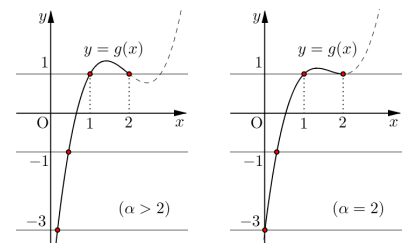
의 형태로 나타낼 수 있다.

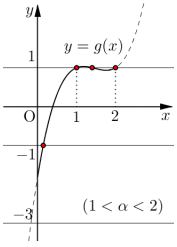
조건 (나)를 만족하려면 닫힌 구간 $[0, 2]$ 에서 방정식 $g(x) = 2k - 1$ (k 는 정수)의 $x = 1$, $x = 2$ 가 아닌 실근이 단 하나만 존재해야 한다. ... (#)

이때 α 의 값을 기준으로 함수 $g(x)$ 의 형태를 다음과 같이 구별할 수 있다.

(1) $\alpha > 1$ 인 경우

다음 그림과 같이 방정식 $g(x) = 2k - 1$ 은 4개 이상의 실근을 가지므로 어느 경우에도 (#)를 만족하지 않는다.





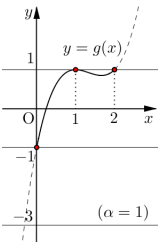
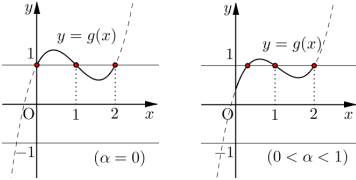
(2) $0 \leq \alpha \leq 1$ 인 경우

$0 \leq \alpha \leq 1$ 이면 $0 < x < 1$ 일 때
 $0 < (x-1)(x-2) < 2$ 이고 $-1 < x-\alpha < 1$ 이므로
 $-2 < (x-1)(x-2)(x-\alpha) < 2$ 이다.
따라서 $0 < x < 1$ 이면 $-1 < g(x) < 3$ 이다.

비슷한 방법으로 $1 < x < 2$ 이면 $0 < g(x) < 1$ 이다.

즉, $0 \leq \alpha \leq 1$ 인 경우 함수 $g(x)$ 의 극댓값은 3보다 작고, 극솟값은 0보다 크므로 곡선 $y=g(x)$ 는 그림과 같이 구간 $[0, 1]$ 에서 직선 $y=1$ 또는 $y=-1$ 과 단 한 점에서만 만난다.

따라서 이 경우 항상 (#)를 만족시킨다.



(3) $-1 < \alpha < 0$ 인 경우

α 의 값이 감소함에 따라 $g(0)=-2\alpha+1$ 의 값은 증가한다. 또한

$-1 < \alpha < 0$ 이면 $1 < x < 2$ 일 때

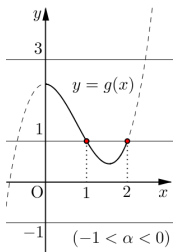
$-\frac{1}{4} < (x-1)(x-2) < 0$ 이고 $1 < x-\alpha < 3$ 이므로

$-\frac{3}{4} < (x-1)(x-2)(x-\alpha) < 0$

이다. 따라서 $1 < x < 2$ 이면 $\frac{1}{4} < g(x) < 1$ 이다.

즉, 함수 $g(x)$ 의 극솟값은 0보다 크므로 그림과 같이 방정식 $g(x)=2k-1$ 은 서로 다른 두 실근만 갖는다.

따라서 이 경우 (#)를 만족시키지 않는다.



(4) $-2 < \alpha \leq -1$ 인 경우

α 의 값이 감소함에 따라 $g(0)=-2\alpha+1$ 의 값은 증가한다. 또한

$-2 < \alpha \leq -1$ 이면 $1 < x < 2$ 일 때

$-\frac{1}{4} < (x-1)(x-2) < 0$ 이고 $2 < x-\alpha < 4$ 이므로

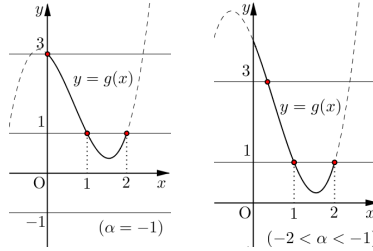
$-1 < (x-1)(x-2)(x-\alpha) < 0$

이다. 따라서 $1 < x < 2$ 이면 $0 < g(x) < 1$ 이다.

따라서 곡선 $y=g(x)$ 는 그림과 같이 구간

$[0, 1]$ 에서 직선 $y=3$ 과 단 한 점에서 만나고,

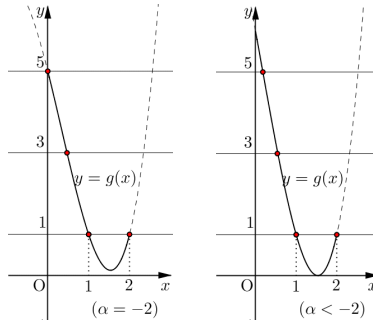
이 경우 항상 (#)를 만족시킨다.



(5) $\alpha \leq -2$ 인 경우

$g(0) \geq 5$ 이므로 다음 그림과 같이 방정식

$g(x)=2k-1$ 은 4개 이상의 실근을 가지므로 어느 경우에도 (#)를 만족하지 않는다.



(1)~(5)에서 문제의 조건을 만족시키는 α 의 값의 범위는 $0 \leq \alpha \leq 1$ 또는 $-2 < \alpha \leq -1$ 이다.

이때 $g(3) = 7 - 2\alpha$ 이므로

$5 \leq g(3) \leq 7$ 또는 $9 \leq g(3) < 11$

따라서 문제의 조건을 만족시키는 정수 n 의 값은

5, 6, 7, 9, 10 이므로 그 합은 37 이다.

12. [출제 의도] 음함수의 미분법을 이해하고 있는가?

$\frac{dy}{dx} = y'$ 이라 하자.

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2x + 2yy' = (3 - 4y')e^{3x-4y}$$

$(x, y) = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ 를 대입하면

$$\frac{8}{5} + \frac{6y'}{5} = (3 - 4y')$$

$$\Rightarrow 26y' = 7 \quad \therefore y' = \frac{7}{26}$$

따라서 구하는 접선의 기울기는 $\frac{7}{26}$ 이다.

13. [출제 의도] 수열의 극한과 급수의 성질을 이해하고 있는가?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1 \text{ 이므로}$$

수열의 극한의 대소관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{2^k} - 3 \right) = 1$$

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{2^n} - 3 \right) = 0$ 이다.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2^n} = 3$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - 2^n}{a_n + 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n}{2^n} - 1}{\frac{a_n}{2^n} + 1} = \frac{3-1}{3+1} = \frac{1}{2}$$

14. [출제 의도] 합성함수의 미분법을 이용하여 극한을 계산할 수 있는가?

주어진 극한이 수렴하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로

(분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다. 따라서

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \{f(\sin x) - 1\} = f\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 0$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

한편 주어진 식에서

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{f(\sin x) - 1}{x - \frac{\pi}{6}} = 6\sqrt{3} \text{ 이고, } f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \text{ 이므로}$$

$g(x) = f(\sin x)$ 라 하면 미분계수의 정의에서

$$g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 6\sqrt{3} \text{ 이다.}$$

합성함수의 미분법에서

$$g'(x) = f'(\sin x) \cos x$$

$$\Rightarrow g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} f'\left(\frac{1}{2}\right) = 6\sqrt{3}$$

$$\therefore f'\left(\frac{1}{2}\right) = 12$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + 12 = 13$$

15. [출제 의도] 이계도함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

$f(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$ 이라 하면

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (\ln x + 1)}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$$

$$f''(x) = -\frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \ln x}{x^4} = \frac{2 \ln x - 1}{x^3}$$

이를 이용하여 $f'(x)$ 의 증감표를 그리면 아래 표와 같다.

x		\sqrt{e}	
$f'(x)$	\searrow	$-\frac{1}{2e}$	\nearrow
$f''(x)$	(-)	0	(+)

따라서 $f'(x)$ 는 $x = \sqrt{e}$ 에서 최솟값을 갖는다.

즉, 함수 $y = f(x)$ 위의 점 $(\sqrt{e}, f(\sqrt{e}))$ 에서 그은 접선의 기울기가 가장 작다.

$$f(\sqrt{e}) = \frac{3}{2\sqrt{e}}, f'(\sqrt{e}) = -\frac{1}{2e} \text{ 이므로}$$

함수 $y=f(x)$ 위의 점 $(\sqrt{e}, f(\sqrt{e}))$ 에서 그은 접선 l 의 방정식은

$$y = -\frac{1}{2e}(x - \sqrt{e}) + \frac{3}{2\sqrt{e}} = -\frac{1}{2e}x + \frac{2}{\sqrt{e}}$$

따라서 직선 l 의 x 절편은 $4\sqrt{e}$ 이고 y 절편은

$$\frac{2}{\sqrt{e}} \text{ 이므로 직선 } l \text{과 } x \text{축 및 } y \text{축으로 둘러싸인}$$

부분의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4\sqrt{e} \times \frac{2}{\sqrt{e}} = 4$$

16. [출제 의도] 여러 가지 함수의 미분법을 활용하여 미분계수의 값을 계산할 수 있는가?

(가)에서 모든 실수 x 에 대하여

$e^x(2 + \sin x) > 0$ 이고, 두 함수 $f(x), g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 (\Rightarrow 연속이므로)

$f(x) > 0$ 이고 $g(x) > 0$ 이어야 한다.

즉, 두 함수 $f(x)$ 와 $\sqrt{g(x)}$ 는 실수 전체에서 미분가능하다.

(가)의 양변을 미분하면

$$f'(x)\sqrt{g(x)} + f(x) \cdot \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}} = e^x(\sin x + \cos x + 2)$$

위 등식의 양변에 $2\sqrt{g(x)}$ 를 곱하면

$$2f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 2\sqrt{g(x)} \cdot e^x(\sin x + \cos x + 2)$$

위 등식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$2f'(0)g(0) + f(0)g'(0) = 6\sqrt{g(0)}$$

(나)에서 $6\sqrt{g(0)} = 1$

$$\therefore g(0) = \frac{1}{36}$$

조건 (가)의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$\frac{1}{6}f(0) = 2, f(0) = 12$$

$$\therefore f(0)g(0) = 12 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{3}$$

17. [출제 의도] 도형의 성질을 이용하여 등비급수의 합을 구할 수 있는가?

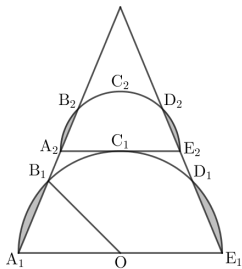


그림 R_1 에서 선분 A_1E_1 의 중점을 O 라 하면

$$\angle A_1OB_1 = \frac{\pi}{4} \text{ 이므로}$$

부채꼴 A_1OB_1 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$$

삼각형 A_1OB_1 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore S_1 = 2 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

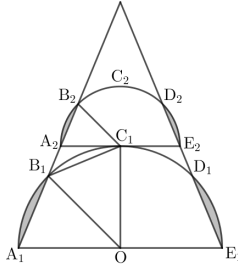


그림 R_2 에서 세 점 B_1, C_1, D_1 은 호 A_1E_1 을

사등분하는 점이므로

$\triangle A_1OB_1 \cong \triangle B_1OC_1$ (SAS 합동)이고

$\triangle A_1OB_1, \triangle B_1OC_1$ 은 모두 이등변삼각형이므로

$$\angle A_1B_1O = \angle C_1B_1O \Rightarrow \angle B_2B_1C_1 = \frac{\pi}{4} \dots (1)$$

세 점 B_2, C_2, D_2 은 반원 A_2E_2 를 사등분하는

점이므로

$$\angle B_1B_2C_1 = \angle A_1B_1O \dots (2)$$

(1), (2)에서

$$\triangle A_1OB_1 \sim \triangle B_2B_1C_1 \text{ (AA 닮음)} \dots (3)$$

삼각형 A_1OB_1 에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{A_1B_1}^2 &= \overline{OA_1}^2 + \overline{OB_1}^2 - 2\overline{OA_1} \cdot \overline{OB_1} \cos \angle A_1OB_1 \\ &= 1 + 1 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \overline{A_1B_1} = \overline{B_1C_1} = 2 - \sqrt{2}$$

$$(3) \text{에서 } \overline{A_1O} : \overline{A_1B_1} = \overline{B_1C_1} : \overline{B_2C_1}$$

$$\Rightarrow \overline{B_2C_1} = \overline{A_1B_1} \cdot \overline{B_1C_1} = 2 - \sqrt{2}$$

따라서 그림 R_2 에서 새로 색칠된 도형의 넓이는

넓이는 R_1 에서 색칠된 부분의 넓이의

$$r = \left(\frac{\overline{B_2C_1}}{\overline{B_1O}} \right)^2 = (2 - \sqrt{2})^2 = 6 - 4\sqrt{2}$$

베이고, 이는 모든 자연수 n 에 대하여 R_{n+1} 과

R_n 에 대해서도 동일하므로 등비급수 공식에 의하여

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \frac{S_1}{1-r} \\ &= \frac{\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - (6 - 4\sqrt{2})} = \frac{\pi - 2\sqrt{2}}{4(4\sqrt{2} - 5)} \\ &= \frac{(\pi - 2\sqrt{2})(5 + 4\sqrt{2})}{28} \end{aligned}$$

18. [출제 의도] 도함수를 활용하여 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

(ㄱ) $g(-1) = -2$ 이고, 문제의 조건에서 $h(-1) = 2$ 이므로 $f(-1) = 0$ 이다. 따라서 $a = b$ 이다.

