2021학년도 대학수학능력시험(수학)

4점 문제 해설

※ 본문을 읽기 전에, 먼저 읽어주세요!

1) 본 문서에 들어 있는 문제들에 대한 저작권은 **한국교육과정평가원**에 있습니다.

2) 본문의 해설은 필자가 단독으로 다른 해설을 참고하지 않고 만들어낸 것이므로 다소 매끄럽지 않은 부분이 있을 수도 있습니다.

3) 본문의 구성은 문제에 대한 주석과 해설, 해당 문제와 비슷한 유형의 연습 문제 몇 가지로 구성되어 있습니다.
(관련 교과 내용: 교과서의 내용 요소 기준 / 난이도: 필자가 주관적인 기준으로 판단)

4) 해당 저작물은 수험생들의 학습을 돕기 위해 만들어진 것으로, 영리적 목적(문제를 편집, 수정하여 판매하는 행위 등)이 아닌 이상 학생들의 학습을 위한 용도로 단순 배포하고 이용하는 것엔 제한이 없습니다.

5) 이 문서를 통해 많은 분들이 도움을 받으셨으면 좋겠습니다.

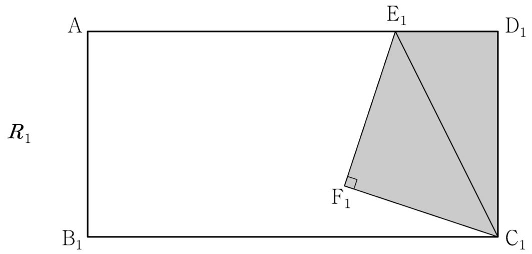
- 제작자: 그린란드(이재종)
  (http://blog.naver.com/wowhd93)

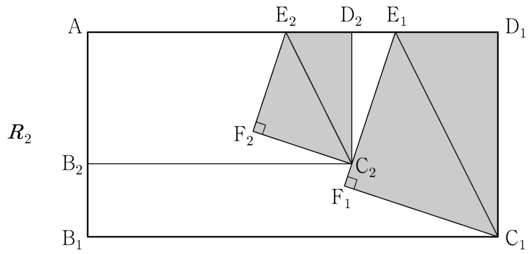
- 최종 수정일자: 2020/12/03 23:00

'가' 형

Problem #14

14. 그림과 같이 $\overline{AB_1}=2$, $\overline{AD_1}=4$인 직사각형 $AB_1C_1D_1$이 있다. 선분 AD_1을 $3:1$로 내분하는 점을 E_1이라 하고, 직사각형 $AB_1C_1D_1$의 내부에 점 F_1을 $\overline{F_1E_1}=\overline{F_1C_1}$, $\angle E_1F_1C_1=\frac{\pi}{2}$가 되도록 잡고 삼각형 $E_1F_1C_1$을 그린다. 사각형 $E_1F_1C_1D_1$을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 AB_1 위의 점 B_2, 선분 E_1F_1 위의 점 C_2, 선분 AE_1 위의 점 D_2와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{AB_2}:\overline{AD_2}=1:2$인 직사각형 $AB_2C_2D_2$를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $AB_2C_2D_2$에 삼각형 $E_2F_2C_2$를 그리고 사각형 $E_2F_2C_2D_2$를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [4점]





⋮ ⋮

① $\frac{441}{103}$ ② $\frac{441}{109}$ ③ $\frac{441}{115}$ ④ $\frac{441}{121}$ ⑤ $\frac{441}{127}$

commentary

(관련 교과 내용)
[미적분] 등비급수, 삼각함수의 덧셈정리
(난이도) $2/5$

Solution

그림 R_1에서 $\overline{D_1E_1}=\frac{1}{4}\overline{AD_1}=1$이고, $\overline{C_1D_1}=2$이므로

피타고라스의 정리에 의하여 $\overline{C_1E_1}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$이고,
삼각형 $C_1F_1E_1$은 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{E_1F_1}=\overline{C_1F_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{C_1E_1} \Rightarrow \overline{E_1F_1}=\overline{C_1F_1}=\sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$\therefore S_1=\triangle C_1D_1E_1+\triangle C_1F_1E_1$$
$$=\frac{1}{2}\times 1\times 2+\frac{1}{2}\times\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2=\frac{9}{4}$$

한편, 그림 R_2에서 $\overline{AB_2}=\overline{C_2D_2}=a$라 하면
문제의 조건에서 $\overline{AD_2}=2a$
$\overline{D_2E_1}=\overline{AD_1}-\overline{AD_2}-\overline{D_1E_1}=3-2a$
이고

$\tan(\angle C_1E_1D_1)=2$, $\tan(\angle C_1E_1F_1)=\tan\frac{\pi}{4}=1$

이므로 탄젠트의 덧셈정리에 의하여

$$\tan(\angle D_1E_1F_1)=\frac{2+1}{1-2\times 1}=-3$$

따라서 $\tan(\angle D_2E_1C_2)=\tan(\pi-\angle D_1E_1F_1)=3$

즉, $\frac{\overline{C_2D_2}}{\overline{D_2E_1}}=\tan(\angle D_2E_1C_2)=3$에서

$$3(3-2a)=a \Rightarrow a=\frac{9}{7}$$

즉, 그림 R_2에서 새로 색칠된 도형의 넓이는
넓이는 R_1에서 색칠된 부분의 넓이의

$$\left(\frac{\overline{AB_2}}{\overline{AB_1}}\right)^2=\left(\frac{9}{14}\right)^2=\frac{81}{196}$$

배이고, 이는 모든 자연수 n에 대하여 R_{n+1}과 R_n에 대해서도 동일하므로 등비급수 공식에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{9}{4}}{1-\frac{81}{196}}=\frac{\frac{9}{4}}{\frac{115}{196}}=\frac{441}{115}$$

정답: ③

Problem #15

15. $x>0$에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

$$f'(x)=2-\frac{3}{x^2},\quad f(1)=5$$

이다. $x<0$에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $g(-3)$의 값은? [4점]

(가) $x<0$인 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)=f'(-x)$이다.
(나) $f(2)+g(-2)=9$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

commentary

(관련 교과 내용)
[미적분] 여러 가지 함수의 미분법, 적분법
(난이도) $2/5$

Solution

조건 (가)에서 $-x>0$이므로

$$g'(x)=f'(-x)=2-\frac{3}{(-x)^2}=2-\frac{3}{x^2}$$

이고,

$$f(x)-f(1)=\int_1^x f'(t)dt$$
$$=\left[2t+\frac{3}{t}\right]_1^x=2x+\frac{3}{x}-5$$

$$\Rightarrow\ f(x)=2x+\frac{3}{x}-5+f(1)=2x+\frac{3}{x}\quad (\because\ f(1)=5)$$

따라서 $f(2)=4+\dfrac{3}{2}=\dfrac{11}{2}$이고,

조건 (나)에서 $g(-2)=\dfrac{7}{2}$입니다. 따라서

$$g(-2)-g(-3)=\int_{-3}^{-2}g'(t)dt$$
$$=\left[2t+\frac{3}{t}\right]_{-3}^{-2}=-\frac{11}{2}+7=\frac{3}{2}$$

$g(-2)=\dfrac{7}{2}$ 이므로 $\therefore\ g(-3)=g(-2)-\dfrac{3}{2}=2$

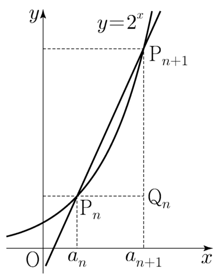
정답: ②

Problem #16

16. 상수 $k(k>1)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

모든 자연수 n에 대하여 $a_n<a_{n+1}$이고
곡선 $y=2^x$ 위의 두 점 $\mathrm{P}_n(a_n,\ 2^{a_n})$, $\mathrm{P}_{n+1}(a_{n+1},\ 2^{a_{n+1}})$을 지나는 직선의 기울기는 $k\times 2^{a_n}$이다.

점 P_n을 지나고 x축에 평행한 직선과 점 P_{n+1}을 지나고 y축에 평행한 직선이 만나는 점을 Q_n이라 하고 삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 넓이를 A_n이라 하자.



다음은 $a_1=1$, $\dfrac{A_3}{A_1}=16$일 때, A_n을 구하는 과정이다.

