제 2 교시

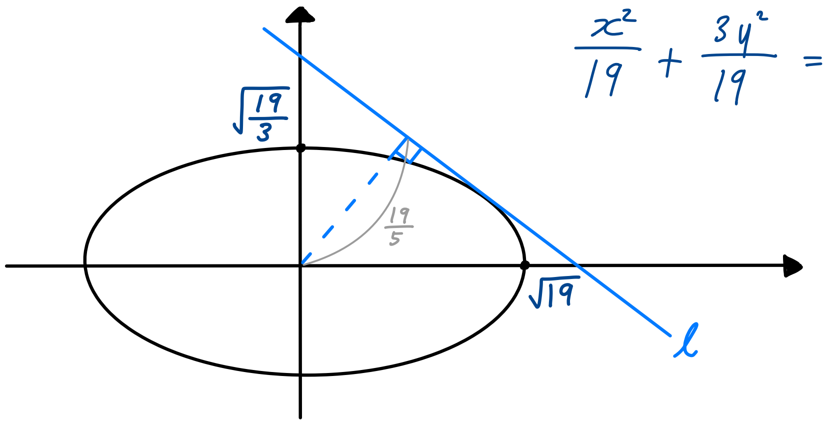
수학 영역

MENTOR

1. 좌표평면에서 타원 $x^2+3y^2=19$와 직선 l은 제1사분면 위의 한 점에서 접하고, 원점과 직선 l 사이의 거리는 $\frac{19}{5}$이다. 직선 l의 기울기는?

[2022학년도 예시문항 수학 기하 26번]

① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{5}{6}$ ③ -1 ④ $-\frac{7}{6}$ ⑤ $-\frac{4}{3}$



$\frac{x^2}{19}+\frac{3y^2}{19}=1$

기울기가 주어진 타원의 접선의 방정식

↳ $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right)$

제1사분면 위의 점에서의 접선

⟹ y절편 양수

$l:\ y=mx+\sqrt{19m^2+\frac{19}{3}}$

$\Longrightarrow\ mx-y+\sqrt{19m^2+\frac{19}{3}}=0$

점과 직선 사이의 거리 공식 (원점과 직선 l 사이의 거리)

$$\frac{\sqrt{19m^2+\frac{19}{3}}}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{19}{5}$$

$\Longrightarrow\ 25\left(m^2+\frac{1}{3}\right)=19(m^2+1)$

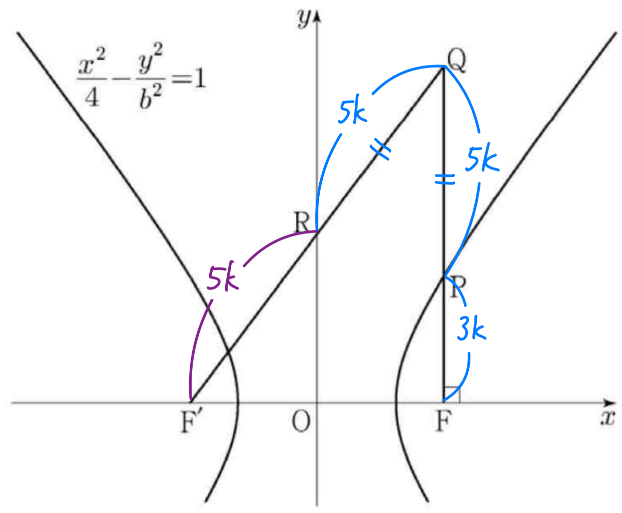
$\Longrightarrow\ 6m^2=\frac{32}{3}$

제1사분면 위의 점에서의 접선의 기울기 <0

$\therefore\ m=-\frac{4}{3}$ $(\because m<0)$

2. 그림과 같이 두 점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c>0)$을 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1$이 있다. 점 F를 지나고 x축에 수직인 직선이 쌍곡선과 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하고, 직선 PF 위에 $\overline{\mathrm{QP}}:\overline{\mathrm{PF}}=5:3$이 되도록 점 Q를 잡는다. 직선 F′Q가 y축과 만나는 점을 R라 할 때, $\overline{\mathrm{QP}}=\overline{\mathrm{QR}}$이다. b^2의 값은? (단, b는 상수이고, 점 Q는 제1사분면 위의 점이다.)