또한, $x > 1$ 일 때 $h'(x) = f'(x)$ 이고,

$$f'(x) = \frac{-a(xe^x - c)}{(e^x + c)^2} \text{ 이고 } c > 0 \text{ 이므로}$$

함수 $h(x)$ 가 $x = t (t > 1)$ 에서 극댓값을 가지려면

$$f'(t) = 0 \Rightarrow te^t = c \text{ 이어야 한다. } \dots (1)$$

따라서 $t = 2$ 이면 $c = 2e^2$ 이다. (참)

(ㄴ) 함수 $h(x)$ 는 연속이고

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} h'(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \{f'(x) - g'(x)\} = f'(-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} h'(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \{f'(x) - g'(x)\} = f'(-1) - 2$$

이므로 함수 $h(x)$ 가 $x = -1$ 에서 극댓값을 가지려면 $f'(-1) \geq 0, f'(-1) - 2 \leq 0$ 이어야 한다.

$$\Rightarrow 0 \leq f'(-1) \leq 2$$

$$f'(-1) = \frac{ae^{-1} + ac}{(e^{-1} + c)^2} = \frac{a}{e^{-1} + c}$$

이고, $a \neq 0, c > 0$ 이므로

$$0 < a \leq 2(e^{-1} + c) \dots (2)$$

한편

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{a(x+1)e^x(e^x+c) - 2ae^x(xe^x-c)}{(e^x+c)^3} \\ &= -\frac{ae^x\{(1-x)e^x + c(x+3)\}}{(e^x+c)^3} \end{aligned}$$

에서 $-1 < x < 1$ 일 때 $(1-x)e^x > 0$ 이고

$c(x+3) > 0$ 이므로 $-1 < x < 1$ 일 때

$f''(x) < 0$ 이다.

①에서 $f'(-1) \leq 2$ 이므로 $-1 < x < 1$ 일 때

$f'(x) < 2$ 이고

$$g'(x) = \begin{cases} 0 & (x < -1 \text{ 또는 } x > 1) \\ 2 & (-1 < x < 1) \end{cases}$$

에서 $-1 < x < 1$ 일 때

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = f'(x) - 2 < 0 \text{ 이다. } \dots (3)$$

또한

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \{f'(x) - g'(x)\} = f'(1) \dots (4)$$

$$f'(1) = \frac{a(c-e)}{(e+c)^2} \text{ 에서}$$

$$c - e = te^t - e > 0 \quad (\because t > 1)$$

이므로 $f'(1) > 0$ 이다.

③, ④에서 함수 $h(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극솟값을 갖는다.

한편 $x < -1$ 일 때

$$h'(x) = f'(x) = \frac{-a(xe^x - c)}{(e^x + c)^2} = \frac{-a(xe^x - te^t)}{(e^x + c)^2}$$

이고, 함수 $y = xe^x$ 는 구간 $(-1, \infty)$ 에서

증가하므로 $xe^x < te^t (\because t > 1)$

따라서 $x < -1$ 일 때 $f'(x) > 0$ 이고, $h'(x) > 0$ 이다.

같은 방법으로 $1 < x < t$ 일 때 $h'(x) > 0$ 이고

$x > t$ 일 때 $h'(x) = f'(x) < 0$ 이다. 이를 이용하여

함수 $h(x)$ 의 증감표를 그리면 다음과 같다.

x		-1		1		t	
$h'(x)$	(+)		(-)		(+)	0	(-)
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $h(x)$ 는 $x = 1$ 에서만 극솟값을 갖는다.

(참)

(ㄷ) ①, ②에서

$$\begin{aligned} M &= h(t) = f(t) - g(t) \\ &= \frac{a(t+1)}{e^t + c} - 2 = \frac{a(t+1)}{(1+t)e^t} - 2 \\ &\leq \frac{2(e^{-1} + te^t)}{e^t} - 2 = 2e^{-t-1} + 2t - 2 \end{aligned}$$

이므로 $M(t) = 2e^{-t-1} + 2t - 2$

이코 $M'(t) = -2e^{-t-1} + 2$ 이다.

$$M'(\alpha) = -\frac{2}{3e^2}\alpha + 2 \text{에서}$$

$$-2e^{-\alpha-1} + 2 = -\frac{2}{3e^2}\alpha + 2$$

$$\Rightarrow e^2 \times 3e^{-\alpha-1} = \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha e^\alpha = 3e$$

따라서 ①에서 $t = \alpha$ 일 때 $c = \alpha e^\alpha = 3e$ 이고,

$t = \alpha$ 일 때 함수 $h(x)$ 의 극솟값의 최댓값은

$$\begin{aligned} h(1) &= f(1) - g(1) \\ &= \frac{2a}{e+c} - 2 \\ &\leq \frac{4(e^{-1}+e)}{e+c} - 2 \\ &= \frac{4(e^{-1}+3e)}{4e} - 2 = 1 + \frac{1}{e^2} \end{aligned}$$

이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

19. [출제 의도] 수열의 극한의 성질을 이용하여 극한값을 계산할 수 있는가?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2n+1} = 3 \text{에서}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 2b_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{2n+1} + \frac{2b_n}{2n+1} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{2n+1} = -\frac{3}{2}$$

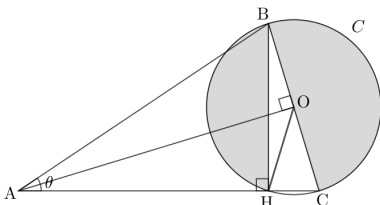
$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - 4b_n}{2a_n + b_n - 7n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n}{2n+1} - \frac{4b_n}{2n+1}}{\frac{2a_n}{2n+1} + \frac{b_n}{2n+1} - \frac{7n}{2n+1}}$$

$$= \frac{3+6}{6-\frac{3}{2}-\frac{7}{2}} = 9$$

20. [출제 의도] 삼각함수의 극한을 활용하여 극한값을 계산할 수 있는가?

$\angle BHC = 90^\circ$ 이므로 원주각의 성질에 의하여 원 C 는 선분 BC 를 지름으로 하는 원이다.



선분 BC 의 중점을 O 라 하면 위 그림에서 $S(\theta) - T(\theta)$ 는 삼각형 OBH 의 넓이와 부채꼴 OCH 의 넓이의 합과 같다.

$\overline{AB} = \overline{AC} = 1$ 이므로 이등변삼각형의 성질에 의하여

$$\overline{AO} \perp \overline{BC} \text{이고 } \angle BAO = \angle CAO = \frac{\theta}{2}$$

직각삼각형 AOC 에서

$$\angle ACO = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \text{이므로}$$

$$\angle OHC = \angle ACO = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \angle COH = \theta, \angle BOH = \pi - \theta$$

$$\text{또한 } \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OH} = \overline{AC} \sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\theta}{2}$$

이므로

삼각형 OBH 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{OB} \cdot \overline{OH} \cdot \sin \angle BOH = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin \theta$$

부채꼴 OCH 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{OC}^2 \cdot \angle COH = \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore S(\theta) - T(\theta) = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin \theta + \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \{ \sin \theta + \theta \}$$

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta) - T(\theta)}{\theta^3}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \{ \sin \theta + \theta \}}{\theta^3}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin \theta}{\theta} + 1 \right) \right\} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore 100a = 25$$

21. [출제 의도] 미분계수의 정의를 이용하여 여러 가지 함수의 식을 추론할 수 있는가?

함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이고

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 이므로 함수 $f(x)$ 가 역함수를

가지려면 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

$$f(x) = \begin{cases} e^{3x-1} + ke^{2x} + 3e^{x+1} - k & (x < 0) \\ e^{3x-1} - ke^{2x} + 3e^{x+1} + k & (x \geq 0) \end{cases}$$

에서

$$f'(x) = \begin{cases} 3e^{3x-1} + 2ke^{2x} + 3e^{x+1} & (x < 0) \\ 3e^{3x-1} - 2ke^{2x} + 3e^{x+1} & (x > 0) \end{cases}$$

이고 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

$e^x = t$ 라 하면 $t > 0$ 이고

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{e}t^3 + 2kt^2 + 3et & (0 < t < 1) \\ \frac{3}{e}t^3 - 2kt^2 + 3et & (t > 1) \end{cases}$$

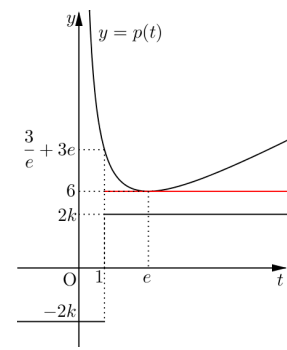
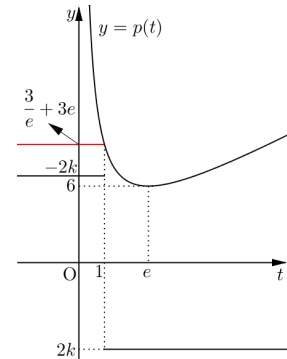
이므로

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3t}{e} + \frac{3c}{t} \geq -2k & (0 < t < 1) \\ \frac{3t}{e} + \frac{3c}{t} \geq 2k & (t > 1) \end{cases}$$

$p(t) = \frac{3t}{e} + \frac{3c}{t}$ 라 하면 다음 그림에서 위 부등식을 만족하는 실수 k 는 다음 그림과 같이

$$-2k \leq p(1) = \frac{3}{e} + 3e, \quad 2k \leq p(e) = 6$$

을 만족해야 한다.



$$\therefore -\frac{3}{2e} - \frac{3c}{2} \leq k \leq 3$$

(i) $k = -\frac{3}{2e} - \frac{3c}{2}$ 인 경우

$x < 0$ 일 때

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3e^{3x-1} - 3e^{2x-1} - 3e^{2x+1} + 3e^{x+1} \\ &= 3e^{2x}(e^{x-1} - e) - 3e^x(e^{x-1} - e) \\ &= 3e^{x-1}(e^x - 1)(e^x - e^2) \end{aligned}$$

이고, $x > 0$ 일 때

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3e^{3x-1} + 3e^{2x-1} + 3e^{2x+1} + 3e^{x+1} \\ &= 3e^{2x}(e^{x-1} + e) + 3e^x(e^{x-1} + e) \\ &= 3e^{x-1}(e^x + 1)(e^x + e^2) \end{aligned}$$

이다. 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이고,

위로부터 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$ 이므로 함수

$f(x)$ 는 $x = 0$ 에서만 미분가능하지 않다.

$$f(0) = 3e + \frac{1}{e} \text{이므로 함수 } f^{-1}(x) \text{는}$$

$x = 3e + \frac{1}{e}$ 에서만 미분가능하지 않다.