두 점 P_n, P_{n+1}을 지나는 직선의 기울기가 $k\times 2^{a_n}$이므로

$$2^{a_{n+1}-a_n}=k(a_{n+1}-a_n)+1$$

이다. 즉, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n$은 방정식 $2^x=kx+1$의 해이다.
$k>1$이므로 방정식 $2^x=kx+1$은 오직 하나의 양의 실근 d를 갖는다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n=d$이고, 수열 $\{a_n\}$은 공차가 d인 등차수열이다.
점 Q_n의 좌표가 $(a_{n+1},\ 2^{a_n})$이므로

$$A_n=\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)(2^{a_{n+1}}-2^{a_n})$$

이다. $\dfrac{A_3}{A_1}=16$이므로 d의 값은 (가) 이고,
수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=$ (나)

이다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여 $A_n=$ (다) 이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)와 (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $p+\dfrac{g(4)}{f(2)}$의 값은? [4점]

① 118 ② 121 ③ 124 ④ 127 ⑤ 130

commentary

(관련 교과 내용)
[수학I] 지수법칙, 등차수열
(난이도) $2/5$

Solution

(가), (나): 제시문으로부터 임의의 자연수 n에 대하여 $a_1=1$, $a_{n+1}-a_n=d$이므로

$A_1=\frac{1}{2}(a_2-a_1)(2^{a_2}-2^{a_1})=\frac{d}{2}(2^{1+d}-2^1)$이고,

$A_3=\frac{1}{2}(a_4-a_3)(2^{a_4}-2^{a_3})=\frac{d}{2}(2^{1+3d}-2^{1+2d})$

이므로 $\frac{A_3}{A_1}=\frac{2^{1+3d}-2^{1+2d}}{2^{1+d}-2^1}$

$=\frac{(2^d)^3-(2^d)^2}{2^d-1}$

$=\frac{(2^d)^2(2^d-1)}{2^d-1}=(2^d)^2$

$=16$

이므로 $2^d=4$이고, $d=2$입니다.

$\therefore\ a_n=a_1+(n-1)d=2n-1$

$\therefore\ p=2,\ f(n)=2n-1$

(다): $a_{n+1}-a_n=2,\ a_n=2n-1$이므로

$\therefore\ A_n=\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)(2^{a_{n+1}}-2^{a_n})$

$=2^{2n+1}-2^{2n-1}$

$\therefore\ g(n)=2^{2n+1}-2^{2n-1}$

$\therefore\ p+\frac{g(4)}{f(2)}=2+\frac{2^9-2^7}{3}=130$

정답: ⑤

Problem #17

17. 좌표평면의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가
> 2 이하이면 점 P를 x축의 양의 방향으로 3만큼,
> 3 이상이면 점 P를 y축의 양의 방향으로 1만큼
> 이동시킨다.

이 시행을 15번 반복하여 이동된 점 P와 직선 $3x+4y=0$ 사이의 거리를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X)$의 값은? [4점]

① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

commentary

(관련 교과 내용)
[확률과 통계] 이항분포
(난이도) $2/5$

Solution

문제의 시행을 15번 반복하였을 때, 나온 주사위의 눈이 2 이하인 횟수를 확률변수 Y라 하면, 주사위의 눈이 3 이상인 횟수는 $15-Y$이므로 점 P의 좌표는 $(3Y, 15-Y)$입니다.

따라서 점 P와 직선 $3x+4y=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3\times(3Y)+4(15-Y)|}{\sqrt{3^2+4^2}}=Y+12$$

입니다.

이때 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(15,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(Y)=5$이고, 문제의 조건에서 $X=Y+12$이므로

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(Y+12)=\mathrm{E}(Y)+12=17$

정답: ③

Problem #18

18. 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)x^{2n+1}+2x}{3x^{2n}+1}$$

라 하자. $(f\circ f)(1)=\frac{5}{4}$가 되도록 하는 모든 a의 값의 합은? [4점]

① $\frac{11}{2}$ ② $\frac{13}{2}$ ③ $\frac{15}{2}$ ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{19}{2}$

commentary

(관련 교과 내용)
[미적분] 등비수열의 극한
(난이도) $3/5$

Solution

$f(1)=\frac{(a-2)+2}{3+1}=\frac{a}{4}$ 이므로 다음과 같은 경우로 나누어 생각합니다.

(1) $|a|>4$인 경우

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{4}\right)^{2n}=\infty$ 이므로

$$\begin{aligned}(f\circ f)(1)&=f\left(\frac{a}{4}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)\times\left(\frac{a}{4}\right)^{2n+1}+\frac{a}{2}}{3\times\left(\frac{a}{4}\right)^{2n}+1}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)\times\frac{a}{4}+\frac{a}{2}\times\left(\frac{a}{4}\right)^{-2n}}{3+\left(\frac{a}{4}\right)^{-2n}}\\&=\frac{1}{12}a(a-2)\end{aligned}$$

이고, 문제의 조건에서

$\frac{1}{12}a(a-2)=\frac{5}{4}$

$\Leftrightarrow\ a^2-2a-15=0,\ (a-5)(a+3)=0$

$|a|>4$이므로 $\therefore\ a=5$

(2) $|a|<4$인 경우

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{4}\right)^{2n}=0$ 이므로

$$\begin{aligned}(f\circ f)(1)&=f\left(\frac{a}{4}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)\times\left(\frac{a}{4}\right)^{2n+1}+\frac{a}{2}}{3\times\left(\frac{a}{4}\right)^{2n}+1}\\&=\frac{a}{2}\end{aligned}$$

이고, 문제의 조건에서

$\frac{a}{2}=\frac{5}{4}\ \Leftrightarrow\ a=\frac{5}{2}$

$a=\frac{5}{2}$는 가정($|a|<4$)을 만족시키므로 문제의 조건을 만족시키는 a의 값입니다.

(3) $a=4$인 경우

$(f\circ f)(1)=f(1)=\frac{a}{4}$

이고, 문제의 조건에서

$\frac{a}{4}=\frac{5}{4}\ \Leftrightarrow\ a=5$

$a=5$는 가정($a=4$)을 만족시키지 않습니다.

(4) $a=-4$인 경우

$(f\circ f)(1)=f(-1)=-\frac{a}{4}$

이고, 문제의 조건에서

$-\frac{a}{4}=\frac{5}{4}\ \Leftrightarrow\ a=-5$

$a=-5$는 가정($a=-4$)을 만족시키지 않습니다.

(1)~(4)에서 문제의 조건을 만족시키는 모든 a의 값의 합은

$$5+\frac{5}{2}=\frac{15}{2}$$

정답: ③

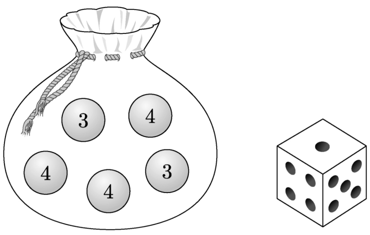
Problem #19

19. 숫자 3, 3, 4, 4, 4가 하나씩 적힌 5개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 규칙에 따라 점수를 얻는 시행을 한다.

> 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어
> 꺼낸 공에 적힌 수가 3이면 주사위를 3번 던져서 나오는 세 눈의 수의 합을 점수로 하고,
> 꺼낸 공에 적힌 수가 4이면 주사위를 4번 던져서 나오는 네 눈의 수의 합을 점수로 한다.

이 시행을 한 번 하여 얻은 점수가 10점일 확률은? [4점]

① $\frac{13}{180}$ ② $\frac{41}{540}$ ③ $\frac{43}{540}$ ④ $\frac{1}{12}$ ⑤ $\frac{47}{540}$



commentary

(관련 교과 내용)
[확률과 통계] 독립시행의 확률, 확률의 곱셈정리
(난이도) $3/5$

Solution

꺼낸 공에 적힌 숫자에 따라 다음과 같이 두 가지 경우로 나누어 생각합니다.

(1) 꺼낸 공에 적힌 수가 3인 경우

꺼낸 공에 적힌 수가 3일 확률은 $\frac{2}{5}$ ··· ①

이 경우 주사위를 3번 던지는 시행을 하고, 주사위를 3번 던져서 나오는 세 눈의 수의 합이 10인 경우와 각 경우가 발생할 확률은 다음과 같습니다.

세 눈의 수의 순서쌍을 $(a, b, c)\ (a < b < c)$라 하면

- $(1, 3, 6)$, $(1, 4, 5)$, $(2, 3, 5)$: $3! \times \left(\frac{1}{6}\right)^3$
- $(2, 2, 6)$, $(2, 4, 4)$, $(3, 3, 4)$: $\frac{3!}{2!} \times \left(\frac{1}{6}\right)^3$

따라서 주사위를 3번 던져 나온 눈의 수의 합이 10일 확률은

$$\left(3 \times 3! + 3 \times \frac{3!}{2!}\right) \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{8} \ \cdots \ ②$$

①, ②에서 꺼낸 공에 적힌 수가 3인 경우 시행을 하여 얻은 점수가 10점일 확률은

$$\frac{2}{5} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{20}$$

(2) 꺼낸 공에 적힌 수가 4인 경우

꺼낸 공에 적힌 수가 4일 확률은 $\frac{3}{5}$ ··· ③

이 경우 주사위를 4번 던지는 시행을 하고, 주사위를 4번 던져서 나오는 세 눈의 수의 합이 10인 경우와 각 경우가 발생할 확률은 다음과 같습니다.