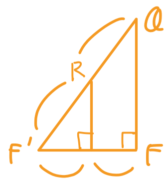
[2022학년도 예시문항 수학 기하 27번]

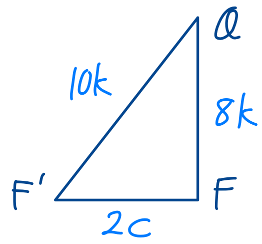


① $\frac{1}{2}+2\sqrt{5}$ ② $1+2\sqrt{5}$ ③ $\frac{1}{2}+2\sqrt{5}$ ④ $2+2\sqrt{5}$ ⑤ $\frac{5}{2}+2\sqrt{5}$

$\overline{\mathrm{F'O}}:\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{F'R}}:\overline{\mathrm{RQ}}=1:1$

$\Rightarrow\ \overline{\mathrm{F'R}}=5k$





$6:8:10=2c:8k:10k$

$c=3k$

$\mathrm{P}(c,\ 3k)\ \Rightarrow\ \mathrm{P}(c,\ c)$

$\Rightarrow\ \frac{c^2}{4}-\frac{c^2}{b^2}=1$

$\oplus\ 4+b^2=c^2$

$\frac{4+b^2}{4}-\frac{4+b^2}{b^2}=1$

$\Longrightarrow\ b^4-4b^2-16=0$

$\therefore\ b^2=2+2\sqrt{5}$

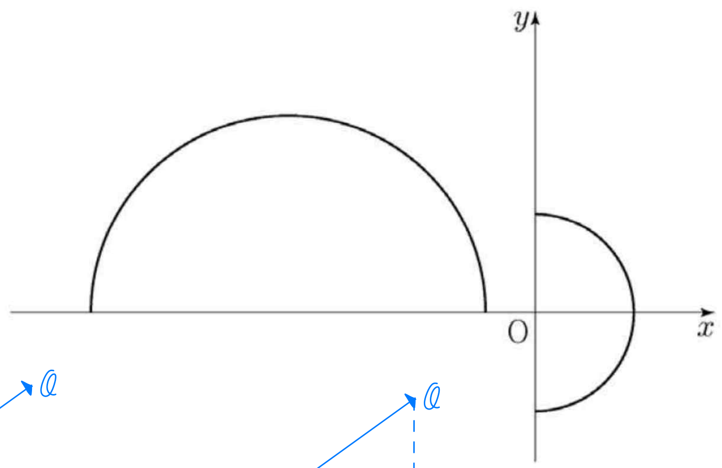
3. 좌표평면에서 반원의 호 $x^2+y^2=4\ (x \geq 0)$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대하여

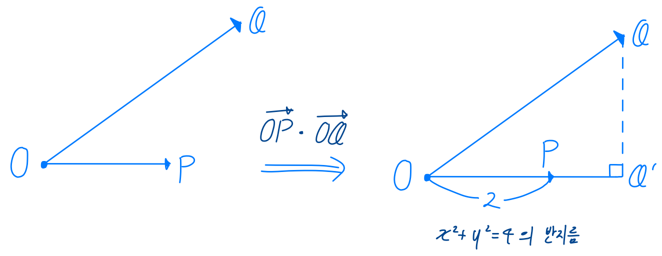
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 2$$

를 만족시키는 반원의 호 $(x+5)^2+y^2=16\ (y \geq 0)$ 위의 점 Q가 하나뿐일 때, $a+b$의 값은? (단, O는 원점이다.)

[2022학년도 예시문항 수학 기하 28번]

① $\frac{12}{5}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{13}{5}$ ④ $\frac{27}{10}$ ⑤ $\frac{14}{5}$



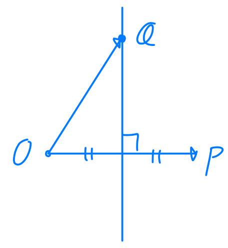


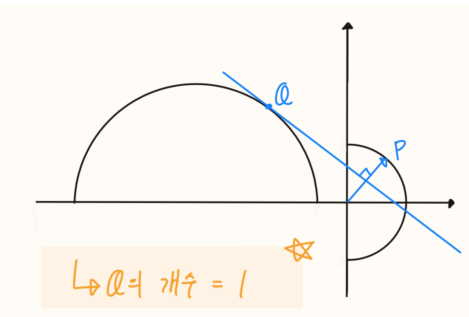
$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ} = \overline{OP}\times\overline{OQ}\cos\theta = \overline{OP}\times\overline{OQ'}$