한편 $3e + \frac{1}{e} = a$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{h(x) - h(0)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{g(f^{-1}(x)) - g(0)}{x - a} \\ &= \lim_{t = f^{-1}(x) \rightarrow 0^+} \frac{g(t) - g(0)}{f(t) - f(0)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2e \{g(t) - g(0)\}}{2e^{3t} + (3 + 3e^2)e^{2t} + 6e^2 \cdot e^t - (9e^2 + 5)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2e \{g(t) - g(0)\}}{(e^t - 1) \{2e^{2t} + (5 + 3e^2)e^t + 9e^2 + 5\}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{g(t) - g(0)}{t} \cdot \frac{t}{e^t - 1} \cdot \frac{2e}{12(e^2 + 1)} \right) \\ &= \frac{e}{6(e^2 + 1)} g'(0) \end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{h(x) - h(0)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{g(f^{-1}(x)) - g(0)}{x - a} \\ &= \lim_{t = f^{-1}(x) \rightarrow 0^-} \frac{g(t) - g(0)}{f(t) - f(0)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\{g(t) - g(0)\}}{2e^{3t} - (3 + 3e^2)e^{2t} + 6e^2 \cdot e^t + 1 - 3e^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2e\{g(t) - g(0)\}}{(e^t - 1)\{2e^{2t} - (1 + 3e^2)e^t + 3e^2 - 1\}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2e\{g(t) - g(0)\}}{(e^t - 1)^2(2e^t - 3e^2 + 1)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{g(t) - g(0)}{t^2} \cdot \frac{t^2}{(e^t - 1)^2} \cdot \frac{2e}{3(1 - e^2)} \right) \\ &= \frac{2e}{3(1 - e^2)} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{g(t) - g(0)}{t^2} \end{aligned}$$

이고, 조건 (나)에서

$$\frac{e}{6(e^2 + 1)} g'(0) = \frac{2e}{3(1 - e^2)} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{g(t) - g(0)}{t^2}$$

이때 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{g(t) - g(0)}{t^2}$ 의 값이 존재하므로

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0) = 0 \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{g(t) - g(0)}{t^2} = 0$$

이고, 다항식 $g(t) - g(0)$ 은 t^3 을 인수로 가져야 한다.

$$\begin{aligned} g(t) - g(0) &= t^3(t - \alpha) \text{라 두면} \\ g'(t) &= 3t^2(t - \alpha) + t^3 = t^2(4t - 3\alpha) \end{aligned}$$

$f^{-1}(x)$ 는 $x = 0$ 에서만 미분가능하지 않고, 위의 식으로부터 방정식 $h'(x) = 0$ 의 실근의 개수는 방정식 $g'(x) = 0$ 의 실근의 개수와 같다.

따라서 조건 (다)에서 방정식 $g'(t) = 0$ 은 단 하나의 실근을 가져야 하므로 $\alpha = 0$ 이다.

$$\therefore g(t) = t^4 + g(0)$$

이 경우 $g(1) - g(0) = 1$ 이므로 문제의 조건을 만족하지 않는다.

$$(ii) -\frac{3}{2e} - \frac{3e}{2} < k < 3 \text{인 경우}$$

$k \neq 0$ 이므로 (i)과 같은 방법으로 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서만 미분가능하지 않고, $f'(x) = 0$ 인 실수 x 가 존재하지 않으므로 함수 $f^{-1}(x)$ 는 $x = 3e + \frac{1}{e}$ 에서만 미분가능하지 않다.

이때 조건 (나)를 만족하려면 (i)과 같은 방법으로 $g'(0) = 0$ 이어야 하고, 방정식 $g'(x) = 0$ 은 단 하나의 실근을 가져야 하므로

$$g(t) = t^4 + g(0)$$

을 얻는다. 이는 (i)과 같이 문제의 조건을 만족하지 않는다.

$$(iii) k = 3 \text{인 경우}$$

$$\begin{aligned} x < 0 \text{일 때} \\ f'(x) &= 3e^{3x-1} + 6e^{2x} + 3e^{x+1} \\ &= 3e^{x-1}(e^x + e^2) \end{aligned}$$

이고, $x > 0$ 일 때

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3e^{3x-1} - 6e^{2x} + 3e^{x+1} \\ &= 3e^{x-1}(e^x - e^2) \end{aligned}$$

이다. 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이고,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) \text{이므로 함수 } f(x) \text{는}$$

$x = 0$ 에서 미분가능하지 않다. 따라서 $f^{-1}(x)$ 는 $x = 3e + \frac{1}{e}$ 에서 미분가능하지 않다.

또한 $f'(1) = 0$ 이고 $f(1) = e^2 + 3$ 이므로 함수 $f^{-1}(x)$ 는 $x = e^2 + 3$ 에서도 미분가능하지 않다.

따라서 함수 $f^{-1}(x)$ 는 $x = 3e + \frac{1}{e}$ 과 $x = e^2 + 3$ 에서만 미분가능하지 않다.

(i)과 같은 방법으로 함수 $h(x)$ 가 $x = 3e + \frac{1}{e}$ 에서 미분가능하려면 $g'(0) = 0$ 이어야 하고, $h'(3e + \frac{1}{e}) = 0$ 이다. 한편 $e^2 + 3 = b$ 라 하면

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow b} \frac{h(x) - h(b)}{x - b} \\ &= \lim_{x \rightarrow b} \frac{g(f^{-1}(x)) - g(1)}{x - b} \\ &= \lim_{t = f^{-1}(x) \rightarrow 1} \frac{g(t) - g(1)}{f(t) - f(1)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{g(t) - g(1)}{e^{3t-1} - 3e^{2t} + 3e^{t+1} + 3 - (e^2 + 3)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{e\{g(t) - g(1)\}}{e^{3t} - 3e^{2t+1} + 3e^{t+2} - e^3} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{g(t) - g(1)}{(t-1)^3} \cdot \frac{t^2}{(e^t - e)^3} \cdot e \right) \\ &= \frac{1}{e^2} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{g(t) - g(1)}{(t-1)^3} \end{aligned}$$

에서 함수 $h(x)$ 가 $x = b$ 에서 미분가능하려면 다항식 $g(t) - g(1)$ 은 $(t-1)^3$ 을 인수로 가져야 하고, $h'(3e + \frac{1}{e}) = 0$ 이므로 조건 (다)를 만족시키려면 다항식 $g(t) - g(1)$ 이 $(t-1)^4$ 으로는 나누어떨어지지 않아야 한다.

$$\begin{aligned} g(t) - g(1) &= (t-1)^3(t - \beta) \text{라 두면} \\ g'(t) &= (t-1)^2(4t - 3\beta - 1) \end{aligned}$$

$$g'(0) = -3\beta - 1 = 0 \text{에서 } \beta = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore g(t) = (t-1)^3 \left(t + \frac{1}{3} \right) + g(1)$$

이 경우 $g(1) - g(0) = \frac{1}{3} < 1$ 이므로 문제의 조건을 만족한다.

(i) ~ (iii)에서 $k = 3$ 이므로,

$$g(t) = (t-1)^3 \left(t + \frac{1}{3} \right) + g(1) \text{이다.}$$

$$\therefore g(2) - g(1) = \frac{7}{3}, p + q = 10$$

22. [출제 의도] 음함수의 미분법을 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

방정식 $x^3 + \sin(y+1) = 1$ 에 $(x, y) = (a, -1)$ 을 대입하면

$$a^3 = 1 \Rightarrow a = 1$$

방정식 $x^3 + \sin(y+1) = 1$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$3x^2 + y' \cos(y+1) = 0$$

위 등식에 $(x, y) = (1, -1)$ 을 대입하면

$$3 + y' = 0, y' = -3$$

따라서 주어진 곡선 위의 점 $(1, -1)$ 에서 그은 접선의 방정식은

$$y = -3(x-1) - 1 = -3x + 2$$

$$\Rightarrow b = -3 \cdot (-1) + 2 = 5$$

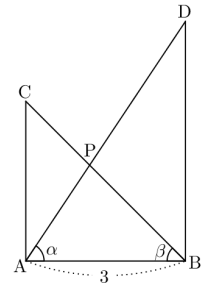
$$\therefore a + b = 6$$

23. [출제 의도] 정적분을 이용하여 급수를 계산할 수 있는가?

정적분과 급수의 관계에서

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{n} f\left\{ \frac{(n+2k)\pi}{2n} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{n} f\left(\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{n} \right) \\ &= \int_0^\pi f\left(\frac{\pi}{2} + x \right) dx \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{\pi}{2} + x \right) \cos\left(\frac{\pi}{2} + x \right) dx \\ &= - \int_0^\pi \frac{\pi}{2} \sin x dx - \int_0^\pi x \sin x dx \\ &= - \frac{\pi}{2} \times 2 + \left[x \cos x \right]_0^\pi - \int_0^\pi \cos x dx \\ &= -2\pi \end{aligned}$$

24. [출제 의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?



그림과 같이 $\angle PAB = \alpha$, $\angle PBA = \beta$ 라 하면

$$\overline{AC} = 3 \tan \beta, \overline{BD} = 3 \tan \alpha \dots \textcircled{1}$$

$\triangle PAC \sim \triangle PDB$ (AA 닮음)

이므로 닮음의 성질에 의하여

$$\overline{PB} : \overline{PC} = \overline{BD} : \overline{AC} \dots \textcircled{2}$$

문제의 조건에서 $\overline{PB} : \overline{PC} = 3 : 2$ 이므로 ①, ②에서

$$\tan \alpha : \tan \beta = 3 : 2$$

$\tan \alpha = 3t$, $\tan \beta = 2t$ ($t > 0$)이라 하면

$$\tan \angle APB = \tan \{ \pi - (\alpha + \beta) \}$$

$$= -\tan(\alpha + \beta)$$

$$= -\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$= -\frac{5t}{1 - 6t^2} = 5$$

$$\Rightarrow 6t^2 - t - 1 = 0, (3t+1)(2t-1) = 0$$

$$t > 0 \text{이므로 } \therefore t = \frac{1}{2}$$

$$\overline{AC} = 3 \tan \beta = 3 \text{이므로}$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} = \frac{9}{2}$$

$$\overline{PB} : \overline{PC} = 3 : 2 \text{이므로}$$

$$\therefore \triangle APB = \frac{3}{5} \triangle ABC = \frac{27}{10}$$

25. [출제 의도] 도함수를 활용하여 함수의 극댓값과 극솟값을 구할 수 있는가?

함수 $f(x)$ 는 미분가능한 함수이고 $x = 1$ 에서

극솟값을 가지므로 $f'(1)=0$ 이다.

$$f'(x) = (ax^2 + 2x - a^2)e^{ax}$$

$$\Rightarrow f'(1) = (-a^2 + a + 2)e^a = 0$$

에서 $a = -1$ 또는 $a = 2$

(1) $a = -1$ 인 경우

$$f'(x) = (-x^2 + 2x - 1)e^{ax}$$

$$= -(x-1)^2 e^{ax}$$

이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이다.
따라서 함수 $f(x)$ 는 극솟값을 갖지 않는다.

(2) $a = 2$ 인 경우

$$f'(x) = (2x^2 + 2x - 4)e^{ax}$$

$$= 2(x+2)(x-1)e^{ax}$$

이므로 함수 $f(x)$ 는 $x = -2$ 에서 극댓값을 가지고,
 $x = 1$ 에서 극솟값을 갖는다.

(1), (2)에서 $a = 2$ 이고 함수 $f(x)$ 의 극댓값은

$$f(-2) = (2^2 - 2)e^{2 \times (-2)} = \frac{2}{e^4}$$

26. [출제 의도] 치환적분법을 이용하여 함수의 정적분의 값을 계산할 수 있는가?

정적분 $\int_0^1 f(1-\sqrt{t})dt$ 에서 $1-\sqrt{t}=u$ 라 하면

$$-\frac{1}{2\sqrt{t}}dt = du \Rightarrow dt = -2\sqrt{t}du = 2(u-1)du$$

이므로

$$\int_0^1 f(1-\sqrt{t})dt = \int_1^0 2(u-1)f(u)du$$

$$= -\int_0^1 2(u-1)f(u)du$$

따라서

$$f(x) = e^x - 4x^2 \int_0^1 f(t)dt - 4x \int_0^1 (t-1)f(t)dt$$

이고,

$$\int_0^1 f(t)dt = a, \int_0^1 (t-1)f(t)dt = b$$

$f(x) = e^x - 4ax^2 - 4bx$ 에서

$$a = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (e^x - 4ax^2 - 4bx)dx$$

$$= \left[e^x - \frac{4a}{3}x^3 - 2bx^2 \right]_0^1$$

$$= e - \frac{4a}{3} - 2b - 1$$

$$\Rightarrow 7a + 6b = 3e - 3 \quad \text{①}$$

$$(x-1)f(x) = (x-1)e^x - 4ax^2(x-1) - 4bx(x-1)$$

$$= (x-1)e^x - 4ax^3 + 4(a-b)x^2 + 4bx$$

에서

$$b = \int_0^1 (x-1)f(x)dx$$

$$= \int_0^1 \{(x-1)e^x - 4ax^3 + 4(a-b)x^2 + 4bx\}dx$$

$$= \left[(x-2)e^x - ax^4 + \frac{4}{3}(a-b)x^3 + 2bx^2 \right]_0^1$$

$$= -e + 2 - a + \frac{4}{3}(a-b) + 2b = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b - e + 2$$

$$\Rightarrow a - b = 3e - 6 \quad \text{②}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a = \frac{21}{13}e - 3, b = -\frac{18}{13}e + 3$$

$$\therefore \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 (x-1)f(x)dx$$

$$= a + b = \frac{3e}{13}$$

27. [출제 의도] 도형의 성질을 이용하여 등비급수의 합을 구할 수 있는가?