네 눈의 수의 순서쌍을 $(a, b, c, d)\ (a < b < c < d)$라 하면

- $(1, 2, 3, 4)$: $4! \times \left(\frac{1}{6}\right)^4$
- $(1, 1, 2, 6)$, $(1, 1, 3, 5)$, $(1, 2, 2, 5)$: $\frac{4!}{2!} \times \left(\frac{1}{6}\right)^4$
- $(1, 1, 4, 4)$, $(2, 2, 3, 3)$: $\frac{4!}{2!2!} \times \left(\frac{1}{6}\right)^4$
- $(1, 3, 3, 3)$, $(2, 2, 2, 4)$: $\frac{4!}{3!} \times \left(\frac{1}{6}\right)^4$

따라서 주사위를 4번 던져 나온 눈의 수의 합이 10일 확률은

$$\left(4! + \frac{4!}{2!} \times 3 + \frac{4!}{2!2!} \times 2 + \frac{4!}{3!} \times 2\right) \times \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{5}{81} \ \cdots \ ④$$

③, ④에서 꺼낸 공에 적힌 수가 4인 경우 시행을 하여 얻은 점수가 10점일 확률은

$$\frac{3}{5} \times \frac{5}{81} = \frac{1}{27}$$

(1), (2)에서 문제에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{27} = \frac{47}{540}$$

정답: ⑤

Problem #20

20. 함수 $f(x) = \pi \sin 2\pi x$에 대하여 정의역이 실수 전체의 집합이고 치역이 집합 $\{0, 1\}$인 함수 $g(x)$와 자연수 n이 다음 조건을 만족시킬 때, n의 값은? [4점]

> 함수 $h(x) = f(nx)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고
> $$\int_{-1}^{1} h(x)\,dx = 2, \quad \int_{-1}^{1} xh(x)\,dx = -\frac{1}{32}$$
> 이다.

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

commentary

(관련 교과 내용)
[미적분] 함수의 그래프, 여러 가지 적분법, 정적분의 활용
(난이도) $5/5$

Solution

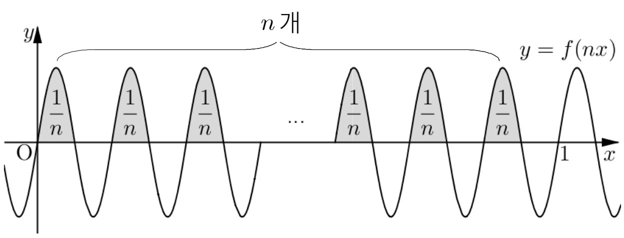
$f(nx) = \pi \sin(2n\pi x)$에서

함수 $y = f(nx)$는 주기가 $\frac{1}{n}$인 주기함수입니다. 또한,

$$\int_0^{\frac{1}{2n}} f(x)\,dx = \left[-\frac{1}{2n}\cos(2n\pi x)\right]_0^{\frac{1}{2n}} = \frac{1}{n}$$

이므로 아래 그림에서 닫힌구간 $[0, 1]$에서 곡선 $y = f(nx)$ $(y \geq 0)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\frac{1}{n} \times n = 1$$



이다. 같은 방법으로 닫힌구간 $[-1, 0]$에서 곡선 $y = f(nx)$ $(y \geq 0)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이도

$$\frac{1}{n} \times n = 1$$

입니다.

따라서 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 곡선 $y = f(nx)$ $(y \geq 0)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 2입니다. ⋯ ①

임의의 실수 x에 대하여 $g(x) = 0$ 또는 $g(x) = 1$이므로

$f(nx) \geq 0$인 경우 $h(x) = f(nx)g(x) \leq f(nx)$
$f(nx) \leq 0$인 경우 $h(x) = f(nx)g(x) \leq 0$
이므로 함수 $p(x)$를

$$p(x) = \begin{cases} f(nx) & (f(nx) \geq 0) \\ 0 & (f(nx) < 0) \end{cases}$$

라 하면 $p(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고, ①에서 $\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = 2$이고, 모든 실수 x에 대하여 $p(x) \geq h(x)$입니다. 따라서

$$\int_{-1}^{1} h(x)\,dx \leq \int_{-1}^{1} p(x)\,dx = 2$$

이때 문제의 조건에서

$$\int_{-1}^{1} h(x)\,dx = \int_{-1}^{1} p(x)\,dx$$

이므로 $\int_{-1}^{1} \{h(x) - p(x)\}\,dx = 0$

이고, $p(x) - h(x) \geq 0$이므로 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 $h(x) = p(x)$ 입니다.

한편, 닫힌구간 $\left[0, \frac{1}{2n}\right]$에서

$h(x) = f(nx) = \pi \sin(2n\pi x)$이므로 부분적분법에서

$$\int_0^{\frac{1}{2n}} xh(x)\,dx$$
$$= \left[-\frac{1}{2n}x\cos(2n\pi x)\right]_0^{\frac{1}{2n}} - \int_0^{\frac{1}{2n}} \left(-\frac{1}{2n}\cos(2n\pi x)\right)dx$$
$$= \frac{1}{4n^2} + \left[\frac{1}{4n^2}\sin(2n\pi x)\right]_0^{\frac{1}{2n}} = \frac{1}{4n^2}$$

이고, 닫힌구간 $\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right]$에서 $h(x) = 0$이므로

$$\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} xh(x)\,dx = 0$$

$$\therefore \int_0^{\frac{1}{n}} xh(x)\,dx = \frac{1}{4n^2} \quad \cdots ②$$

또한, 함수 $h(x)$는 주기가 $\frac{1}{n}$인 주기함수이므로 닫힌구간 $\left[-1, 1 - \frac{1}{n}\right]$에 속하는 모든 x에 대하여

$$h\left(x + \frac{1}{n}\right) = h(x)$$

입니다. 따라서 ②에서

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} xh(x)dx = \int_0^{\frac{1}{n}} \left(x+\frac{1}{n}\right)h\left(x+\frac{1}{n}\right)dx$$
$$= \int_0^{\frac{1}{n}} \left(x+\frac{1}{n}\right)h(x)dx$$
$$= \int_0^{\frac{1}{n}} xh(x)dx + \frac{1}{n}\int_0^{\frac{1}{n}} h(x)dx$$
$$= \frac{1}{4n^2}+\frac{1}{n^2}=\frac{5}{4n^2}$$

비슷한 방법으로 임의의 정수 $(-n \le k \le n-1)$에 대하여

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} xh(x)dx = \int_0^{\frac{1}{n}} \left(x+\frac{k}{n}\right)h\left(x+\frac{k}{n}\right)dx$$
$$= \int_0^{\frac{1}{n}} \left(x+\frac{k}{n}\right)h(x)dx$$
$$= \int_0^{\frac{1}{n}} xh(x)dx + \frac{k}{n}\int_0^{\frac{1}{n}} h(x)dx$$
$$= \frac{1}{4n^2}+\frac{k}{n^2}=\frac{4k+1}{4n^2}$$

따라서 $\int_{-1}^{1} xh(x)dx$의 값은 $\frac{4k+1}{4n^2}$의 값을 $k=-n$부터 $k=n-1$까지 대입하여 모두 더한 값과 같습니다.

이때 $\frac{4k}{4n^2}$의 값을 $k=-n+1$에서 $k=n-1$까지 대입하여 더한 값은 0이므로

$$\int_{-1}^{1} xh(x)dx = \frac{4\times(-n)}{4n^2}+\frac{1}{4n^2}\times 2n = -\frac{1}{2n}$$

문제의 조건에서 $-\frac{1}{2n}=-\frac{1}{32}$이므로 $n=16$입니다.

정답: ⑤

Problem #21

21. 수열 $\{a_n\}$은 $0<a_1<1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n}=a_2\times a_n+1$

(나) $a_{2n+1}=a_2\times a_n-2$

$a_8-a_{15}=63$일 때, $\frac{a_8}{a_1}$의 값은? [4점]

① 91 ② 92 ③ 93 ④ 94 ⑤ 95

commentary

(관련 교과 내용)
[수학I] 수열의 귀납적 정의
(난이도) $4/5$

Solution

문제의 조건 (가)의 양변에 $n=1$을 대입하면

$a_2=a_2\times a_1+1 \Rightarrow a_1=1-\frac{1}{a_2}$ ⋯ (*)

문제의 조건 (가), (나)에서

$$a_8-a_{15}=(a_2\times a_4+1-a_2\times a_7+2)$$
$$=a_2(a_4-a_7)+3$$
$$a_4-a_7=(a_2\times a_2+1-a_2\times a_3+2)$$
$$=a_2(a_2-a_3)+3$$
$$a_2-a_3=(a_2\times a_1+1-a_2\times a_1+2)$$
$$=3$$

이므로

$$a_8-a_{15}=a_2\{a_2(a_2-a_3)+3\}+3$$
$$=a_2\{3a_2+3\}+3=3{a_2}^2+3a_2+3$$

따라서 문제의 조건에서

$3{a_2}^2+3a_2+3=63 \Rightarrow {a_2}^2+a_2-20=0$

$\therefore\ a_2=4$ 또는 $a_2=-5$

(*)에서

$a_1=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ 또는 $a_1=1-\frac{1}{-5}=\frac{6}{5}$