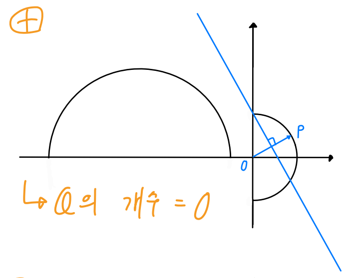
$2 \times 1 = 2$

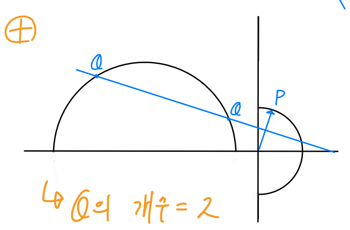
$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=2$이기 위한 $\overline{OQ'}$의 값 $=1$

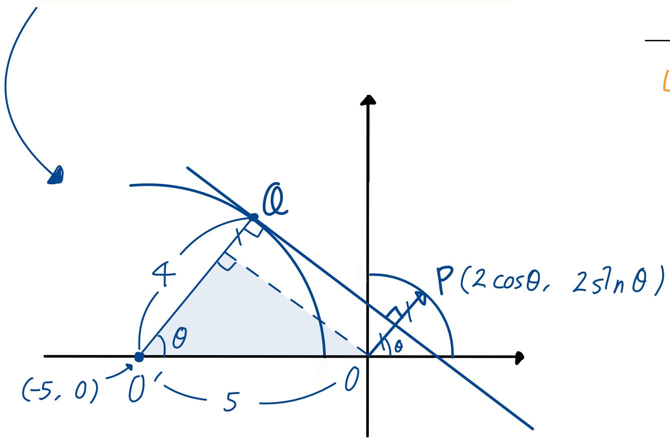
⇒ Q는 선분 OP의 수직 이등분선 위의 한 점



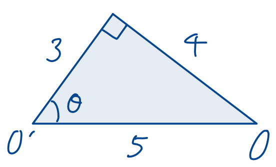








$P(2\cos\theta,\ 2\sin\theta) = P(a,\ b)$



$\cos\theta = \frac{3}{5}$

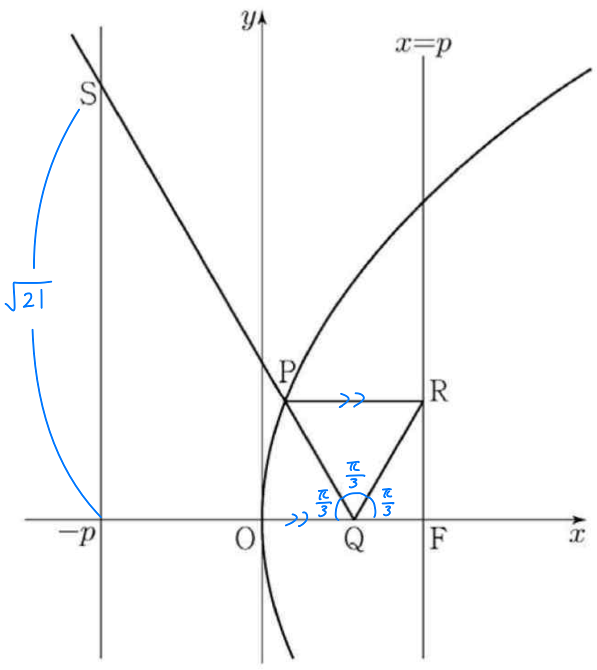
$\sin\theta = \frac{4}{5}$

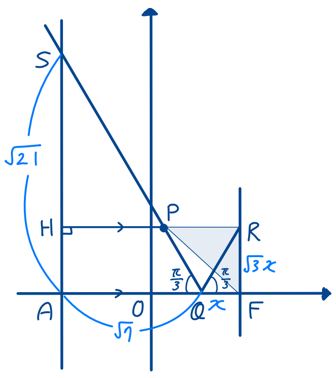
$P\left(\frac{6}{5},\ \frac{8}{5}\right)$

$\therefore\ a+b = \frac{14}{5}$

4. 그림과 같이 꼭짓점이 원점 O이고 초점이 $\mathrm{F}(p,\ 0)\ (p>0)$인 포물선이 있다. 포물선 위의 점 P, x축 위의 점 Q, 직선 $x=p$ 위의 점 R에 대하여 삼각형 PQR는 정삼각형이고 직선 PR는 x축과 평행하다. 직선 PQ가 점 $\mathrm{S}(-p,\ \sqrt{21})$을 지날 때, $\overline{\mathrm{QF}} = \frac{a+b\sqrt{7}}{6}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 정수이고, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.)