그림 R_1 에서 문제의 조건과 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{B_1C_1}}{\sin \angle B_1A_1C_1} = 2\sqrt{7} \Rightarrow \overline{B_1C_1} = \sqrt{21}$$

$\overline{A_1B_1} = 2k, \overline{A_1C_1} = k$ 라 하면

삼각형 $A_1B_1C_1$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{B_1C_1}^2 = (2k)^2 + k^2 - 2 \cdot 2k \cdot k \cdot \cos \angle B_1A_1C_1$$

$$\Rightarrow 21 = 5k^2 + 2k^2, k = \sqrt{3}$$

따라서 삼각형 $A_1B_1C_1$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{A_1B_1} \cdot \overline{A_1C_1} \cdot \sin \angle B_1A_1C_1$$

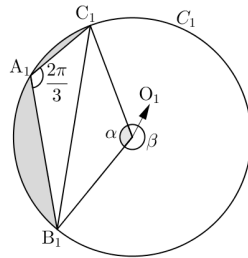
$$= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \dots \text{①}$$

원 C_1 의 중심을 O_1 이라 하고, 그림과 같이

두 선분 B_1O_1 과 C_1O_1 이 이루는 두 각 중 크기가 작은 각의 크기를 α , 큰 것의 크기를 β 라 하면 원주각과 중심각의 성질에 의하여

$$\beta = 2 \angle B_1A_1C_1 = \frac{4\pi}{3}$$

$$\text{이므로 } \alpha = 2\pi - \beta = \frac{2\pi}{3}$$



따라서 삼각형 $B_1O_1C_1$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{B_1O_1} \cdot \overline{C_1O_1} \cdot \sin \alpha = \frac{7\sqrt{3}}{4} \quad \dots \text{②}$$

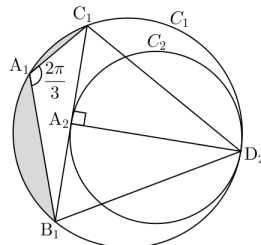
이고, 부채꼴 $B_1O_1C_1$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{B_1O_1}^2 \cdot \alpha = \frac{7}{3}\pi \quad \dots \text{③}$$

①, ②, ③에서 그림 R_1 에서 색칠된 부분의 넓이는

$$S_1 = \frac{7}{3}\pi - \frac{7\sqrt{3}}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{7}{3}\pi - \frac{13\sqrt{3}}{4}$$

한편 그림 R_2 에서



원 C_2 가 원 C_1 과 만나는 점을 D_2 라 하면

선분 A_2D_2 는 원 C_2 의 지름이고, 원과 접선의

성질에서 $\overline{B_1C_1} \perp \overline{A_2D_2}$ 이다.

또한, 원 C_2 는 원 C_1 과 선분 B_1C_1 에 접하는 원 중 반지름이 가장 큰 원이므로 원 C_1 의 중심은 직선 A_2D_2 위에 있다. 따라서 원과 현의 성질에서 A_2 는 선분 B_1C_1 의 중점이다.

따라서 $\triangle B_1A_2D_2 \equiv \triangle C_1A_2D_2$ (SAS 합동)

이고, 원의 내접하는 사각형의 성질에서

$$\angle B_1D_2C_1 = \pi - \angle B_1A_1C_1 = \frac{\pi}{3}$$

즉, 삼각형 $B_1C_1D_2$ 는 정삼각형이다.

$$\overline{B_1C_1} = \sqrt{21} \text{ 이므로 } \overline{A_2D_2} = \sqrt{21} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{7}}{2}$$

즉, 원 C_2 의 반지름은 $\frac{3\sqrt{7}}{4}$ 이다.

따라서 그림 R_2 에서 새로 색칠된 도형의 넓이는

넓이는 R_1 에서 색칠된 부분의 넓이의

$$r = \left(\frac{3\sqrt{7}}{4} \right)^2 = \frac{9}{16}$$

배이고, 이는 모든 자연수 n 에 대하여 R_{n+1} 과

R_n 에 대해서도 동일하므로 등비급수 공식에 의하여

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{S_1}{1-r}$$

$$= \frac{\frac{7}{3}\pi - \frac{13\sqrt{3}}{4}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{16}{3}\pi - \frac{52\sqrt{3}}{7}$$

28. [출제 의도] 적분과 미분의 관계를 이용하여 정적분으로 정의된 함수의 극대와 극소를 판정할 수 있는가?

$$(ㄱ) \lim_{x \rightarrow 0^-} \{1 - \cos(2\pi x)\}f(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{k\{1 - \cos(2\pi x)\}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{k \sin^2(2\pi x)}{x\{1 + \cos(2\pi x)\}} = 0$$

이고,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \{1 - \cos(2\pi x)\}f(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \{1 - \cos(2\pi x)\} \ln(x+2)$$

$$= 1 - \cos(2\pi \cdot 0) f(0) = 0$$

이므로

함수 $y = \{1 - \cos(2\pi x)\}f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 연속이다.

따라서 적분과 미분의 관계에 의하여

함수 $g(x)$ 는 $x = 0$ 에서 미분가능하다. (참)

(ㄴ) ㄱ에서 $g'(0) = 0$ 이고, $k > 0$ 이므로

$x < 0$ 일 때 $f(x) < 0$ 이고

$x > 0$ 일 때 $f(x) > 0$ 이다.

모든 실수 x 에 대하여 $1 - \cos(2\pi x) \geq 0 \quad \dots \text{①}$

이므로 $g'(x) = \{1 - \cos(2\pi x)\}f(x)$ 의 값의 부호는

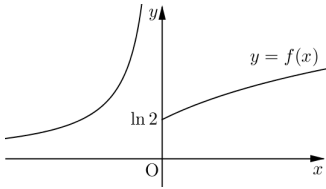
$x = 0$ 좌우에서 음에서 양으로 바뀐다.

따라서 함수 $g(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극솟값을 갖는다.

또한, 함수 $g(x)$ 는 $x = 0$ 에서 유일한 극솟값을

가지므로 함수 $g(x)$ 는 $x = 0$ 에서 최솟값을 갖는다. (참)

(ㄷ) $k = -1$ 일 때, 그림과 같이 함수 $f(x)$ 는 열린구간 $(-\infty, 0)$ 과 $(0, \infty)$ 에서 각각 증가한다. ... ②



한편,

$$\{g(n+1) + g(n+1)\} - 2g(n) \\ = \{g(n+1) - g(n)\} - \{g(n) - g(n-1)\}$$

이 고 모든 정수 n 에 대하여

$$g(n+1) - g(n) = \int_n^{n+1} \{1 - \cos(2\pi t)\} f(t) dt,$$

$$g(n) - g(n-1) = \int_{n-1}^n \{1 - \cos(2\pi t)\} f(t) dt \\ = \int_{n-1}^{n+1} \{1 - \cos(2\pi(t-1))\} f(t-1) dt \\ = \int_n^{n+1} \{1 - \cos(2\pi t)\} f(t-1) dt$$

이므로 정수 n 에 대하여

$n < 0$ 일 때와 $n > 0$ 일 때에는

$$\{g(n+1) - g(n)\} - \{g(n) - g(n-1)\}$$

$$= \int_n^{n+1} \{1 - \cos(2\pi t)\} \{f(t) - f(t-1)\} dt > 0$$

(\because ①, ②)

즉, $n < 0$ 일 때와 $n > 0$ 일 때에는

$$2g(n) < g(n-1) + g(n+1) \text{이다.}$$

한편 $n = 0$ 일 때,

$$g(0) - g(-1) = \int_0^1 \{1 - \cos(2\pi t)\} f(t-1) dt \\ = \int_0^1 \left(-\frac{1}{t-1}\right) \{1 - \cos(2\pi t)\} dt$$

이 고

$$g(1) - g(0) = \int_0^1 \ln(t+2) \{1 - \cos(2\pi t)\} dt$$

이므로 $n = 0$ 일 때

$$\{g(n+1) - g(n)\} - \{g(n) - g(n-1)\} \\ \{g(1) - g(0)\} - \{g(0) - g(-1)\}$$

$$= \int_0^1 \left\{ \ln(t+2) + \frac{1}{t-1} \right\} \{1 - \cos(2\pi t)\} dt$$

$$h(t) = \ln(t+2) + \frac{1}{t-1} \text{이라 하면}$$

$$h'(t) = \frac{1}{t+2} - \frac{1}{(t-1)^2} \\ = \frac{t^2 - 3t - 1}{(t+2)(t-1)^2} = \frac{t(t-1) - 2t - 1}{(t+2)(t-1)^2}$$

이므로 $0 < t < 1$ 일 때 $h'(t) < 0$ 이고,

$$h(0) = \ln 2 - 1 < 0 \text{이므로}$$

$0 < t < 1$ 일 때 $h(t) < 0$ 이다.

$1 - \cos(2\pi t) \geq 0$ 이고, \neg 에서 함수

$$y = h(t) \{1 - \cos(2\pi t)\}$$

는 모든 실수 t 에서 연속이므로

$$0 \leq t \leq 1 \text{에서 } h(t) \{1 - \cos(2\pi t)\} \leq 0 \text{이다.}$$

따라서

$$\{g(1) - g(0)\} - \{g(0) - g(-1)\}$$

$$= \int_0^1 h(t) \{1 - \cos(2\pi t)\} dt \leq 0$$

이므로 $2g(0) \geq g(1) + g(-1)$ 이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 \neg , \neg 이다.

29. [출제 의도] 평면 위를 움직이는 점의 위치와 속도의 관계를 이해하고 있는가?

점 P의 시각 t 에서의 속도는

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \left(-\frac{2t}{1+t^2}, a\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\right)$$

이므로 점 P의 시각 $t = 1$ 에서의 속도는 $(1, 2a)$ 이다.

따라서 점 P의 시각 $t = 1$ 에서의 속력은

$$\sqrt{1^2 + (2a)^2} = \sqrt{4a^2 + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow 4a^2 + 1 = \frac{5}{4}, \quad a^2 = \frac{1}{16}$$

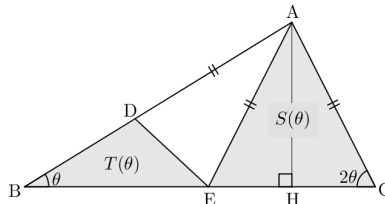
$$\therefore \frac{1}{a^2} = 16$$

30. [출제 의도] 도형의 성질과 삼각함수의 극한을 활용하여 극한값을 계산할 수 있는가?