$0<a_1<1$이므로 $\therefore\ a_1=\frac{3}{4},\ a_2=4$

$a_8=a_2\times a_4+1=4a_4+1$

$a_4=a_2\times a_2+1=17$

이므로 $a_8 = 4 \times 17 + 1 = 69$

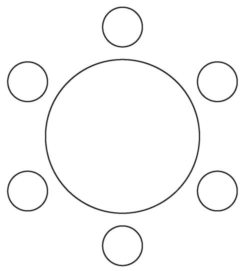
$\therefore \dfrac{a_8}{a_1} = 69 \times \dfrac{4}{3} = 92$

정답: ②

Problem #26

26. 세 학생 A, B, C를 포함한 6명의 학생이 있다. 이 6명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 다음 조건을 만족시키도록 모두 둘러앉는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

(가) A와 B는 이웃한다.
(나) B와 C는 이웃하지 않는다.



commentary

(관련 교과 내용)
[확률과 통계] 원순열
(난이도) $1/5$

Solution

조건 (가)를 만족시키도록 A, B를 앉히는 방법의 수는
A, B를 이웃하게 앉혀 한 명으로 취급하고, 나머지 4개의 동일한 자리를 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$$2! = 2$$

두 사람 A, B가 이웃하게 앉았을 때, 조건 (나)를 만족하도록 C가 앉으려면, C는 B와 이웃한 한 자리를 제외한 나머지 세 자리 중 하나에 앉으면 되고, 남은 3명은 남은 3개의 자리에 배열하면 되므로
따라서 C가 B와 이웃하지 않도록 학생들을 앉히는 방법의 수는

$$3 \times 3! = 18$$

따라서 문제의 조건을 만족시키는 모든 경우의 수는

$$2 \times 18 = 36$$

정답: 36

Problem #27

27. $\log_4 2n^2 - \frac{1}{2}\log_2\sqrt{n}$ 의 값이 40 이하의 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 개수를 구하시오. [4점]

commentary

(관련 교과 내용)
[수학I] 지수와 로그
(난이도) $3/5$

Solution

$\log_4 2n^2 - \frac{1}{2}\log_2\sqrt{n}$
$= \log_4 2n^2 - \frac{1}{2}\log_4 n$
$= \log_4 2n^2 - \log_4\sqrt{n}$
$= \log_4 \frac{2n^2}{\sqrt{n}} = \log_4 2n^{\frac{3}{2}}$

따라서 주어진 식이 40 이하의 자연수가 되려면
$2n^{\frac{3}{2}} = 4^k$ (k는 $k \le 40$인 자연수)
위 등식의 양변을 제곱하고 정리하면
$4n^3 = 16^k$, $n = 2^{\frac{4k-2}{3}}$

따라서 $4k-2$가 3의 배수여야 하고, 자연수 m에 대하여
$k=3m-3$인 경우 $4k-2=4(3m-3)-2=12m-14$
$k=3m-2$인 경우 $4k-2=4(3m-2)-2=12m-10$
$k=3m-1$인 경우 $4k-1=4(3m-1)-2=12m-6$
이므로 $4k-1$이 3의 배수가 되는 경우는 $k=3m-1$인 경우뿐입니다.

$1 \le k \le 40$이므로
$$1 \le 3m-1 \le 40 \Leftrightarrow 1 \le m \le 13$$

따라서 문제의 조건을 만족하는 자연수 k의 개수는 13이고, 자연수 n의 개수도 13입니다.

정답: 13

Problem #28

28. 두 상수 a, $b\,(a<b)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = (x-a)(x-b)^2$$

이라 하자. 함수 $g(x) = x^3 + x + 1$의 역함수 $g^{-1}(x)$에 대하여 합성함수 $h(x) = (f \circ g^{-1})(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $(x-1)|h(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) $h'(3) = 2$

commentary

(관련 교과 내용)
[미적분] 합성함수의 미분법, 역함수의 미분법
(난이도) $4/5$

Solution

모든 실수 x에 대하여 $g'(x) = 3x^2 + 1 > 0$이고, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 역함수의 미분법에 따라 역함수인 $g^{-1}(x)$ 또한 실수 전체의 집합에서 미분가능합니다.

함수 $f(x)$ 또한 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수이므로 $h(x) = (f \circ g^{-1})(x)$ 또한 실수 전체의 집합에서 미분가능합니다.

따라서 함수 $|h(x)|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 경우는 $h(a)=0$이고, $h'(a) \ne 0$인 경우뿐입니다.

함수 $g^{-1}(x)$의 치역(= 함수 $g(x)$의 정의역)은 실수 전체의 집합이므로

$h(x)=0 \Leftrightarrow g^{-1}(x)=a$ 또는 $g^{-1}(x)=b$
$\Leftrightarrow x=g(a)$ 또는 $x=g(b)$

이때 $x=g(b)$인 경우는
$h'(x) = f'(g^{-1}(x)) \times (g^{-1})'(x)$
에서
$h'(g(b)) = f'(b) \times (g^{-1})'(g(b)) = 0$
이므로
함수 $|h(x)|$는 $x=g(b)$에서 미분가능합니다.

한편, $x=g(a)$일 때 $h(g(a))=0$이므로 조건 (가)에서

$$\lim_{x\to g(a)}\frac{(x-1)|h(x)|}{x-g(a)}$$

$$=\lim_{x\to g(a)}\frac{(x-1)\left|(f\circ g^{-1})(x)\right|}{x-g(a)}$$

의 값이 존재해야 합니다.

$g^{-1}(x)=t$라 하면 $x=g(t)$이고 함수 $g(t)$는 연속이므로

$x\to g(a)$일 때 $t\to g^{-1}(g(a))=a$

따라서 위의 극한은

$$\lim_{t\to a}\frac{(g(t)-1)|f(t)|}{g(t)-g(a)}$$

$$=\lim_{t\to a}\left(\{g(t)-1\}\times\frac{t-a}{g(t)-g(a)}\times\frac{\left|(t-a)(t-b)^2\right|}{t-a}\right)$$

이고,

$$\lim_{t\to a+}\left(\{g(t)-1\}\times\frac{t-a}{g(t)-g(a)}\times\frac{\left|(t-a)(t-b)^2\right|}{t-a}\right)$$

$$=\{g(a)-1\}\times\frac{1}{g'(a)}\times(a-b)^2$$

$$\lim_{t\to a-}\left(\{g(t)-1\}\times\frac{t-a}{g(t)-g(a)}\times\frac{\left|(t-a)(t-b)^2\right|}{t-a}\right)$$

$$=-\{g(a)-1\}\times\frac{1}{g'(a)}\times(a-b)^2$$

이므로 위 극한이 존재하려면 $g(a)-1=0$이어야 합니다.

$\therefore\ g(a)=1$

$g(a)=a^3+a+1=1$에서 $a=0$임을 알 수 있습니다.

$\therefore\ f(x)=x(x-b)^2$

$f'(x)=(x-b)^2+2x(x-b)=3x^2-4bx+b^2$

한편, $g^{-1}(3)=k$라 하면

$g(k)=3\ \Rightarrow\ k^3+k+1=3$

$k^3+k-2=0,\ (k-1)(k^2+k+2)=0$

k는 실수이고 방정식 $k^2+k+2=0$은 실근을 갖지 않으므로

$\therefore\ k=1$

$h'(x)=f'\left(g^{-1}(x)\right)\times\left(g^{-1}\right)'(x)$에서

$h'(3)=f'\left(g^{-1}(3)\right)\times\left(g^{-1}\right)'(3)$

$=f'(1)\times\dfrac{1}{g'(1)}=\dfrac{1}{4}\left(b^2-4b+3\right)$

조건 (나)에서

$$\frac{1}{4}\left(b^2-4b+3\right)=2$$

$\Rightarrow\ b^2-4b-5=0,\ (b-5)(b+1)=0$

$b>a=0$이므로 $b=5$

$\therefore\ f(x)=x(x-5)^2,\ f(8)=72$

정답: 72

Problem #29

29. 네 명의 학생 A, B, C, D에게 검은색 모자 6개와 흰색 모자 6개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 모자끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

(가) 각 학생은 1개 이상의 모자를 받는다.
(나) 학생 A가 받는 검은색 모자의 개수는 4 이상이다.
(다) 흰색 모자보다 검은색 모자를 더 많이 받는 학생은 A를 포함하여 2명뿐이다.

commentary

(관련 교과 내용)
[확률과 통계] 중복조합
(난이도) 4/5

Solution

조건 (나), (다)에서 학생 A가 받는 검은색 모자의 개수는 4 또는 5입니다. 이에 따라 경우를 나누어 생각합니다.

(1) A가 검은색 모자를 4개 받은 경우
남은 검은색 모자의 개수는 2이고, 조건 (다)에서 B, C, D가 흰색 모자를 총 3개 이상 가져가야 합니다. ⋯ (*)
따라서 다음과 같이 나누어 생각합니다.

