제 2 교시

수학 영역

MENTOR

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{x-2}$ 의 값은?

[2021학년도 대학수학능력시험 수학 나형 3번]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cancel{(x-2)}(x+4)}{\cancel{x-2}} = 6$

2. 함수 $f(x)=x^4+3x-2$에 대하여 $f'(2)$의 값은?

[2021학년도 대학수학능력시험 수학 나형 6번]

① 35 ② 37 ③ 39 ④ 41 ⑤ 43

$f'(x) = 4x^3+3$

$\therefore f'(2) = 35$

3. 곡선 $y=x^3-3x^2+2x+2$ 위의 점 A$(0,\ 2)$에서의 접선과 수직이고 점 A를 지나는 직선의 x절편은?

[2021학년도 대학수학능력시험 수학 나형 9번]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

$f(x) = x^3-3x^2+2x+2$

$f'(x) = 3x^2-6x+2$, $f'(0)=2$

$\therefore y = -\frac{1}{2}x+2$

$\Rightarrow$ x절편 : $(4, 0)$

4. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$v(t)=2t-6$

이다. 점 P가 시각 $t=3$에서 $t=k\ (k>3)$까지 움직인 거리가 25일 때, 상수 k의 값은?

[2021학년도 대학수학능력시험 수학 나형 14번]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$\int_3^k |2t-6|\,dt = \int_3^k (2t-6)\,dt$

$= \left[t^2-6t\right]_3^k$

$= k^2-6k-9+18$

$= k^2-6k+9 = 25$

$\therefore k^2-6k-16=0$, $(k+2)(k-8)=0$

$\therefore k=8$

5. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)+g(x)}{x}=3,\quad \lim_{x\to0}\frac{f(x)+3}{xg(x)}=2$$

를 만족시킨다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여 $h'(0)$의 값은?

[2021학년도 대학수학능력시험 수학 나형 17번]

① 27 ② 30 ③ 33 ④ 36 ⑤ 39

① $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)+g(x)}{x}=3$

i) $f(0)+g(0)=0$

ii) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(x)-f(0)}{x-0}+\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right\}$

$=f'(0)+g'(0)=3$

② $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)+3}{xg(x)}=2$

i) $\boxed{f(0)=-3,\ g(0)=3}$

ii) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\times\frac{1}{g(x)}\right\}$

$=f'(0)\times\dfrac{1}{g(0)}=\dfrac{f'(0)}{3}=2$

$\therefore\ \boxed{f'(0)=6,\ g'(0)=-3}$

③ $h'(0)=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)$

$=18+9=27$

6. 실수 $a\ (a>1)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(x+1)(x-1)(x-a)$$

라 하자. 함수

$$g(x)=x^2\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t^2f(t)dt$$

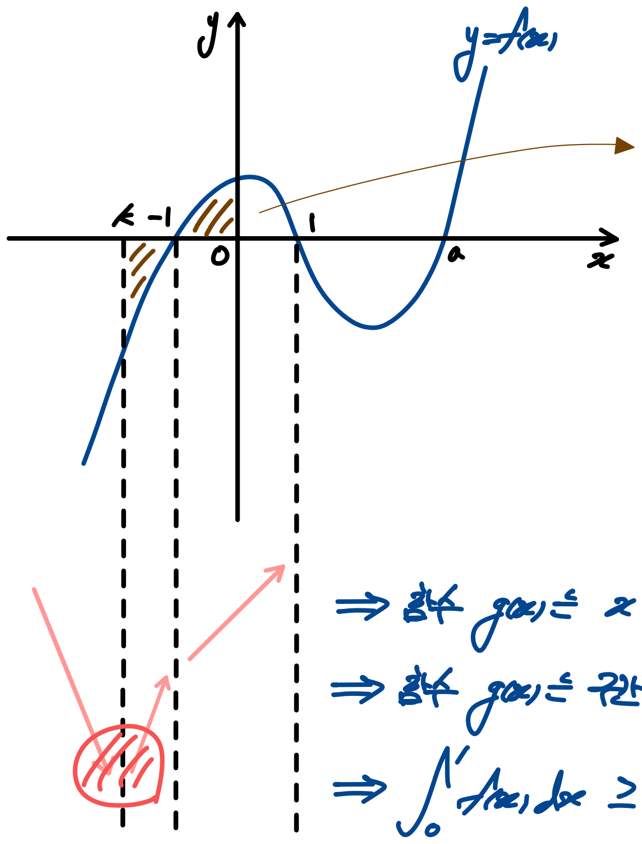
가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a의 최댓값은?

[2021학년도 대학수학능력시험 수학 나형 20번]

① $\dfrac{9\sqrt2}{8}$ ② $\dfrac{3\sqrt6}{4}$ ③ $\dfrac{3\sqrt2}{2}$ ④ $\sqrt6$ ⑤ $2\sqrt2$

$g'(x)=2x\int_0^x f(t)dt+\cancel{x^2f(x)}-\cancel{x^2f(x)}$

$=2x\times\int_0^x f(t)dt$



$k<-1$인 상수 k에 대하여 $\int_k^0 f(x)dx=0$을 만족시킴.

$\Rightarrow$ 함수 $g(x)$는 $x=k$에서 극솟값을 가짐.

$\Rightarrow$ 함수 $g(x)$는 구간 $(1,\infty)$에서 계속 증가해야 함.