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{BC}{\sin \angle BAC} = \frac{AC}{\sin \angle ABC} = \frac{AB}{\sin \angle ACB}$$

$$\Rightarrow \overline{AB} = \frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta}, \quad \overline{AC} = \frac{\sin \theta}{\sin 3\theta}$$



점 A에서 선분 BC로 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{CH} = \overline{EH} = \overline{AC} \cos 2\theta = \frac{\sin \theta \cos 2\theta}{\sin 3\theta}$$

$$\therefore S(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{CE} \times \sin 2\theta \\ = \frac{1}{2} \times \frac{\sin \theta}{\sin 3\theta} \times \frac{2 \sin \theta \cos 2\theta}{\sin 3\theta} \times \sin 2\theta \\ = \frac{\sin^2 \theta \sin 2\theta \cos 2\theta}{\sin^2 3\theta}$$

한편 $\angle AEC = 2\theta$ 이고 $\angle ABE = \theta$ 이므로

외각의 성질에 의하여 $\angle BAE = \theta$

$$\text{따라서 } \overline{AE} = \overline{BE} = \frac{\sin \theta}{\sin 3\theta} \text{ 이고,}$$

$$\overline{BD} = \overline{AB} - \overline{AD} = \frac{\sin 2\theta - \sin \theta}{\sin 3\theta}$$

이므로

$$\therefore T(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{BE} \times \overline{BD} \times \sin \theta \\ = \frac{1}{2} \times \frac{\sin \theta}{\sin 3\theta} \times \frac{\sin 2\theta - \sin \theta}{\sin 3\theta} \times \sin \theta \\ = \frac{\sin^2 \theta (\sin 2\theta - \sin \theta)}{2 \sin^2 3\theta}$$

따라서

$$\frac{T(\theta)}{S(\theta)} = \frac{\frac{\sin^2 \theta (\sin 2\theta - \sin \theta)}{2 \sin^2 3\theta}}{\frac{\sin^2 \theta \sin 2\theta \cos 2\theta}{\sin^2 3\theta}} \\ = \frac{\sin 2\theta - \sin \theta}{2 \sin 2\theta \cos 2\theta}$$

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{T(\theta)}{S(\theta)} \\ = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin 2\theta - \sin \theta}{2 \sin 2\theta \cos 2\theta} \right)$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sin 2\theta}{\sin \theta} - 1}{2 \times \frac{\sin 2\theta}{\sin \theta} \times \cos 2\theta} = \frac{2-1}{2 \times 2 \times 1} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore 100a = 25$$

31. [출제 의도] 역함수의 성질과 역함수의 미분법을 이용하여 역함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

모든 실수 x 에 대하여 $e^t x^2 + a > 0$ 이므로

함수 $f(x)$ 는 실수 전체에서 미분가능하다.

따라서 함수 $f(x)$ 가 실수 전체에서 정의된 역함수를 가지려면 모든 실수 x 에 대하여

$$f'(x) \geq 0 \text{ 또는 } f'(x) \leq 0$$

이어야 한다.

$$f'(x) = \frac{2e^t x}{e^t x^2 + a} + \frac{1}{2} \\ = \frac{e^t x^2 + 4e^t x + a}{2(e^t x^2 + a)} = \frac{e^t (x+2)^2 - 4e^t + a}{2(e^t x^2 + a)}$$

이 고, $e^t (x+2)^2 \geq 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 가 실수 전체에서 정의된 역함수를 가지려면

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -4e^t + a \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a \geq 4e^t$$

이어야 한다. ... ①

즉, 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 실수 전체에서 증가하고,

모든 실수 x 에 대하여

$$\frac{1}{2} g(f(2x)) = \frac{1}{2} \times 2x = x$$

$$f\left(2 \times \frac{1}{2} g(x)\right) = f(g(x)) = x$$

이므로 두 함수 $f(2x)$ 와 $\frac{1}{2} g(x)$ 또한 서로 역함수 관계에 있다.

이때 $f(2x)$ 와 $\frac{1}{2} g(x)$ 또한 실수 전체에서

증가하므로

$$f(2x) = \frac{1}{2} g(x) \Leftrightarrow f(2x) = \frac{1}{2} g(x) = x$$

이다.

따라서 $f(2\alpha) = \alpha$, $g(\alpha) = 2\alpha$ 이다. ... ②

$$f(2\alpha) = \ln\{e^t (2\alpha)^2 + a\} + \alpha = \alpha \text{에서}$$

$$\ln(4e^t \alpha^2 + a) = 0 \Rightarrow 4e^t \alpha^2 + a = 1$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = \frac{1-a}{4e^t}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} \sqrt{1-a}$$

이 고, 역함수의 미분법과 ①, ②에 의하여

$$g'(\alpha) = \frac{1}{f'(g(\alpha))}$$

$$= \frac{1}{f'(2\alpha)}$$

$$= \frac{2(4e^t \alpha^2 + a)}{4e^t \alpha^2 + 8e^t \alpha + a}$$

$$= \frac{1}{f'(2\alpha)} = \frac{2(4e^t \alpha^2 + a)}{4e^t \alpha^2 + 8e^t \alpha + a}$$

$$= \frac{2}{1-a + 8e^t \times \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} \sqrt{1-a} + a}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{4\sqrt{e^t(1-a)}+1} \\
 &\geq \frac{2}{4\sqrt{e^t(1-4e^t)}+1} \\
 \therefore h(t) &= \frac{2}{4\sqrt{e^t(1-4e^t)}+1} \\
 \therefore \int_{-\ln 10}^{-\ln 5} \left(\frac{1}{h(t)} - \frac{1}{2} \right) dt & \\
 &= \int_{-\ln 10}^{-\ln 5} 4e^t(1-4e^t) dt \\
 &= \left[-\frac{1}{2}(1-4e^t)^2 \right]_{-\ln 10}^{-\ln 5} \\
 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{25} - \frac{9}{25} \right) = \frac{4}{25} \\
 \therefore p+q &= 29
 \end{aligned}$$

32. [출제 의도] 치환적분법을 이용하여 함수의 정적분의 값을 구할 수 있는가?

$x+3=t$ 라 하면
 $x=-2$ 일 때 $t=1$, $x=1$ 일 때 $t=4$ 이고
 $\frac{dx}{dt}=1$ 이므로
 $\int_{-2}^1 x\sqrt{x+3} dx = \int_1^4 (t-3)\sqrt{t} dt$
 $= \int_1^4 \left(t^{\frac{3}{2}} - 3t^{\frac{1}{2}} \right) dt$
 $= \left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} - 2t^{\frac{3}{2}} \right]_1^4$
 $= \frac{62}{5} - 14 = -\frac{8}{5}$

33. [출제 의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 삼각함수의 값을 계산할 수 있는가?

$\cos(\alpha-\beta) = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ 이고 $\alpha-\beta < 0$ 이므로
 $\sin(\alpha-\beta) = -\sqrt{1-\cos^2(\alpha-\beta)}$
 $= -\sqrt{1-\frac{9}{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$
 $\cos(\alpha+\beta) = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 이고 $0 < \alpha+\beta < \pi$ 이므로
 $\sin(\alpha+\beta) = \sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}$
 $= \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
따라서
 $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = -\frac{1}{3}$
 $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = 2$
 $\therefore \tan 2\alpha = \tan\{(\alpha-\beta)+(\alpha+\beta)\}$
 $= \frac{\tan(\alpha-\beta)+\tan(\alpha+\beta)}{1-\tan(\alpha-\beta)\tan(\alpha+\beta)}$
 $= \frac{-\frac{1}{3}+2}{1+\frac{1}{3}\times 2} = 1$

34. [출제 의도] 정적분을 이용하여 입체도형의 부피를 계산할 수 있는가?

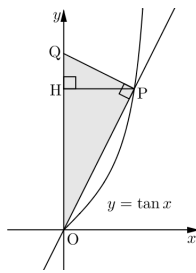
x 좌표가 x 인 점을 지나고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면 문제의 조건에서
 $S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \{f(x)\}^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{x}{x^2+1}$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{1}{2}}^2 S(x) dx &= \frac{\sqrt{3}}{4} \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{x}{x^2+1} dx \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{8} \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{2x}{x^2+1} dx \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{8} \left[\ln(x^2+1) \right]_{\frac{1}{2}}^2 \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{8} \left(\ln 5 - \ln \frac{5}{4} \right) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{4} \ln 2
 \end{aligned}$$

35. [출제 의도] 도형의 성질을 이용하여 여러 가지 함수의 극한을 계산할 수 있는가?

직선 OP의 기울기는 $\frac{\tan t}{t}$ 이므로
직선 PQ의 기울기는 $-\frac{t}{\tan t}$ 이고, 직선 PQ의 방정식은
 $y - \tan t = -\frac{t}{\tan t}(x - t)$
 $\Rightarrow y = -\frac{t}{\tan t}x + \frac{t^2}{\tan t} + \tan t$
따라서 점 Q의 좌표는 $\left(0, \frac{t^2}{\tan t} + \tan t \right)$ 이다.



그림과 같이 점 P에서 y 축으로 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\begin{aligned}
 S(t) &= \frac{1}{2} \times \overline{OQ} \times \overline{PH} \\
 &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{t^2}{\tan t} + \tan t \right) \times t \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{t^3}{\tan t} + t \tan t \right) \\
 \therefore \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)}{t^2} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \left(\frac{t}{\tan t} + \frac{\tan t}{t} \right) \\
 &= \frac{1}{2} (1+1) = 1 \quad \left(\because \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \right)
 \end{aligned}$$

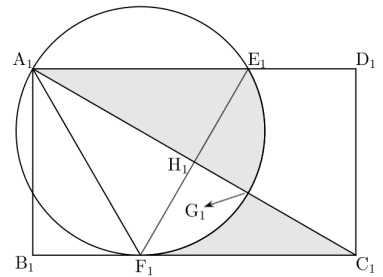
36. [출제 의도] 치환적분법과 부분적분법을 이용하여 정적분을 계산할 수 있는가?

조건 (가)의 양변에 $x=0$ 과 $x=1$ 을 각각 대입하면
 $ef(0) = f'(0) \dots \textcircled{1}$
 $e^2f(1) = f'(e-1) \dots \textcircled{2}$
양변에 e^{-x-1} 을 곱하면
 $f(x) = e^{-x-1}f'(e^x-1) \dots \textcircled{3}$
이므로 부분적분법과 치환적분법에 의하여
 $\int_0^1 e^{2x}f'(x) dx$
 $= \left[e^{2x}f(x) \right]_0^1 - 2 \int_0^1 e^{2x}f(x) dx$
 $= e^2f(1) - f(0) - 2 \int_0^1 e^{2x} \cdot e^{-x-1} \cdot f'(e^x-1) dx$
 $(\because \textcircled{3})$

$$\begin{aligned}
 &= f'(e-1) - f(0) - \frac{2}{e} \int_0^1 e^x f'(e^x-1) dx \quad (\because \textcircled{2}) \\
 &= f'(e-1) - f(0) - \frac{2}{e} \left[f(e^x-1) \right]_0^1 \\
 &= f'(e-1) - f(0) - \frac{2}{e} f(e-1) + \frac{2}{e} f(0) \\
 &= \left(\frac{2}{e} - 1 \right) f(0) \quad (\because \textcircled{4}) \\
 &= \left(\frac{2}{e} - 1 \right) \cdot \frac{1}{e} f'(0) = \frac{1}{e} \quad (\because \textcircled{1}) \\
 \therefore f'(0) &= -\frac{e}{e-2}
 \end{aligned}$$

37. [출제 의도] 도형의 성질을 이용하여 등비급수의 합을 계산할 수 있는가?

그림 R_1 에서 $\overline{A_1B_1} = 1$, $\overline{A_1D_1} = \sqrt{3}$ 이고
 $\angle D_1 = \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\angle D_1A_1C_1 = \frac{\pi}{6}$
 $\angle C_1A_1B_1 = \frac{\pi}{3}$ 이고, 선분 A_1F_1 은 $\angle B_1A_1C_1$ 을 이등분하므로 $\angle B_1A_1F_1 = \angle C_1A_1F_1 = \frac{\pi}{6}$
따라서 $\overline{A_1E_1} = \overline{A_1F_1}$ 이고 $\angle E_1A_1F_1 = \frac{\pi}{3}$ 이므로 삼각형 $A_1E_1F_1$ 은 정삼각형이다.



그림과 같이 선분 A_1C_1 과 E_1F_1 이 만나는 점을 H_1 이라 하면 직선 A_1C_1 은 $\angle E_1A_1F_1$ 의 이등분선이므로
 $\triangle A_1H_1E_1 \cong \triangle A_1H_1F_1$ (SAS 합동) 이고,
점 G_1 은 호 E_1F_1 의 중점이다.

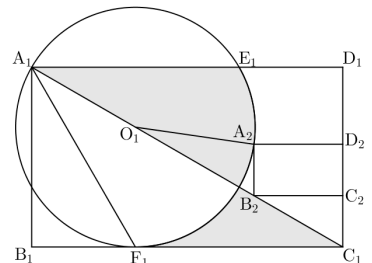
따라서 선분 A_1E_1 , A_1G_1 및 호 E_1G_1 으로 둘러싸인 도형은 선분 A_1E_1 , A_1G_1 및 호 F_1G_1 으로 둘러싸인 부분과 합동이다.