(i) B, C, D 중 한 명이 남은 검은색 모자 2개를 모두 가져가는 경우, 검은색 모자를 이 3명에게 나누어주는 방법의 수는
$${}_3C_1 = 3$$
조건 (다)에서 검은색 모자를 2개 가져간 사람은 흰색 모자를 1개 이하로 가져가야 하므로 (*)과 조건 (가)에서
이 사람이 흰색 모자를 1개 가져가는 경우, 남은 2명에게 흰색 모자를 나누어주는 방법의 수는
$${}_2H_{2-2} + {}_2H_{3-2} + {}_2H_{4-2} + {}_2H_{5-2} = 10$$
이 사람이 흰색 모자를 0개 가져가는 경우, 남은 2명에게 흰색 모자를 나누어주는 방법의 수는
$${}_2H_{3-2} + {}_2H_{4-2} + {}_2H_{5-2} + {}_2H_{6-2} = 14$$

(ii) B, C, D 중 2명이 검은색 모자를 1개씩 가져가는 경우, 검은색 모자를 이 3명에게 나누어주는 방법의 수는
$${}_3C_1 = 3$$
조건 (다)에서 검은색 모자를 가져간 2명 중 한 명은 흰색 모자를 받지 않아야 합니다. 이 2명 중 흰색 모자를 받지 못하는 학생을 결정하는 방법의 수는
$${}_2C_1 = 2$$
(*)에서 B, C, D 중 흰색 모자를 받지 못한 한 명을 제외한 남은 2명이 3개 이상의 흰 모자를 받아가야 하므로 이 2명에게 흰 모자를 나누어주는 방법의 수는 조건 (가)에서
$${}_2H_{3-2} + {}_2H_{4-2} + {}_2H_{5-2} + {}_2H_{6-2} = 14$$
따라서 A가 검은색 모자를 4개 받은 경우, 네 명의 학생에게 모자를 나누어주는 모든 방법의 수는
$$3 \times (10+14) + 3 \times 2 \times 14 = 156$$

(2) A가 검은색 모자를 5개 받은 경우
남은 검은색 모자의 개수는 1이고, 조건 (다)에서 B, C, D가 흰색 모자를 총 2개 이상 가져가야 합니다. ⋯ (**)
검은색 모자를 이 3명에게 나누어주는 방법의 수는
$${}_3C_1 = 3$$
조건 (다)에서 검은색 모자를 받은 학생은 흰색 모자를 받을 수 없고, (**)에서 남은 2명이 흰색 모자를 2개 이상 가져가야 하므로, 이 2명에게 흰 모자를 나누어주는 방법의 수는 조건 (가)에서
$${}_2H_{2-2} + {}_2H_{3-2} + {}_2H_{4-2} + {}_2H_{5-2} + {}_2H_{6-2} = 15$$
따라서 A가 검은색 모자를 5개 받은 경우, 네 명의 학생에게 모자를 나누어주는 모든 방법의 수는
$$3 \times 15 = 45$$

(1), (2)에서 문제에서 구하는 경우의 수는
$$156 + 45 = 201$$

정답: 201

Problem #30

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)=f(\sin^2\pi x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0<x<1$에서 함수 $g(x)$가 극대가 되는 x의 개수가 3이고, 이때 극댓값이 모두 동일하다.
>
> (나) 함수 $g(x)$의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이고 최솟값은 0이다.

$f(2)=a+b\sqrt{2}$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.) [4점]

commentary

(관련 교과 내용)
[수학I] 삼각함수
[수학II] 함수의 극대와 극소, 함수의 그래프
[미적분] 합성함수의 미분법, 함수의 그래프
(난이도) $5/5$

Solution

$$\begin{aligned}\cos2\pi x&=\cos(\pi x+\pi x)\\&=\cos^2\pi x-\sin^2\pi x\\&=1-2\sin^2\pi x\end{aligned}$$

이므로 $\sin^2\pi x=\dfrac{1-\cos2\pi x}{2}$ 입니다.

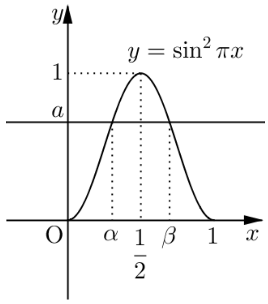
함수 $y=\cos2\pi x$의 주기는 1이므로 $y=\sin^2\pi x$의 주기 또한 1입니다.

이때 $g'(x)=f'(\sin^2\pi x)\times(\sin^2\pi x)'$
$\qquad\quad=\pi\times f'(\sin^2\pi x)\times\sin2\pi x$
이고, 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x에서 $g'(x)=0$이므로 조건 (가)에서 열린구간 $(0,1)$에서 방정식

$$f'(\sin^2\pi x)=0 \ \text{ 또는 }\ \sin2\pi x=0$$

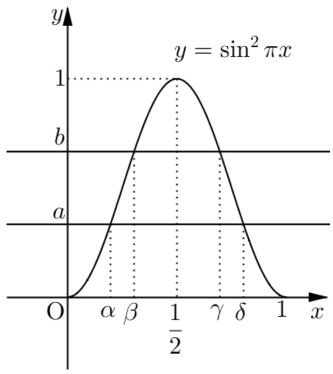
를 만족하는 x의 개수가 3 이상이어야 합니다.
$0<x<1$일 때 $\sin2\pi x=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=\frac{1}{2}$ 뿐이므로
열린구간 $(0,1)$에서 방정식 $f'(\sin^2\pi x)=0$을 만족시키는 x의 개수가 2 이상이어야 합니다.
또한, 열린구간 $(0,1)$에서 함수 $g(x)$가 극댓값을 3개 가지고, $g'(x)$는 연속함수이므로 $g(x)$가 $x=p$, $x=q$에서 극댓값을 가지는 경우 사잇값 정리에 의하여 함수 $g(x)$는 열린구간 (p,q)에서 적어도 하나의 극솟값을 가져야 합니다. ⋯ (*)
따라서 함수 $g(x)$는 열린구간 $(0,1)$에서 적어도 2개 이상의 극솟값을 가져야 합니다.
따라서 방정식 $f'(\sin^2\pi x)=0$은 열린구간 $(0,1)$에서 적어도 4개의 실근을 가집니다.

한편, $\sin^2\pi x=\dfrac{1-\cos2\pi x}{2}$ 임을 이용하여 함수 $y=\sin^2\pi x$ $(0<x<1)$의 그래프를 그리면 다음과 같습니다.



$f'(x)=0$의 한 실근을 $x=a$라 하면 $\sin^2\pi x=a$이고, 그림에서 이를 만족하는 실수 x의 개수는 1 또는 2입니다.

방정식 $f'(x)=0$은 많아야 2개의 실근만을 가지므로 방정식 $f'(\sin^2\pi x)=0$이 4개 이상의 실근을 갖는 경우는 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근 $x=a$, $x=b$ $(0<a<b<1)$를 갖는 경우뿐입니다.



그림과 같이 $\sin^2\pi x=a$의 두 실근을 α, δ라 하고 $\sin^2\pi x=b$의 두 실근을 β, γ라 하면 함수 $g(x)$는 $x=\alpha,\ \beta,\ \frac{1}{2},\ \gamma,\ \delta$에서만 극값을 가지고, (*)과 조건 (가)에 의하여
함수 $g(x)$는 $x=\alpha$, $x=\frac{1}{2}$, $x=\delta$에서 극댓값을 가지고, $x=\beta$, $x=\gamma$에서 극솟값을 가집니다.

조건 (가)에서 $g(\alpha)=g(\delta)=g\left(\frac{1}{2}\right)$이므로 $f(a)=f(1)$
$f'(a)=0$이므로 인수정리에 의하여 $f(1)=k$라 하면
$\Rightarrow\ f(x)-k=(x-a)^2(x-1),\ f(x)=(x-a)^2(x-1)+k$ ⋯ ①

이때 모든 실수 x에 대하여 $0\le\sin^2\pi x\le1$이므로
함수 $g(x)$의 치역은 함수

$$y = f(x) \ (0 \le x \le 1)$$

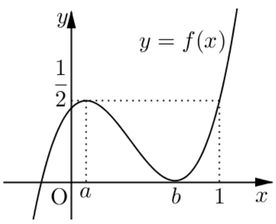
의 치역과 같습니다.

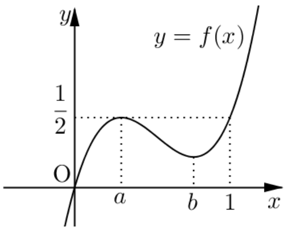
함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 가지고, $x=b$에서 극솟값을 가지므로

닫힌구간 $[0, 1]$에서 함수 $f(x)$는 $x=a$, $x=1$에서 최댓값을 가지고, $x=0$ 또는 $x=b$에서 최솟값을 가져야 합니다.

즉 $f(a)=f(1)=\dfrac{1}{2}$이므로 $k=\dfrac{1}{2}$

따라서 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음 두 가지 경우 중 하나입니다.