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx \ge -\int_1^a f(x)dx$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx+\int_1^a f(x)dx\ge0$

$\Rightarrow \boxed{\int_0^a f(x)dx\ge0}$

$f(x)=x^3-ax^2-x+a$

$\therefore \left[\frac14x^4-\frac a3x^3-\frac12x^2+ax\right]_0^a\ge0$

$\Rightarrow \frac14a^4-\frac13a^4-\frac12a^2+a^2\ge0$

$\Rightarrow a^2\le6\quad \therefore$ 실수 a의 최댓값 : $\sqrt6$

7. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2+4x+5$이고 $f(0)=4$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

[2021학년도 대학수학능력시험 수학 나형 23번]

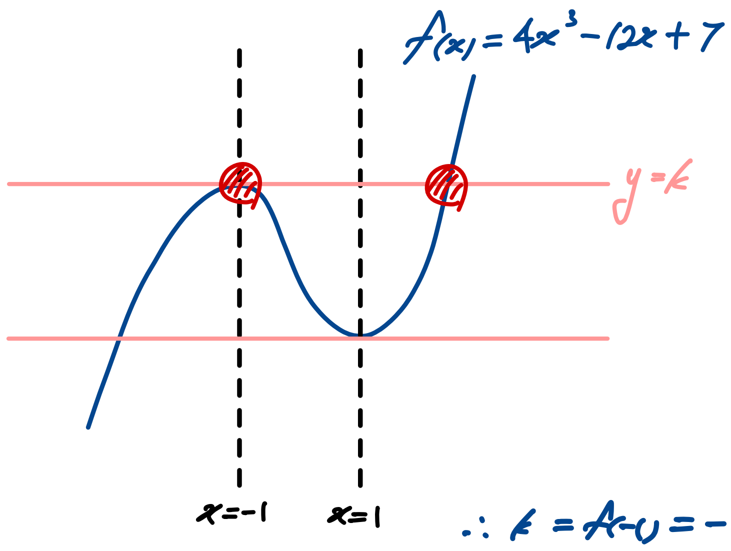
$f(x) = x^3+2x^2+5x+4$

$\therefore f(1) = 1+2+5+4 = 12$

8. 곡선 $y=\underbrace{4x^3-12x+7}_{=f(x)}$과 직선 $y=k$가 만나는 점의 개수가 2가 되도록 하는 양수 k의 값을 구하시오.

[2021학년도 대학수학능력시험 수학 나형 25번]

$f'(x) = 12x^2-12 = 12(x+1)(x-1)$



$\therefore k = f(-1) = -4+12+7 = 15$

9. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -3x+a & (x \le 1) \\ \dfrac{x+b}{\sqrt{x+3}-2} & (x > 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 상수이다.)

[2021학년도 대학수학능력시험 수학 나형 26번]

$\lim_{x\to1-} f(x) = \lim_{x\to1+} f(x) = f(1)$

$\lim_{x\to1-} f(x) = a-3$

$\lim_{x\to1+} \dfrac{x+b}{\sqrt{x+3}-2} = \lim_{x\to1+} \dfrac{(x+b)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}$

$\therefore b=-1$, $\lim_{x\to1+} f(x) = \lim_{x\to1+} (\sqrt{x+3}+2) = 4$

$\Rightarrow a-3=4$, $a=7$

$\therefore a+b = 7-1 = 6$

10. 곡선 $y=x^2-7x+10$과 직선 $y=-x+10$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

[2021학년도 대학수학능력시험 수학 나형 27번]

$x^2-7x+10 = -x+10$

$\Rightarrow x^2-6x=0$

$\Rightarrow x(x-6)=0$

$\therefore \left|\dfrac{1}{6}(6-0)^3\right| = 36$

11. 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 함수 $g(x)$는 일차함수이다. 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases} |f(x)-g(x)| & (x<1) \\ f(x)+g(x) & (x \ge 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, $h(0)=0$, $h(2)=5$일 때, $h(4)$의 값을 구하시오.

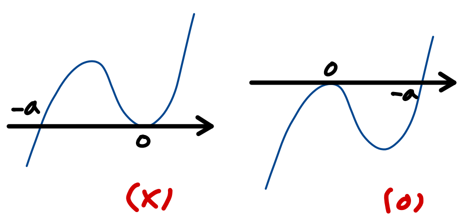
[2021학년도 대학수학능력시험 수학 나형 30번]

① $h(0)=0$: $|f(0)-g(0)|=0$, $\boxed{f(0)=g(0)}$

⇒ $x=0$에서 함수 $|f(x)-g(x)|$가 미분가능해야 하므로 $\boxed{f'(0)=g'(0)}$이어야 함.

$$\therefore \begin{cases} f(x)=x^3+ax^2+bx+c \\ g(x)=bx+c \end{cases}$$

⇒ $|f(x)-g(x)|=|x^2(x+a)|$



$\therefore -a \ge 1$, $\boxed{a \le -1}$

② $h(2)=5$: $f(2)+g(2)=8+4a+2b+c+2b+c=5$

ⓐ ⇒ $\boxed{4a+4b+2c=-3}$

③ 연속 : $|f(1)-g(1)|=f(1)+g(1)$

⇒ $|1+a|=-a-1$ $\quad \because a\le -1$

$=1+a+b+c+b+c$

ⓑ ⇒ $\boxed{2a+2b+2c=-2}$

④ $x=1$ 에서의 미분계수

$\lim_{x\to1-} h'(x) = -\lim_{x\to1-}(3x^2+2ax) = -2a-3$

$\lim_{x\to1+} h'(x) = \lim_{x\to1+}(3x^2+2ax+2b) = 2a+2b+3$

$\therefore -2a-3=2a+2b+3$

ⓒ ⇒ $\boxed{4a+2b=-6}$

세 식 ⓐ, ⓑ, ⓒ를 연립하면 $a=-\frac{5}{2}$, $b=2$, $c=-\frac{1}{2}$ 이므로

$f(x)+g(x)=x^3-\frac{5}{2}x^2+4x-1$ 임.

$\therefore h(4)=f(4)+g(4)=64-40+16-1=39$