따라서 S_1 은 삼각형 $A_1F_1C_1$ 의 넓이와 같고,

$$\angle F_1A_1C_1 = \angle F_1C_1A_1 = \frac{\pi}{6} \text{ 이므로}$$

$$\overline{A_1F_1} = \overline{C_1F_1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \overline{A_1B_1} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore S_1 &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2 \times \sin(\angle A_1F_1C_1) \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}
 \end{aligned}$$



그림과 같이 세 점 A_1, E_1, F_1 을 지나는 원의 중심을 O_1 이라 하면 사인법칙에서

$$\overline{A_1O_1} = \frac{\overline{A_1F_1}}{2\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{2}{3}$$

이다. 그림 R_2 에서 $\overline{A_2B_2} = a$ 라 하면
 $\overline{B_2C_2} = \sqrt{3}a, \overline{C_1C_2} = a \Rightarrow \overline{B_2C_1} = 2a$
 이고
 $\overline{O_1A_2} = \overline{A_1O_1} = \frac{2}{3}$
 $\overline{O_1B_2} = \overline{A_1C_1} - \overline{A_1O_1} - \overline{B_2C_1} = \frac{4}{3} - 2a$

$\angle O_1B_2A_2 = \angle B_2C_1C_2 = \frac{\pi}{3}$
 이므로 삼각형 $O_1A_2B_2$ 에서 코사인법칙에 의하여
 $\overline{O_1A_2}^2 = \overline{O_1B_2}^2 + \overline{A_2B_2}^2 - 2 \times \overline{O_1B_2} \times \overline{A_2B_2} \times \cos(\angle O_1B_2A_2)$
 $\Rightarrow \frac{4}{9} = \left(\frac{4}{3} - 2a\right)^2 + a^2 - 2 \times \left(\frac{4}{3} - 2a\right) \times a \times \frac{1}{2}$
 $\Rightarrow 7a^2 - \frac{20}{3}a + \frac{4}{3} = 0$
 $\Rightarrow 21a^2 - 20a + 4 = 0, (7a-2)(3a-2) = 0$
 이때 $\overline{O_1B_2} = \frac{4}{3} - 2a > 0$ 이므로 $a = \frac{2}{7}$

따라서 그림 R_2 에서 새로 색칠된 도형의 넓이는
 넓이는 R_1 에서 색칠된 부분의 넓이

$$r = \left(\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}}\right)^2 = \left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{4}{49}$$

배이고, 이는 모든 자연수 n 에 대하여 R_{n+1} 과 R_n 에 대해서도 동일하므로 등비급수 공식에 의하여

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \frac{S_1}{1-r} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{4}{49}} = \frac{49}{45} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{49\sqrt{3}}{135} \end{aligned}$$

38. [출제 의도] 급수와 수열의 극한의 관계를 이해하고 있는가?

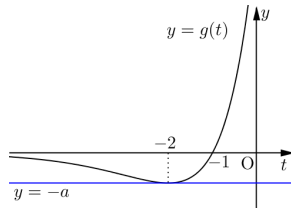
$\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n - 1)$ 의 값이 존재하므로
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n - 1) = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (10a_n + 4) = 10 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + 4 = 9$

39. [출제 의도] 도함수를 활용하여 접선의 방정식을 구하고, 함수의 그래프를 그릴 수 있는가?

원점에서 곡선 $y = \frac{1}{e^x + a}$ 에 그은 접선이 곡선과
 만나는 점의 좌표를 $(t, \frac{1}{e^t + a})$ 라 하면
 $y' = \frac{-e^x}{(e^x + a)^2}$ 에서 접선의 방정식은
 $y - \frac{1}{e^t + a} = -\frac{e^t}{(e^t + a)^2}(x - t)$
 이 직선이 원점을 지나므로
 $-\frac{1}{e^t + a} = \frac{te^t}{(e^t + a)^2}$

$$\Rightarrow te^t + e^t + a = 0, (t+1)e^t = -a$$

$g(t) = (t+1)e^t$ 라 하면
 $g'(t) = (t+2)e^t$ 에서 함수 $g(t)$ 는 $t = -2$ 에서
 극솟값을 가지고 $\lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = 0$ 이므로 함수 $g(t)$ 의
 그래프는 다음 그림과 같다.



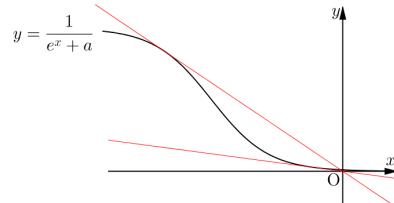
$$\begin{aligned} y'' &= \frac{-e^x(e^x + a)^2 + 2(e^x)^2(e^x + a)}{(e^x + a)^2} \\ &= \frac{e^x(e^x + a)(e^x - a)}{(e^x + a)^2} \end{aligned}$$

이므로 곡선 $y = \frac{1}{e^x + a}$ 는 $x = \ln a$ 에서 단 하나의
 변곡점을 갖는다.
 즉, 곡선 $y = \frac{1}{e^x + a}$ 는 곡선 위의 서로 다른
 두 점에서 접하는 (공통)접선을 갖지 않는다.

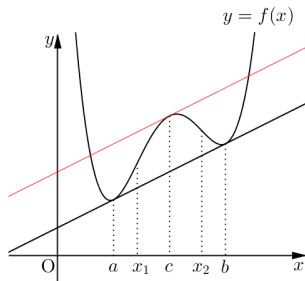
따라서 원점에서 곡선 $y = \frac{1}{e^x + a}$ 에 그은 접선의
 개수가 1이 되려면 방정식 $(t+1)e^t = -a$ 의 실근의
 개수가 1이 되어야 한다.
 그러한 경우는 위 그림에서 $-a$ 가 함수 $g(t)$ 의
 극솟값인 경우이다.

$$\therefore a = -g(-2) = e^{-2}, (\ln a)^2 = 4$$

(참고1)



그림과 같이 원점에서 곡선 $y = \frac{1}{e^x + a}$ 에 그은
 접선이 곡선과 만나는 점이 2인 경우, 곡선
 $y = \frac{1}{e^x + a}$ 은 단 하나의 변곡점을 가지므로
 두 접선이 일치하는 것은 불가능하다.
 (참고2) 함수 $f(x)$ 가 이계도함수를 가지고,
 곡선 $y = f(x)$ 곡선 위의 서로 다른 두 점
 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 에서 접하는 (공통)접선을 갖는
 경우, 그림과 같이



평균값정리에 의하여

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(a) = f'(b)$$

인 실수 c 가 열린구간 (a, b) 에 적어도 하나
 존재한다.

또한 함수 $f(x)$ 의 이계도함수가 존재하므로
 함수 $f'(x)$ 는 연속이고, 물의 정리에 의하여
 $f''(x_1) = 0$ 인 x_1 이 열린구간 (a, c) 에 적어도 하나
 존재하고,
 $f''(x_2) = 0$ 인 x_2 가 열린구간 (c, b) 에 적어도 하나
 존재한다.

40. [출제 의도] 적분과 미분의 관계를 이해하고, 합성함수의 미분법을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

두 함수 $y = \ln x$ 와 $y = 3 - 2\ln x$ 는 각각
 일대일 대응이므로
 $f(a) = f(2a)$

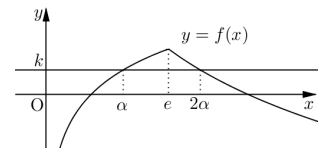
$$\Leftrightarrow \ln a = 3 - 2\ln 2a = 3 - \ln 4a^2$$

$$\Rightarrow \ln 4a^3 = 3, \alpha = \frac{e}{\sqrt[3]{4}}$$

즉, $\alpha < e < 2\alpha$ 이다. 또한

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & (0 < x < e) \\ -\frac{2}{x} & (x > e) \end{cases}$$

이므로 함수 $f(x)$ 는 $x = e$ 에서만 극댓값을 갖는다.
 이를 이용하여 함수 $f(x)$ 의 그래프와 α, k 를
 표시하면 그림과 같다.



곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = k$ 와 만나는 두 점의
 x 좌표는 각각 $\frac{\alpha}{t}, \frac{2\alpha}{t}$ 이다.

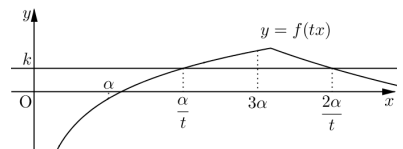
이를 이용하여 t 의 값이 $\frac{1}{2}$ 근방일 때와
 t 의 값이 2 근방일 때를 나누어 생각한다.

즉, 충분히 작은 양수 a 에 대하여

$$(1) \frac{1}{2} - a < t < \frac{1}{2} + a \text{ 인 경우}$$

$$\alpha < \frac{\alpha}{t} < 3\alpha \text{ 이고 } 3\alpha > \frac{2\alpha}{t} \text{ 이므로}$$

곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = k$ 를 나타내면 그림과
 같다.



$$p(x) = \int_{\alpha}^x \{f(ts) - k\} ds \quad (\alpha \leq x \leq 3\alpha) \text{ 라 하면}$$

$$p'(x) = f(tx) - k \text{ 이므로}$$

함수 $p(x)$ 는 열린구간 $(\alpha, \frac{\alpha}{t})$ 에서 감소하고,

열린구간 $(\frac{\alpha}{t}, 3\alpha)$ 에서 증가한다.

따라서 함수 $p(x)$ 는 $x = \frac{\alpha}{t}$ 에서 극소이면서

최소이다.

$$\therefore g(t) = p\left(\frac{\alpha}{t}\right) = \int_{\alpha}^{\frac{\alpha}{t}} \{f(ts) - k\} ds$$

$ts = u$ 로 치환하면

$$s = \alpha \Rightarrow u = t\alpha, \quad s = \frac{\alpha}{t} \Rightarrow u = \alpha$$

이 고 $ds = \frac{1}{t} du$ 이므로

$$g(t) = \frac{1}{t} \int_{t\alpha}^{\alpha} \{f(u) - k\} du$$

$$\therefore h(t) = tg(t) = \int_{t\alpha}^{\alpha} \{f(u) - k\} du$$

적분과 미분의 관계에 의하여

$$\Rightarrow h'(t) = -\alpha \times \{f(t\alpha) - k\},$$

$$\Rightarrow h'\left(\frac{1}{2}\right) = -\alpha \times \left\{f\left(\frac{\alpha}{2}\right) - k\right\}$$

$$= -\alpha \times \left\{f\left(\frac{\alpha}{2}\right) - f(\alpha)\right\}$$

$$= -\frac{e}{\sqrt[3]{4}} \times \left(\ln \frac{\alpha}{2} - \ln \alpha\right)$$

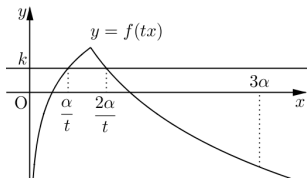
($\uparrow f(x) = \ln x$)

$$= -\frac{e}{\sqrt[3]{4}} \times (-\ln 2) = \frac{e}{\sqrt[3]{4}} \ln 2$$

(2) $2 - a < t < 2 + a$ 인 경우

$$\frac{\alpha}{t} < \alpha \text{ 이고, } \frac{2\alpha}{t} < 3\alpha \text{ 이므로}$$

곡선 $y = f(tx)$ 와 직선 $y = k$ 를 나타내면 그림과 같다.



(1)과 같은 방법으로 함수 $p(x)$ 는 열린구간

$$\left(\frac{2\alpha}{t}, 3\alpha\right) \quad (t \geq 2 \text{ 인 경우}) \text{ 또는}$$

$(\alpha, 3\alpha)$ ($t < 2$ 인 경우)에서 감소한다.