(i) 닫힌구간 $[0, 1]$에서 함수 $f(x)$가 $x=b$에서 최소인 경우

$f'(x)=(x-a)(3x-a-2)$이므로 $b=\dfrac{a+2}{3}$ 이고,

$f(b)=0$

$\Rightarrow f\left(\dfrac{a+2}{3}\right)=0$

$\Rightarrow \left(\dfrac{2-2a}{3}\right)^2\left(\dfrac{a-1}{3}\right)+\dfrac{1}{2}=0$

$\Rightarrow 4\times\left(\dfrac{a-1}{3}\right)^3=-\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{a-1}{3}=-\dfrac{1}{2}, \ a=-\dfrac{1}{2}$

$a>0$이어야 하므로 이는 문제의 조건을 만족하지 않습니다.

(ii) 닫힌구간 $[0, 1]$에서 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 최소인 경우

$f(0)=-a^2+\dfrac{1}{2}=0, \ a^2=\dfrac{1}{2}$

$a>0$이므로 $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \ f(x)=\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2(x-1)+\dfrac{1}{2}$

$\therefore \ f(2)=\left(2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\dfrac{1}{2}=5-2\sqrt{2}, \ a^2+b^2=29$

정답: 29

‘나’ 형

Problem #14

14. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = 2t - 6$$

이다. 점 P가 시각 $t=3$에서 $t=k(k>3)$까지 움직인 거리가 25일 때, 상수 k의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

commentary

(관련 교과 내용)
[수학II] 속도와 거리
(난이도) $2/5$

Solution

$t>3$일 때 $v(t)>0$이므로 점 P는 $t>3$에서 양의 방향으로만 움직입니다.

따라서 점 P가 시각 $t=3$에서 $t=k$까지 움직인 거리는

$$\int_3^k v(t)dt = \int_3^k (2t-6)dt$$
$$= \left[t^2 - 6t\right]_3^k = k^2 - 6k + 9$$

문제의 조건에서
$k^2 - 6k + 9 = 25 \Rightarrow (k-3)^2 = 25$
$k>3$이므로 $k=8$

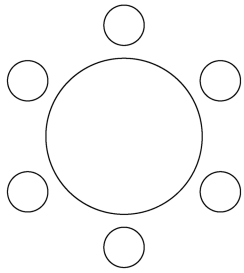
정답: ③

Problem #15

15. 세 학생 A, B, C를 포함한 6명의 학생이 있다. 이 6명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 다음 조건을 만족시키도록 모두 둘러앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

(가) A와 B는 이웃한다.
(나) B와 C는 이웃하지 않는다.

① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40



commentary

(관련 교과 내용)
[확률과 통계] 원순열
(난이도) $2/5$

Solution

조건 (가)를 만족시키도록 A, B를 앉히는 방법의 수는 A, B를 이웃하게 앉혀 한 명으로 취급하고, 나머지 4개의 동일한 자리를 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$$2! = 2$$

두 사람 A, B가 이웃하게 앉았을 때, 조건 (나)를 만족하도록 C가 앉으려면, C는 B와 이웃한 한 자리를 제외한 나머지 세 자리 중 하나에 앉으면 되고, 남은 3명은 남은 3개의 자리에 배열하면 되므로
따라서 C가 B와 이웃하지 않도록 학생들을 앉히는 방법의 수는

$$3 \times 3! = 18$$

따라서 문제의 조건을 만족시키는 모든 경우의 수는

$$2 \times 18 = 36$$

정답: ③

Problem #16

16. $0 \le x < 4\pi$일 때, 방정식

$$4\sin^2 x - 4\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - 3 = 0$$

의 모든 해의 합은? [4점]

① 5π ② 6π ③ 7π ④ 8π ⑤ 9π

commentary

(관련 교과 내용)
[수학I] 삼각함수, 삼각함수의 그래프
(난이도) $2/5$

Solution

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x$ 이므로 주어진 방정식은

$4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0$

$(2\sin x + 3)(2\sin x - 1) = 0$

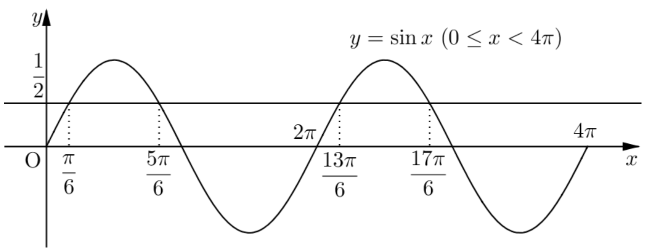
$-1 \le \sin x \le 1$이므로 $\sin x = \frac{1}{2}$

아래 그림에서 $0 \le x < 4\pi$에서 $\sin x = \frac{1}{2}$ 의 해는

$$x = \frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6},\ \frac{13\pi}{6},\ \frac{17\pi}{6}$$

이므로 주어진 방정식의 모든 해의 합은

$$\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + \frac{13\pi}{6} + \frac{17\pi}{6} = 6\pi$$



정답: ②

Problem #17

17. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{x} = 3,\quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{xg(x)} = 2$$

를 만족시킨다. 함수 $h(x) = f(x)g(x)$에 대하여 $h'(0)$의 값은? [4점]

① 27 ② 30 ③ 33 ④ 36 ⑤ 39

commentary

(관련 교과 내용)
[수학II] 미분계수의 정의, 다항함수의 미분법
(난이도) $2/5$

Solution

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{x} = 3$에서 함수의 극한의 성질에 의하여

(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$입니다. 따라서

$\lim_{x\to 0}\{f(x)+g(x)\} = f(0)+g(0) = 0$ ⋯ ①

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 미분가능한 함수이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)+g(x)-g(0)}{x} = f'(0)+g'(0) = 3 \quad \cdots ②$$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{xg(x)} = 2$에서 위와 같은 방법으로

(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$입니다. 따라서

$\lim_{x\to 0} f(x) = -3 \Rightarrow f(0) = -3$

①에서 $g(0) = 3$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{xg(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{3x} = \frac{1}{3}f'(0)$$

즉, $\frac{1}{3}f'(0) = 2$이므로 $f'(0) = 6$

②에서 $g'(0) = -3$

$$\therefore\ h'(0) = f'(0)g(0) + f(0)g'(0) = 6\times 3 + (-3)\times(-3) = 27$$

정답: ①

Problem #18

18. $\frac{1}{4}<a<1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=1$이 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_{4a}x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=-1$이 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_{4a}x$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 선분 AB를 $1:4$로 외분하는 점의 좌표는 $(0,1)$이다.

ㄴ. 사각형 ABCD가 직사각형이면 $a=\frac{1}{2}$이다.

ㄷ. $\overline{\mathrm{AB}}<\overline{\mathrm{CD}}$이면 $\frac{1}{2}<a<1$이다.

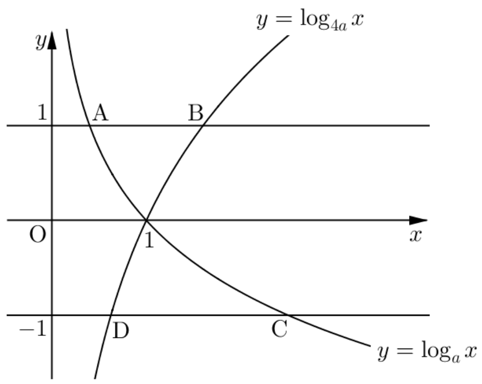
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

commentary

(관련 교과 내용)
[수학I] 로그함수
(난이도) $3/5$

Solution

$a<1$이고, $4a>1$이므로 문제의 상황을 그림으로 나타내면 다음과 같습니다.



ㄱ) 두 점 A, B의 좌표는 각각 $(a,1)$, $(4a,1)$이므로
선분 AB를 $1:4$로 외분하는 점의 좌표는
$\left(\frac{1\times 4a-4\times a}{1-4},1\right)=(0,1)$입니다. (참)

ㄴ) 두 직선 AB와 CD는 평행하고,
두 점 C, D의 좌표는 각각 $\left(\frac{1}{a},-1\right)$, $\left(\frac{1}{4a},-1\right)$이므로
두 선분 사각형 ABCD가 직사각형이면
두 점 A, D의 x좌표가 같고, 두 점 B, C의 x좌표가 같아야 합니다. 따라서

$a=\frac{1}{4a}$, $4a=\frac{1}{a}$ $\Rightarrow$ $a^2=\frac{1}{4}$

$a>0$이므로 $a=\frac{1}{2}$입니다. (참)

ㄷ) ㄱ, ㄴ에서

$\overline{\mathrm{AB}}=4a-a=3a$, $\overline{\mathrm{CD}}=\frac{1}{a}-\frac{1}{4a}=\frac{3}{4a}$

이고 $a>0$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}<\overline{\mathrm{CD}} \Leftrightarrow 3a<\frac{3}{4a}$, $a^2<\frac{1}{4}$

$a>\frac{1}{4}$이므로 $\therefore\ \frac{1}{4}<a<\frac{1}{2}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ입니다.