[2022학년도 예시문항 수학 기하 29번]



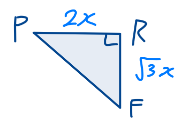


$(\overline{QF}=x)$

$\frac{\pi}{3}$ 특수각

$\overline{SA} : \overline{AQ} = \sqrt{3} : 1 = \sqrt{21} : \sqrt{7}$

$\Rightarrow \overline{AQ} = \sqrt{7}$



$\overline{PF} = \sqrt{7}x$

$= \overline{PH}$

$\overline{PH} = \overline{PF}$ (포물선의 정의)

$\Rightarrow \overline{PH} = \sqrt{7}x$

• $\overline{PH} = \overline{HR} - \overline{PR}$

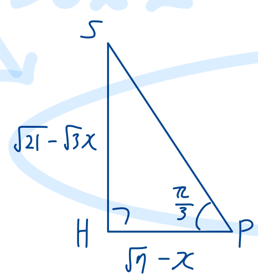
$= \overline{AF} - \overline{PR} = (\sqrt{7}+x) - 2x = \sqrt{7} - x$

$\Rightarrow \overline{PH} = \sqrt{7}x = \sqrt{7} - x$

$\therefore\ \overline{QF} = x = \dfrac{7-\sqrt{7}}{6}$

$a+b = 6$

Sol 2

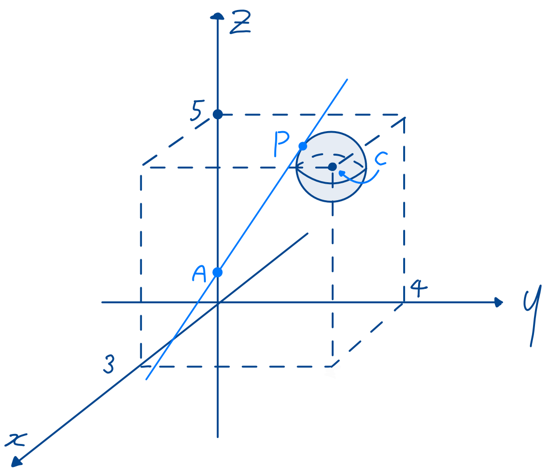


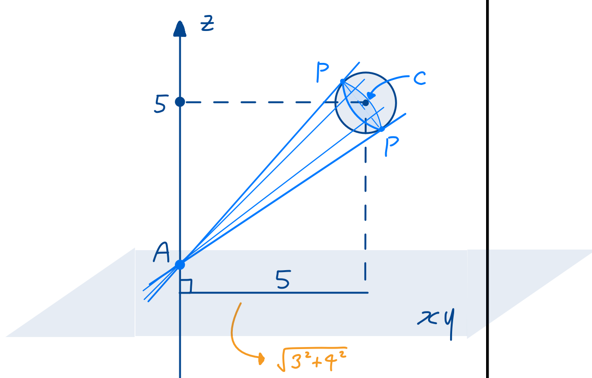
• $\overline{SH} = \overline{SA} - \overline{HA} = \overline{SA} - \overline{RF} = \sqrt{21} - \sqrt{3}x$

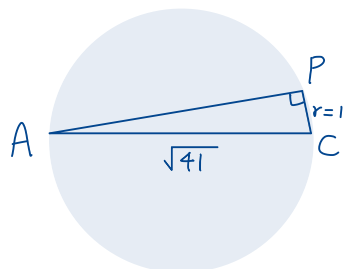
↳ $\overline{PH} = \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{SH} = \sqrt{7} - x$

5. 좌표공간에서 점 A(0, 0, 1)을 지나는 직선이 중심이 C(3, 4, 5)이고 반지름의 길이가 1인 구와 한 점 P에서만 만난다. 세 점 A, C, P를 지나는 원의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은 $\frac{q}{p}\sqrt{41}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[2022학년도 예시문항 수학 기하 30번]