이때 $p(\alpha) = 0$ 이고, a 가 충분히 작은 경우 명백히 $p(3\alpha) < 0$ 이므로 함수 $p(x)$ 는 $x = 3\alpha$ 에서 최솟값을 갖는다.

$$\therefore g(t) = \int_{\alpha}^{3\alpha} \{f(ts) - k\} ds$$

(1)과 같은 방법으로 치환적분법에 의하여

$$g(t) = \frac{1}{t} \int_{t\alpha}^{3t\alpha} \{f(u) - k\} du$$

$$\therefore h(t) = tg(t) = \int_{t\alpha}^{3t\alpha} \{f(u) - k\} du$$

적분과 미분의 관계에 의하여

$$\Rightarrow h'(t) = 3\alpha \{f(3t\alpha) - k\} - \alpha \{f(t\alpha) - k\}$$

$$= 3\alpha f(3t\alpha) - \alpha f(t\alpha) - 2\alpha k$$

$$\Rightarrow h'(2) = 3\alpha f(6\alpha) - \alpha f(2\alpha) - 2\alpha k$$

$$= 3\alpha f(6\alpha) - 3\alpha f(2\alpha) \quad (\because f(2\alpha) = k)$$

$$= 3\alpha \{f(6\alpha) - f(2\alpha)\}$$

$$= \frac{3e}{\sqrt[3]{4}} \{(3 - 2\ln 6\alpha) - (3 - 2\ln 2\alpha)\}$$

($\uparrow f(x) = 3 - 2\ln x$)

$$= \frac{6e}{\sqrt[3]{4}} (\ln 2\alpha - \ln 6\alpha) = -\frac{6e}{\sqrt[3]{4}} \ln 3$$

(1), (2)에서

$$\begin{aligned} h'\left(\frac{1}{2}\right) - h'(2) &= \frac{e}{\sqrt[3]{4}} \ln 2 + \frac{6e}{\sqrt[3]{4}} \ln 3 \\ &= \frac{e}{\sqrt[3]{4}} (\ln 2 + 6\ln 3) \end{aligned}$$

$$\therefore p = 1, \quad q = 6 \Rightarrow p + q = 7$$

41. [출제 의도] 여러 가지 함수의 부정적분을 구할 수 있는가?

$$f'(x) = \frac{1}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \tan x$$

이므로 $f(x) = \sec x + C$ (C 는 적분상수)이다.

$$f(0) = 1 + C = 2 \text{ 이므로 } C = 1 \text{ 이고,}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sec \frac{\pi}{4} + 1 = \sqrt{2} + 1$$

42. [출제 의도] 수열의 극한과 급수의 관계를 이해하고 있는가?

$\sum_{n=1}^{\infty} \{(n+1)a_n - 2n^2\}$ 의 값이 존재하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{(n+1)a_n - 2n^2\} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(n+1)a_n}{n^2} - 2 \right\} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)a_n}{n^2} = 2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(n+1)a_n}{n^2} \times \frac{n}{n+1} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)a_n}{n^2} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \\ &= 2 \times 1 = 2 \end{aligned}$$

같은 방법으로 수열의 극한의 성질에서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{n+1} = 2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{n} = 2$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_{n+1}}{n}}{\frac{a_n}{n} + 1} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$$

43. [출제 의도] 적분과 미분의 관계와 함수의 연속의 정의를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (t-k) \sin t dt = 0$$

에서 부분적분법에 의하여

$$\left[(t-k)(-\cos t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt$$

$$= -k + 1 = 0 \quad \therefore k = 1$$

함수 $f(x)$ 는 연속함수이므로

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} \int_0^x (t-1) \sin t dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^x (t-1) \sin t dt$$

$$\left(\because \int_0^{\frac{\pi}{2}} (t-1) \sin t dt = 0 \right)$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\pi - 2}{2}$$

44. [출제 의도] 정적분을 이용하여 급수를 계산할 수 있는가?

정적분과 급수의 관계로부터

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\ln(n+k) - \ln n}{n+k}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \times \frac{\ln\left(\frac{n+k}{n}\right)}{\frac{n+k}{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \times \frac{\ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)}{1 + \frac{k}{n}}$$

$$= \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx \quad \left(\leftarrow \Delta x = \frac{1}{n}, \quad x = 1 + \frac{k}{n} \right)$$

$$= \left[\frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_1^2 = \frac{(\ln 2)^2}{2}$$

45. [출제 의도] 합성함수의 미분법과 역함수의 미분법을 이용하여 도함수를 구할 수 있는가?

함수 $f(x)$ 는 미분가능한 함수이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(x) - 1}{x - 2} = 3$$

에서 극한의 성질에 의하여

$$2f(2) = 1 \Rightarrow f(2) = \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$p(x) = xf(x)$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(x) - 1}{x - 2} = p'(2) = 3$$

이 고 $p'(x) = f(x) + xf'(x)$ 에서

$$p'(2) = f(2) + 2f'(2) = 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + 2f'(2) = 3, \quad f'(2) = \frac{5}{4} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$f(2) = \frac{1}{2} \Rightarrow g\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \text{ 이고,}$$

역함수의 미분법에 의하여

$$g'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{4}{5} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'\left(\frac{f(x)}{e^{x-2}}\right) \times \left(\frac{f(x)}{e^{x-2}}\right)' \\ &= g'\left(\frac{f(x)}{e^{x-2}}\right) \times \{f'(x) - f(x)\} e^{-x+2} \end{aligned}$$

이므로 ①, ②, ③에서

$$h'(2) = g'\left(\frac{1}{2}\right) \times \{f'(2) - f(2)\}$$

$$= \frac{4}{5} \times \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{5}$$

46. [출제 의도] 적분과 미분의 관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

(ㄱ) 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 정의되므로

모든 실수 x 에 대하여 $x^2 - f(x) \geq 0$ 이어야 한다.

$h(x) = x^2 - f(x)$ 라 하면

$f(0) = 0$ 이면 $h(0) = 0$ 이고, $h(x) \geq 0$ 이어야 하므로

함수 $h(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극솟값을 가져야 한다.

함수 $f(x)$ 가 미분가능한 함수이므로

함수 $h(x)$ 도 미분가능한 함수이고,

$h'(0) = 0$ 이어야 한다. 따라서

$h'(x) = 2x - f'(x)$ 에서 $f'(0) = 0$ 이다. (참)

(ㄴ) 적분과 미분의 관계에서

$g'(x) = \sqrt{x^2 - f(x)}$ 이고

$f(x)$ 가 상수함수이므로 모든 실수 x 에 대하여 $g'(-x) = g'(x)$ 이다.

즉, 모든 실수 x 에 대하여 $g'(x) - g'(-x) = 0$ 이고, 함수 $g(x) + g(-x)$ 는 함수 $g'(x) - g'(-x)$ 의 한 부정적분이므로

$$g(x) + g(-x) = C \quad (C \text{는 상수})$$

$$g(0) = 0 \text{이므로 } C = 0$$

$$\therefore g(x) + g(-x) = 0 \quad (\text{참})$$

(ㄷ) 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = f(x)$ 이므로 \hookrightarrow 과 같은 방법으로 $g(x) + g(-x) = 0$ 이다. ... (*) 또한, 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \leq 0$ 이므로

$$\sqrt{x^2 - f(x)} \geq \sqrt{x^2} = |x|$$

이고

$$g(2) = \int_0^2 \sqrt{t^2 - f(t)} dt \geq \int_0^2 |t| dt = 2$$

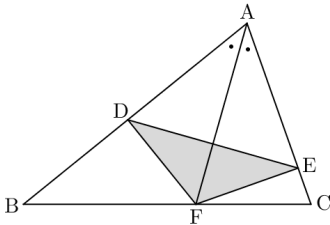
이다.

(*)에서 $g(-2) = -g(2) \leq -2$ 이고,

$$g(2)g(-2) \leq -4 \text{이다. (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 \neg , \cup 이다.

47. [출제 의도] 도형의 성질을 이용하여 등비급수의 합을 구할 수 있는가?



두 삼각형 ADF와 AEF에서

$$\overline{AF} \text{는 공통, } \overline{AD} = \overline{AE}, \angle ADF = \angle AEF = \frac{\pi}{2}$$

이므로 $\triangle ADF \cong \triangle AEF$ 이다.

즉, $\angle FAD = \angle FAE$ 이므로

각 이등분선 정리에 의하여

$$\overline{BF} : \overline{CF} = \overline{AB} : \overline{AC} = 3 : 2$$

$$\Rightarrow \overline{BF} = \frac{3}{5}\overline{BC} = \frac{9}{5}, \overline{CF} = \frac{2}{5}\overline{BC} = \frac{6}{5}$$

코사인법칙에서

$$\begin{aligned} \cos(\angle ABC) &= \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{CA}^2}{2 \times \overline{AB} \times \overline{BC}} \\ &= \frac{3^2 + 3^2 - 2^2}{2 \times 3 \times 3} = \frac{7}{9} \end{aligned}$$

이므로

$$\sin(\angle ABC) = \sqrt{1 - \cos^2(\angle ABC)} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$\Rightarrow \overline{DF} = \overline{BF} \sin(\angle ABC) = \frac{4\sqrt{2}}{5} = \overline{EF} \quad \dots \textcircled{1}$$

한편, $\overline{AB} = \overline{BC}$ 이므로

$$\cos(\angle BAC) = \cos(\angle BCA) = \frac{\frac{1}{2}\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{1}{3}$$

이고,

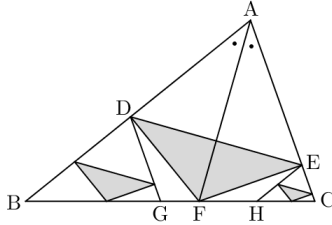
$$\sin(\angle BAC) = \sin(\angle BCA) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

따라서

$$\sin(\angle DFE) = \sin(\pi - \angle BAC) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②에서

$$\begin{aligned} S_1 &= \triangle DEF \\ &= \frac{1}{2} \times \overline{DF} \times \overline{EF} \times \sin(\angle DFE) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{4\sqrt{2}}{5}\right)^2 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{32\sqrt{2}}{75} \end{aligned}$$



한편

$$\overline{BD} = \overline{BF} \cos(\angle ABC) = \frac{7}{5}$$

이므로

$$\left(\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}}\right)^2 = \left(\frac{7}{15}\right)^2 = \frac{49}{225}$$

$$\overline{CE} = \overline{CF} \cos(\angle BCA) = \frac{2}{5}$$

이므로

$$\left(\frac{\overline{CE}}{\overline{AC}}\right)^2 = \frac{1}{25}$$

이고, 따라서 그림 R_2 에서 새로 색칠된 도형의 넓이는 R_1 에서 색칠된 부분의 넓이의

$$r = \left(\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{CE}}{\overline{AC}}\right)^2 = \frac{58}{225}$$

베이고, 이는 모든 자연수 n 에 대하여 R_{n+1} 과 R_n 에 대해서도 동일하므로 등비급수 공식에 의하여

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \frac{S_1}{1-r} \\ &= \frac{\frac{32\sqrt{2}}{75}}{1 - \frac{58}{225}} = \frac{96\sqrt{2}}{167} \end{aligned}$$

48. [출제 의도] 음함수의 미분법을 이용하여 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

주어진 방정식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2x \ln y + \frac{x^2 y'}{y} = \cos \pi y - \pi y'(x-a) \sin \pi y$$

(단, $y' = \frac{dy}{dx}$)

위 등식에 $(x, y) = (a, 1)$ 를 대입하면

$$a^2 y' = -1, \quad y' = -\frac{1}{a^2}$$

문제의 조건에서 $-\frac{1}{a^2} = \frac{2}{a}$ 이므로 $a = -\frac{1}{2}$

$$\therefore 100a^2 = 25$$

49. [출제 의도] 사인법칙을 이용하여 삼각함수의 극한을 계산할 수 있는가?

원주각의 성질에서 $\angle BOC = 2\theta$ 이고,

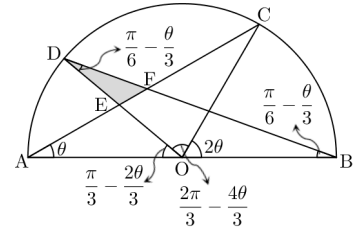
$\angle AOC = \pi - 2\theta$ 이고 $\widehat{AD} : \widehat{CD} = 1 : 2$ 이므로

$$\angle AOD = \frac{1}{3}(\pi - 2\theta) = \frac{\pi}{3} - \frac{2\theta}{3}$$

$$\angle COD = 2\angle AOD = \frac{2\pi}{3} - \frac{4\theta}{3}$$

이고 원주각의 성질에서 $\angle OBD = \frac{\pi}{6} - \frac{\theta}{3}$

이고 $\overline{OB} = \overline{OD}$ 이므로 $\angle ODB = \frac{\pi}{6} - \frac{\theta}{3}$ 이다.