정답: ③

Problem #19

19. 확률변수 X는 평균이 8, 표준편차가 3인 정규분포를 따르고, 확률변수 Y는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다. 두 확률변수 X, Y가

$$\mathrm{P}(4 \le X \le 8) + \mathrm{P}(Y \ge 8) = \frac{1}{2}$$

을 만족시킬 때, $\mathrm{P}\left(Y \le 8 + \frac{2\sigma}{3}\right)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.8351 ② 0.8413 ③ 0.9332
④ 0.9772 ⑤ 0.9938

commentary

(관련 교과 내용)
[확률과 통계] 정규분포
(난이도) $3/5$

Solution

주어진 식을 표준화하여 나타내면

$\mathrm{P}(4 \le X \le 8) + \mathrm{P}(Y \ge 8)$

$= \mathrm{P}\left(\frac{4-8}{3} \le Z \le \frac{8-8}{3}\right) + \mathrm{P}\left(Z \ge \frac{8-m}{\sigma}\right)$

$= \mathrm{P}\left(-\frac{4}{3} \le Z \le 0\right) + \mathrm{P}\left(Z \ge \frac{8-m}{\sigma}\right)$

$= \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{4}{3}\right) + \mathrm{P}\left(Z \ge \frac{8-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(Z \ge 0) = \frac{1}{2}$ 이므로 $\frac{8-m}{\sigma} = \frac{4}{3}$ 입니다.

$\therefore\ \sigma = 6 - \frac{3}{4}m$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(Y \le 8 + \frac{2\sigma}{3}\right)$

$= \mathrm{P}\left(Y \le 8 + \frac{2}{3}\left(6 - \frac{3}{4}m\right)\right)$

$= \mathrm{P}\left(Y \le 12 - \frac{1}{2}m\right)$

$= \mathrm{P}\left(Z \le \frac{12 - \frac{3}{2}m}{6 - \frac{3}{4}m}\right)$

$= \mathrm{P}(Z \le 2)$

$= \frac{1}{2} + \mathrm{P}(0 \le Z \le 2) = 0.9772$

정답: ④

Problem #20

20. 실수 $a\,(a>1)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(x+1)(x-1)(x-a)$$

라 하자. 함수

$$g(x)=x^2\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x t^2 f(t)\,dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a의 최댓값은? [4점]

① $\frac{9\sqrt{2}}{8}$ ② $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

commentary

(관련 교과 내용)
[수학II] 함수의 그래프, 정적분
(난이도) $4/5$

Solution

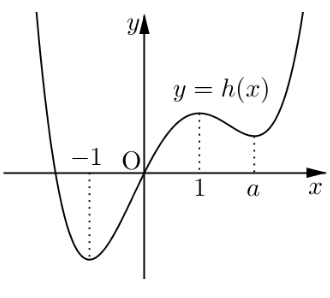
적분과 미분의 관계에 의하여

$$g'(x)=2x\int_0^x f(t)dt+x^2f(x)-x^2f(x)=2x\int_0^x f(t)dt$$

함수 $g(x)$가 오직 하나의 극값을 가지려면
$g'(x)$의 부호가 단 한 번만 바뀌어야 합니다.

$h(x)=\int_0^x f(t)dt$라 하면
$h'(x)=f(x)=(x+1)(x-1)(x-a)$이므로
함수 $h(x)$는 $x=-1,\ x=a$에서 극솟값을 갖고, $x=1$에서 극댓값을 갖습니다.

또한 $h(0)=0$이므로 이를 이용하여 함수 $h(x)$의 개형을 그리면 다음과 같습니다.



위 그림에서 방정식 $h(x)=0$은 $x<-1$에서 반드시 한 개의 실근만을 가지고, 이 실근을 $x=\alpha$라 하면
$x=\alpha$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 변하므로 함수 $g(x)$는 $x=\alpha$에서 극값을 가집니다.

또한 $h(0)=0$에서 다항식 $g'(x)=2x\,h(x)$는 x^2을 인수로 가지므로 $x=0$의 좌우에서는 $g'(x)$의 부호가 바뀌지 않습니다.

따라서 $g'(x)$의 값의 부호가 $x=\alpha$ 외의 점에서 바뀌지 않으려면 위의 그림과 같이 $h(a)\ge 0$이어야 합니다.
이때

$$\begin{aligned}h(a)&=\int_0^a f(x)dx\\&=\int_0^a (x^3-ax^2-x+a)dx\\&=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}ax^3-\frac{1}{2}x^2+ax\right]_0^a\\&=-\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{2}a^2\\&=\frac{1}{12}a^2(-a^2+6)\end{aligned}$$

이고, $a^2\ge 0$이므로
$h(a)\ge 0 \iff -a^2+6\ge 0,\ a^2\le 6$
$a>1$이므로 문제의 조건을 만족시키는 a의 값의 범위는
$1<a\le\sqrt{6}$이고, a의 최댓값은 $\sqrt{6}$입니다.

정답: ④

Problem #21

21. 수열 $\{a_n\}$은 $0 < a_1 < 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n} = a_2 \times a_n + 1$

(나) $a_{2n+1} = a_2 \times a_n - 2$

$a_7 = 2$일 때, a_{25}의 값은? [4점]

① 78 ② 80 ③ 82 ④ 84 ⑤ 86

commentary

(관련 교과 내용)
[수학I] 수열의 귀납적 정의
(난이도) $4/5$

Solution

문제의 조건 (가)의 양변에 $n=1$을 대입하면

$a_2 = a_2 \times a_1 + 1 \Rightarrow a_1 = 1 - \dfrac{1}{a_2}$ ⋯ (@)

문제의 조건 (가), (나)에서

$a_7 = a_2 \times a_3 - 2$

$a_3 = a_2 \times a_1 - 2$

이므로

$$\begin{aligned} a_7 &= a_2(a_2 \times a_1 - 2) - 2 \\ &= {a_2}^2 \times a_1 - 2a_2 - 2 \\ &= {a_2}^2\left(1 - \frac{1}{a_2}\right) - 2a_2 - 2 \quad (\because (@)) \\ &= {a_2}^2 - 3a_2 - 2 \end{aligned}$$

${a_2}^2 - 3a_2 - 2 = 2$에서

${a_2}^2 - 3a_2 - 4 = 0$, $(a_2 - 4)(a_2 + 1) = 0$

따라서 $a_2 = -1$ 또는 $a_2 = 4$

(@)에서

$a_2 = -1$이면 $a_1 = 1 - \dfrac{1}{a_2} = 2$

$a_2 = 4$이면 $a_1 = 1 - \dfrac{1}{a_2} = \dfrac{3}{4}$

문제의 조건에서 $0 < a_1 < 1$이므로 $a_1 = \dfrac{3}{4}$, $a_2 = 4$입니다.

$$\begin{aligned} \therefore\ a_{25} &= a_2 \times a_{12} - 2 = 4a_{12} - 2 \\ &= 4(a_2 \times a_6 + 1) - 2 = 16a_6 + 2 \\ &= 16(a_2 \times a_3 + 1) + 2 = 64a_3 + 18 \\ &= 64(a_2 \times a_1 - 2) + 18 \\ &= 64 \times (3 - 2) + 18 = 82 \end{aligned}$$

정답: ③

Problem #26

26. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -3x+a & (x \le 1) \\ \dfrac{x+b}{\sqrt{x+3}-2} & (x>1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 상수이다.) [4점]

commentary

(관련 교과 내용)
[수학II] 함수의 연속
(난이도) $1/5$

Solution

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속입니다.

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} \frac{x+b}{\sqrt{x+3}-2}$$

이고,

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = f(1) = -3+a$$

이므로 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to 1+} \frac{x+b}{\sqrt{x+3}-2} = -3+a$$

위 등식의 좌변에서 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.
따라서

$$\lim_{x\to 1+}(x+b) = b+1 = 0,\ b=-1$$

이고,

$$\lim_{x\to 1+} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} = \lim_{x\to 1+} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1} = \lim_{x\to 1+}(\sqrt{x+3}+2) = 4$$

이므로 $-3+a=4 \Rightarrow a=7$

$\therefore\ a+b=7-1=6$

정답: 6

Problem #27

27. 곡선 $y=x^2-7x+10$과 직선 $y=-x+10$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [4점]

commentary

(관련 교과 내용)
[수학II] 정적분의 활용(넓이)
(난이도) $2/5$

Solution

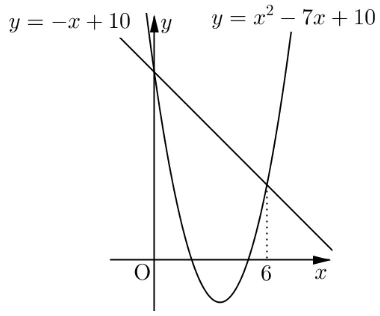
곡선 $y=x^2-7x+10$과 직선 $y=-x+10$의 교점을 구하면

$x^2-7x+10=-x+10$

$\Rightarrow\ x^2-6x=0$

$\Rightarrow\ x=0$ 또는 $x=6$

따라서 두 함수의 그래프는 $x=0$과 $x=6$에서 만나고, 아래 그림에서 $0<x<6$일 때 $x^2-7x+10<-x+10$
이므로



구하는 넓이는

$$\int_0^6 \{(-x+10)-(x^2-7x+10)\}dx$$

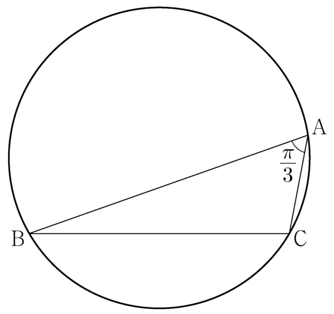
$$=\int_0^6 (-x^2+6x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2\right]_0^6 = 108-72=36$$