직선 AP는 구에 접하므로 $\overline{AP}\perp\overline{PC}$

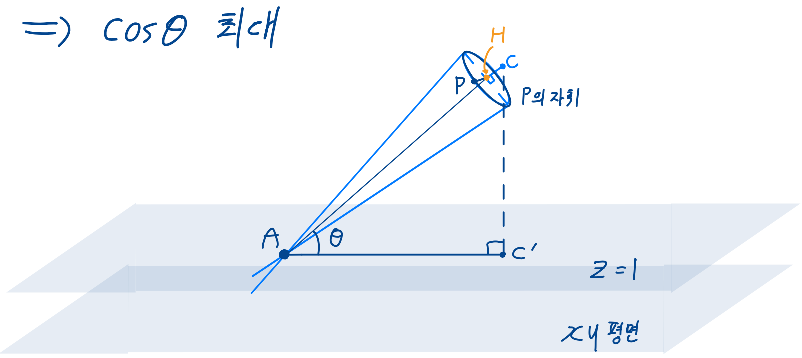
$\overline{AC}=\sqrt{41}$ ⇒ △APC의 외접원의 지름

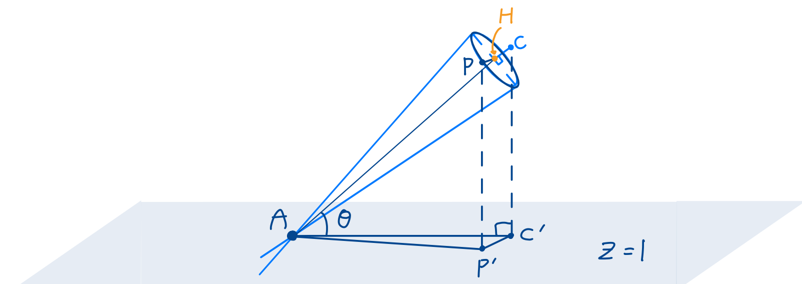
∴ 외접원의 넓이 $=\frac{41}{4}\pi$

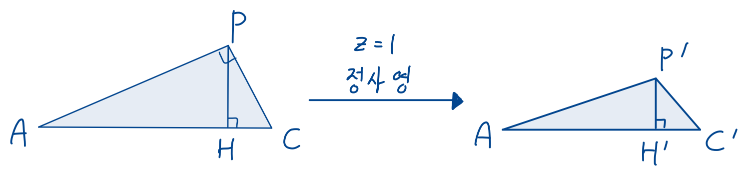
$\overline{PH}$ // xy평면 일 때

(평면 ACP와 xy평면 (or $z=1$)의 이면각의 크기 θ가 최소)

⇒ $\cos\theta$ 최대







$\overline{PH}$ // ($z=1$ 평면) 일 때 $\overline{P'H'}=\overline{PH}$ ($\overline{P'H'}$ 최대)

⇒ △AP'C' 넓이 최대

⇒ △APC $\cdot\cos\theta=$ △AP'C'

⇒ $\cos\theta$ 최대!

(평면 ACP 위의 선분 CA의 $z=1$로의 정사영) = $\overline{C'A}$라 하면

$\overline{CA}\cdot\cos\theta=\overline{C'A}$ 이다.

A(0, 0, 1), C'(3, 4, 1) 이므로

$\overline{AC'}=5$ 이다.

$\sqrt{41}\cdot\cos\theta=5$

∴ $\cos\theta=\frac{5}{\sqrt{41}}$

(외접원의 xy평면으로의 정사영의 넓이)

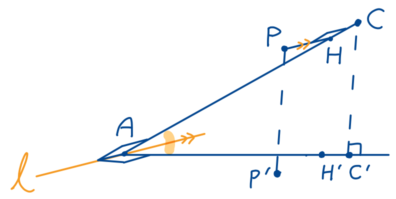
$=\frac{41}{4}\pi\times\cos\theta$

$=\frac{41}{4}\pi\times\frac{5}{\sqrt{41}}=\frac{5\sqrt{41}}{4}\pi$

∴ $p=4$, $q=5$

$p+q=9$

$l\perp\overline{AC'}$인 직선 l에 대하여 삼수선의 정리에 의해 $l\perp\overline{AC}$



$\overline{PH}$ // ($z=1$ 평면) 일 때

$\overline{PH}$ // l (∵ $\overline{AC}\perp\overline{PH}$)

∴ (평면 APC와 평면 AP'C'이 이루는 각 θ)

= (직선 l+C 평면)과 (직선 l+C' 평면)이 이루는 각

= ∠CAC'