삼각형 ABF에서

$\angle AFB = \frac{5\pi}{6} - \frac{2\theta}{3}$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AB}}{\sin(\angle AFB)} &= \frac{\overline{BF}}{\sin(\angle BAF)} \\ \Rightarrow \overline{BF} &= \frac{2\sin\theta}{\sin\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{2\theta}{3}\right)} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

삼각형 AOE에서

$\angle AEO = \frac{2\pi}{3} - \frac{\theta}{3}$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AO}}{\sin(\angle AEO)} &= \frac{\overline{OE}}{\sin(\angle OAE)} \\ \Rightarrow \overline{OE} &= \frac{\sin\theta}{\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\theta}{3}\right)} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

삼각형 OBD에서

$$\overline{BD} = 2 \times \overline{OB} \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\theta}{3}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\theta}{3}\right)$$

이므로 ①에서

$$\begin{aligned} \overline{DF} &= \overline{BD} - \overline{BF} \\ &= 2\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\theta}{3}\right) - \frac{2\sin\theta}{\sin\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{2\theta}{3}\right)} \end{aligned}$$

②에서

$$\begin{aligned} \overline{DE} &= \overline{OD} - \overline{OE} \\ &= 1 - \frac{\sin\theta}{\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\theta}{3}\right)} \end{aligned}$$

$\frac{\pi}{2} - \theta = t$ 라 하면

$$\begin{aligned} \overline{DE} &= 1 - \frac{\cos t}{\cos \frac{t}{3}} \\ &= 1 - \frac{\cos \frac{t}{3} \cos \frac{2t}{3} - \sin \frac{t}{3} \sin \frac{2t}{3}}{\cos \frac{t}{3}} \\ &= 1 - \frac{\cos \frac{t}{3}}{\cos \frac{t}{3}} + \tan \frac{t}{3} \sin \frac{2t}{3} \\ &= 1 - \cos \frac{2t}{3} + \tan \frac{t}{3} \sin \frac{2t}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{DF} &= 2\cos \frac{t}{3} - \frac{2\cos t}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2t}{3}\right)} \\ &= 2\cos \frac{t}{3} - \frac{2\cos t}{\cos \frac{2t}{3}} \\ &= 2\cos \frac{t}{3} - \frac{2\cos \frac{t}{3} \cos \frac{2t}{3} - 2\sin \frac{t}{3} \sin \frac{2t}{3}}{\cos \frac{2t}{3}} \\ &= 2\sin \frac{t}{3} \tan \frac{2t}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore S(\theta) &= \frac{1}{2} \times \overline{DE} \times \overline{DF} \times \sin(\angle ODB) \\ &= \left(1 - \cos \frac{2t}{3} + \tan \frac{t}{3} \sin \frac{2t}{3}\right) \\ &\quad \times \sin \frac{t}{3} \tan \frac{2t}{3} \times \sin \frac{t}{3} \end{aligned}$$

한편 선분 CD의 중점을 M이라 하면

$$\overline{CM} = \overline{OC} \sin \frac{2t}{3} = \sin \frac{2t}{3} \text{ 이므로}$$

$$\overline{CD} = 2 \sin \frac{2t}{3} \text{ 이고}$$

$\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{S(\theta)}{\overline{CD}^5} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \left\{ \frac{1}{32 \sin^5 \frac{2t}{3}} \left(1 - \cos \frac{2t}{3} + \tan \frac{t}{3} \sin \frac{2t}{3}\right) \right. \\ &\quad \left. \times \sin \frac{t}{3} \tan \frac{2t}{3} \times \sin \frac{t}{3} \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \left\{ \frac{t^5}{32 \sin^5 \frac{2t}{3}} \left(\frac{1 - \cos \frac{2t}{3}}{t^2} + \frac{\tan \frac{t}{3}}{t} \cdot \frac{\sin \frac{2t}{3}}{t} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\sin \frac{t}{3}}{t} \times \frac{\tan \frac{2t}{3}}{t} \times \frac{\sin \frac{t}{3}}{t} \right\} \\ &= \frac{3^5}{2^{10}} \left(\frac{2}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \right) \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{128} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\overline{CD}^5}{S(\theta)} = 128$$

50. [출제 의도] 도함수를 활용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있는가?

$t = 1$ 인 경우와 $t \neq 1$ 인 경우로 나누어 생각한다.

(1) $t \neq 1$ 일 때,

방정식 $(-x+t-1)e^{-x} = 2ax$ 의 실근의 개수는 방정식

$$\frac{(-x+t-1)e^{-x}}{2x} = a$$

의 실근의 개수와 같고,

방정식 $(x-t-1)e^{x-1} = a(x-2)$ 의 실근의 개수는 방정식

$$\frac{(x-t-1)e^{x-1}}{x-2} = a$$

의 실근의 개수와 같다.

$$p(x) = \frac{(-x+t-1)e^{-x}}{2x} \text{ 라 하면}$$

$$\begin{aligned} p'(x) &= \frac{2x(x-t)e^{-x} + 2(x-t+1)e^{-x}}{4x^2} \\ &= \frac{x^2 + (-t+1)x - t + 1}{2x^2 e^x} \end{aligned}$$

이고,

$$q(x) = \frac{(x-t-1)e^{x-1}}{x-2} \text{ 라 하면}$$

$$\begin{aligned} q'(x) &= \frac{(x-t)(x-2)e^{x-1} - (x-t-1)e^{x-1}}{(x-2)^2} \\ &= \frac{x^2 - (t+3)x + 3t + 1}{(x-2)^2} \times e^{x-1} \end{aligned}$$

이차방정식 $x^2 + (-t+1)x - t + 1 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = (t-1)^2 - 4(-t+1) = (t+3)(t-1)$$

이차방정식 $x^2 - (t+3)x + 3t + 1 = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_1 = (t+3)^2 - 4(3t+1) = (t-1)(t-5)$$

이므로 다음 사실을 알 수 있다.

(i) $-3 < t < 1$ 일 때, 함수 $p(x)$ 는 극값을 가지지 않고(증가하고), 함수 $q(x)$ 는 극댓값과 극솟값을 각각 가진다.

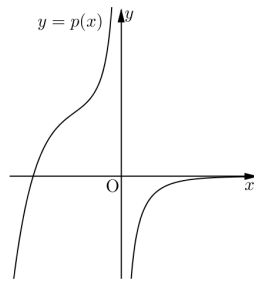
(ii) $1 < t < 5$ 일 때, 함수 $p(x)$ 는 극댓값과 극솟값을 각각 가지고, 함수 $q(x)$ 는 극값을 갖지 않는다(증가한다).

(i) $-3 \leq t < 1$ 인 경우

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0-} p(x) = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} p(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = 0$$

이므로 함수 $p(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} q(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 2-} q(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} q(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} q(x) = \infty \text{ 이고}$$

$x < t+1$ 일 때 $q(x) > 0$ 이므로

함수 $q(x)$ 는 $x < 2$ 에서 양수인 극댓값을 갖고,

$x > 2$ 에서 양수인 극솟값을 갖는다.

한편,

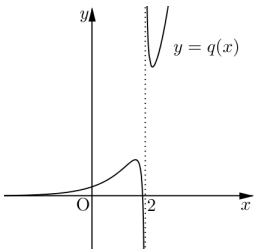
$$x < 2 \text{ 일 때, } \frac{x-t-1}{x-2} < 1,$$

$$x > 2 \text{ 일 때 } \frac{x-t-1}{x-2} > 1 \text{ 이고}$$

함수 $y = e^{x-1}$ 는 증가함수이므로

함수 $q(x)$ 의 두 극값이 일치하는 경우는 존재하지 않는다.

따라서 함수 $q(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



따라서 $a \neq 0$ 이므로 두 방정식

$p(x) = a, q(x) = a$ 의 실근의 개수가 같아지는

경우는 a 가 함수 $q(x)$ 의 극값일 때이다.

방정식 $q'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - (t+3)x + 3t + 1 = 0$

의 두 실근을 $x = \alpha, x = \beta$ 라 하면

$$\alpha + \beta = t + 3, \alpha\beta = 3t + 1$$

이므로

$$f(t)g(t) = q(\alpha)q(\beta)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(\alpha-t-1)(\beta-t-1)e^{\alpha+\beta-2}}{(\alpha-2)(\beta-2)} \\ &= \frac{\alpha\beta - (t+1)(\alpha+\beta) + (t+1)^2}{\alpha\beta - 2(\alpha+\beta) + 4} \times e^{t+1} \\ &= \frac{(3t+1) - (t+1)(t+3) + (t+1)^2}{(3t+1) - 2(t+3) + 4} \times e^{t+1} \\ &= e^{t+1} \end{aligned}$$

(ii) $1 < t \leq 5$ 인 경우

(i)과 비슷한 방법으로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0-} p(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} p(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = 0$$

이고 $x > t-1$ 일 때 $p(x) < 0$ 이므로

함수 $p(x)$ 는 $x < 0$ 일 때, 음수인 극댓값과

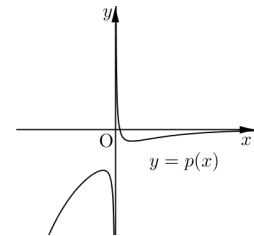
$x > 0$ 일 때 음수인 극솟값을 갖는다.

또한, $x < 0$ 일 때 $\frac{-x+t-1}{x} < -1$,

$x > 0$ 일 때 $\frac{-x+t-1}{x} > -1$ 이고

함수 $y = e^{-x}$ 는 감소함수이므로 함수 $p(x)$ 의 두 극값이 같은 경우는 존재하지 않는다.

따라서 함수 $p(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

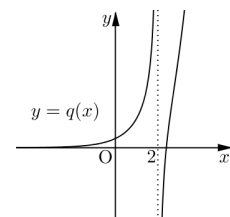


$$\lim_{x \rightarrow -\infty} q(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 2-} q(x) = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} q(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} q(x) = \infty$$

이고, 함수 $q(x)$ 는 극값을 갖지 않으므로 함수

$q(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



따라서 $a \neq 0$ 이므로 두 방정식

$p(x) = a, q(x) = a$ 의 실근의 개수가 같아지는

경우는 a 가 함수 $p(x)$ 의 극값일 때이다.

방정식 $p'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + (-t+1)x - t + 1 = 0$

의 두 실근을 $x = \alpha, x = \beta$ 라 하면

$$\alpha + \beta = t - 1, \alpha\beta = -t + 1$$

이므로

$$f(t)g(t) = p(\alpha)p(\beta)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(-\alpha+t-1)(-\beta+t-1)e^{-(\alpha+\beta)}}{4\alpha\beta} \\ &= \frac{\alpha\beta - (t-1)(\alpha+\beta) + (t-1)^2}{4\alpha\beta} \times e^{-(t-1)} \\ &= \frac{-(t-1) - (t-1)^2 + (t-1)^2}{-4(t-1)} \times e^{-t+1} \\ &= \frac{1}{4} e^{-t+1} \end{aligned}$$

(2) $t = 1$ 일 때, 방정식

$$-xe^{-x} = 2ax$$

의 모든 실근은 $x = 0, x = -\ln(-2a)$

이고 방정식

$$(x-2)e^{x-1} = a(x-2)$$

의 모든 실근은 $x = 2, x = 1 + \ln a$

이고, $x = -\ln(-2a)$ 또는 $x = 1 + \ln a$ 의 값 중

적어도 하나는 정의되지 않으므로

두 방정식의 실근의 개수가 같아지려면

$a = 0$ 이거나 $-\ln(-2a) = 0$ 또는

$1 + \ln a = 2$ 이어야 한다.

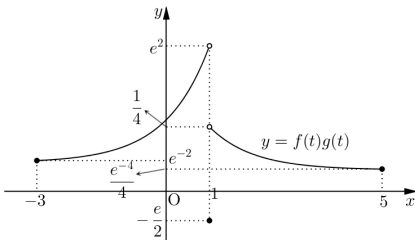
즉, $a = -\frac{1}{2}, a = 0$ 또는 $a = e$ 에서

$$f(1) = e, g(1) = -\frac{1}{2} \Rightarrow f(1)g(1) = -\frac{e}{2}$$

(1), (2)에서

$$f(t)g(t) = \begin{cases} e^{t+1} & (-3 \leq t < 1) \\ -\frac{e}{2} & (t = 1) \\ \frac{1}{4}e^{-t+1} & (1 < t \leq 5) \end{cases}$$

이고, 함수 $y = f(t)g(t)$ 의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $h(k)$ 가 불연속인 k 의 값은

$$k = -\frac{e}{2}, \frac{e^{-4}}{4}, e^{-2}, \frac{1}{4}, e^2$$

이므로 $n = 5$ 이고,

$$\alpha_1 = -\frac{e}{2}, \alpha_2 = \frac{e^{-4}}{4}, \alpha_3 = e^{-2}, \alpha_4 = \frac{1}{4},$$

$\alpha_5 = e^2$ 이다.

$$\begin{aligned} \therefore n - \sum_{k=1}^n \ln |\alpha_k| &= 5 - \ln \frac{e^{-3}}{32} \\ &= 8 + 5 \ln 2 \end{aligned}$$

$$\therefore p + q = 13$$