정답: 36

Problem #28

28. $\angle A = \frac{\pi}{3}$ 이고 $\overline{AB} : \overline{AC} = 3:1$ 인 삼각형 ABC가 있다.
삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7일 때,
선분 AC의 길이를 k라 하자. k^2의 값을 구하시오. [4점]



commentary

(관련 교과 내용)
[수학Ⅰ] 사인법칙과 코사인법칙
(난이도) $2/5$

Solution

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7이므로
사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin A} = 14 \;\Rightarrow\; \overline{BC} = 14\sin\frac{\pi}{3} = 7\sqrt{3}$$

문제의 조건에서 $\overline{AC} = k$, $\overline{AB} = 3k$이므로
코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow\; 147 = 9k^2 + k^2 - 6k^2\times\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\; 7k^2 = 147 \qquad \therefore\; k^2 = 21$$

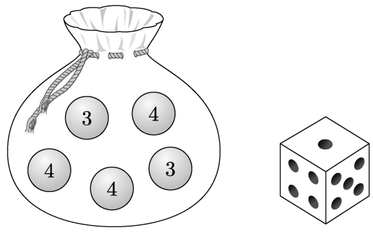
정답: 21

Problem #29

29. 숫자 3, 3, 4, 4, 4가 하나씩 적힌 5개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 규칙에 따라 점수를 얻는 시행을 한다.

> 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어
> 꺼낸 공에 적힌 수가 3이면 주사위를 3번 던져서 나오는 세 눈의 수의 합을 점수로 하고,
> 꺼낸 공에 적힌 수가 4이면 주사위를 4번 던져서 나오는 네 눈의 수의 합을 점수로 한다.

이 시행을 한 번 하여 얻은 점수가 10점일 확률은 $\frac{q}{p}$이다.
$p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



commentary

(관련 교과 내용)
[확률과 통계] 독립시행의 확률, 확률의 곱셈정리
(난이도) $3/5$

Solution

꺼낸 공에 적힌 숫자에 따라 다음과 같이 두 가지 경우로 나누어 생각합니다.

(1) 꺼낸 공에 적힌 수가 3인 경우

꺼낸 공에 적힌 수가 3일 확률은 $\frac{2}{5}$ ··· ①

이 경우 주사위를 3번 던지는 시행을 하고, 주사위를 3번 던져서 나오는 세 눈의 수의 합이 10인 경우와 각 경우가 발생할 확률은 다음과 같습니다.

세 눈의 수의 순서쌍을 (a, b, c) $(a<b<c)$라 하면

- $(1, 3, 6)$, $(1, 4, 5)$, $(2, 3, 5)$: $3!\times\left(\frac{1}{6}\right)^3$
- $(2, 2, 6)$, $(2, 4, 4)$, $(3, 3, 4)$: $\frac{3!}{2!}\times\left(\frac{1}{6}\right)^3$

따라서 주사위를 3번 던져 나온 눈의 수의 합이 10일 확률은

$$\left(3\times 3!+3\times \frac{3!}{2!}\right)\times \left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{8} \quad \cdots ②$$

①, ②에서 꺼낸 공에 적힌 수가 3인 경우 시행을 하여 얻은 점수가 10점일 확률은

$$\frac{2}{5}\times \frac{1}{8}=\frac{1}{20}$$

(2) 꺼낸 공에 적힌 수가 4인 경우

꺼낸 공에 적힌 수가 4일 확률은 $\frac{3}{5}$ ··· ③

이 경우 주사위를 4번 던지는 시행을 하고, 주사위를 4번 던져서 나오는 세 눈의 수의 합이 10인 경우와 각 경우가 발생할 확률은 다음과 같습니다.

네 눈의 수의 순서쌍을 (a, b, c, d) $(a<b<c<d)$라 하면

- $(1, 2, 3, 4)$: $4!\times\left(\frac{1}{6}\right)^4$
- $(1, 1, 2, 6)$, $(1, 1, 3, 5)$, $(1, 2, 2, 5)$: $\frac{4!}{2!}\times\left(\frac{1}{6}\right)^4$
- $(1, 1, 4, 4)$, $(2, 2, 3, 3)$: $\frac{4!}{2!2!}\times\left(\frac{1}{6}\right)^4$
- $(1, 3, 3, 3)$, $(2, 2, 2, 4)$: $\frac{4!}{3!}\times\left(\frac{1}{6}\right)^4$

따라서 주사위를 4번 던져 나온 눈의 수의 합이 10일 확률은

$$\left(4!+\frac{4!}{2!}\times 3+\frac{4!}{2!2!}\times 2+\frac{4!}{3!}\times 2\right)\times\left(\frac{1}{6}\right)^4=\frac{5}{81} \quad \cdots ④$$

③, ④에서 꺼낸 공에 적힌 수가 4인 경우 시행을 하여 얻은 점수가 10점일 확률은

$$\frac{3}{5}\times\frac{5}{81}=\frac{1}{27}$$

(1), (2)에서 문제에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{20}+\frac{1}{27}=\frac{47}{540}$$

$\therefore\ p+q=540+47=587$

정답: 587

Problem #30

30. 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 함수 $g(x)$는 일차함수이다. 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases} |f(x)-g(x)| & (x<1) \\ f(x)+g(x) & (x\geq 1)\end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, $h(0)=0$, $h(2)=5$일 때, $h(4)$의 값을 구하시오. [4점]

commentary

(관련 교과 내용)
[수학II] 미분가능과 연속
(난이도) $4/5$

Solution

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $p(x)$에 대하여 함수 $|p(x)|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 필요충분조건은 $p(a)=0$이고 $p'(a)\neq 0$인 것입니다. 이는

$$|p(x)|=\begin{cases} p(x) & (p(x)\geq 0) \\ -p(x) & (p(x)<0)\end{cases}$$

으로부터 어렵지 않게 얻어낼 수 있습니다.

$h(0)=|f(0)-g(0)|=0$이고, 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=0$에서도 미분가능해야 합니다.
따라서 $h'(0)=0 \Rightarrow f'(0)-g'(0)=0$

따라서 삼차식 $f(x)-g(x)$은 x^2을 인수로 가지므로

$$f(x)-g(x)=x^2(x-\alpha) \quad (\alpha\text{는 실수})$$

와 같이 표현할 수 있습니다. ··· ①

또한 함수 $h(x)$가 $x=1$에서 미분가능하려면

$$\lim_{x\to 1-}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{h(x)-h(1)}{x-1} \quad \cdots ②$$

이고, 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 1+}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=f'(1)+g'(1)$$

따라서 충분히 작은 양수 ϵ에 대하여
$1-\epsilon<x<1$일 때

$h(x)=|f(x)-g(x)|=f(x)-g(x)$ 인 경우

$$\lim_{x\to 1-}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=f'(1)-g'(1)$$

이고, ②에서 $f'(1)+g'(1)=f'(1)-g'(1) \Rightarrow g'(1)=0$

이 경우 $g(x)$가 일차함수라는 것에 모순입니다.

따라서 $1-\epsilon<x<1$일 때
$h(x)=|f(x)-g(x)|=g(x)-f(x)$ 이고,
$x=1$ 에서 함수 $h(x)$가 연속이므로
$\lim_{x\to1-}h(x)=\lim_{x\to1-}\{g(x)-f(x)\}=g(1)-f(1)$
$\lim_{x\to1+}h(x)=h(1)=f(1)+g(1)$
에서 $g(1)-f(1)=f(1)+g(1) \Rightarrow f(1)=0$

또한,
$\lim_{x\to1-}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=g'(1)-f'(1)$
이므로 ②에서 $f'(1)+g'(1)=g'(1)-f'(1) \Rightarrow f'(1)=0$

①에서 $f(x)=x^2(x-\alpha)+g(x)$ 이므로
$g(x)=mx+n$ 이라 하면
$f'(x)=2x(x-\alpha)+x^2+g'(x)=3x^2-2\alpha x+m$
이고,
$f(1)=1-\alpha+m+n=0 \Rightarrow m+n-\alpha=-1$
$f'(1)=3-2\alpha+m=0 \Rightarrow m-2\alpha=-3$
$h(2)=f(2)+g(2)$
$\quad=4(2-\alpha)+2g(2)$
$\quad=8-4\alpha+4m+2n=5 \Rightarrow 4m+2n-4\alpha=-3$
위의 세 방정식을 연립하여 풀면
$m=2,\ n=-\frac{1}{2},\ \alpha=\frac{5}{2}$
$\therefore\ h(4)=f(4)+g(4)$
$\quad=16(4-\alpha)+2g(4)$
$\quad=24+2\left(4\times2-\frac{1}{2}\right)=39$

정답: 39