패턴35

벡터의 다양한 해법

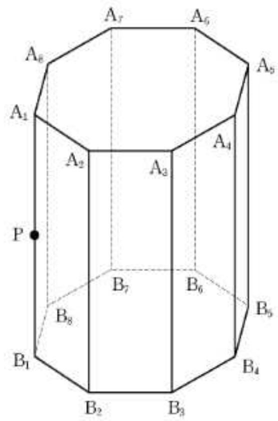
편집:우에노리에

1. | 2004 | 교육청(3점) |
|---|---|

세 벡터 $\vec{a}=(2,\ 3)$, $\vec{b}=(x,\ -1)$, $\vec{c}=(-4,\ y)$에 대하여 $2\vec{a}-\vec{b}=\vec{b}+\vec{c}$가 성립할 때, 두 실수 x, y의 곱을 구하시오.

2. | 2009 | 평가원(3점) |
|---|---|

다음 그림은 밑면이 정팔각형인 팔각기둥이다. $\overline{A_1A_3}=3\sqrt{2}$ 이고, 점 P가 모서리 A_1B_1의 중점일 때, 벡터 $\sum_{i=1}^{8}\left(\overrightarrow{PA_i}+\overrightarrow{PB_i}\right)$의 크기를 구하시오.



3. | 2007 | 교육청(3점) |
|---|---|

세 점 O, A, B 에 대하여 두 벡터 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$
(나) $\lvert\vec{a}\rvert=2$, $\lvert\vec{b}\rvert=3$

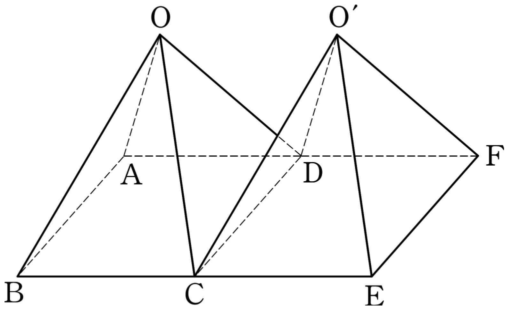
이때, 두 선분OA,OB 를 두 변으로 하는 평행사변형의 넓이는?

① $3\sqrt{2}$　② $4\sqrt{2}$　③ $3\sqrt{3}$

④ $4\sqrt{3}$　⑤ $5\sqrt{3}$

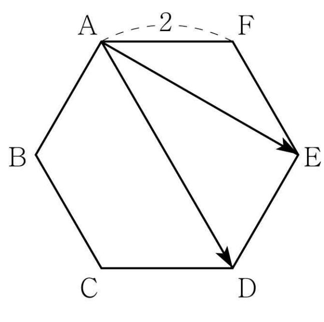
4. | 2006 | 평가원(3점) |

그림은 모든 모서리의 길이가 2인 두 개의 정사각뿔 $\mathrm{O-ABCD}$, $\mathrm{O'-DCEF}$에 대하여 모서리 CD를 일치시킨 도형을 나타낸 것이다. $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OF}}|^2$의 값을 구하시오. (단, 면 ABCD와 면 DCEF는 한 평면 위에 있다.)



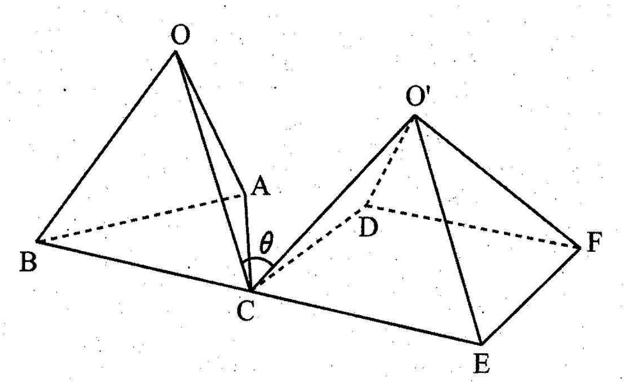
5. | 2009 | 교육청(3점) |

그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정육각형 ABCDEF가 있다. 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$의 내적 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{AE}}$의 값을 구하시오.



6. **2008** **교육청(3점)**

모든 모서리의 길이가 2 인 정사면체 OABC 와 정사각뿔 $O'-DCEF$ 를 아래 그림과 같이 두 모서리 BC 와 CE 가 한 직선 위에 오도록 나란히 붙여 놓았다고 하자. 두 벡터 $\overrightarrow{OC}$ 와 $\overrightarrow{OC'}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos\theta$ 의 값은?(단, 삼각형 ABC 와 사각형 DCEF 는 한 평면 위에 있다.)



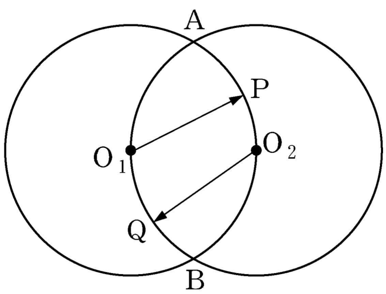
① $\dfrac{\sqrt{3}}{12}-\dfrac{1}{4}$　② $\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{5}{12}\sqrt{3}-\dfrac{1}{4}$

④ $\dfrac{7}{12}\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}$　⑤ $\dfrac{3}{4}\sqrt{3}-\dfrac{1}{4}$

7. **2008** **평가원(3점)**

평면 위의 두 점 O_1, O_2 사이의 거리가 1일 때, O_1, O_2를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 두 원의 교점을 A,

B라 하자. 호 AO_2B 위의 점 P와 호 AO_1B 위의 점 Q에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{O_1P}$, $\overrightarrow{O_2Q}$ 의 내적 $\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_2Q}$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?

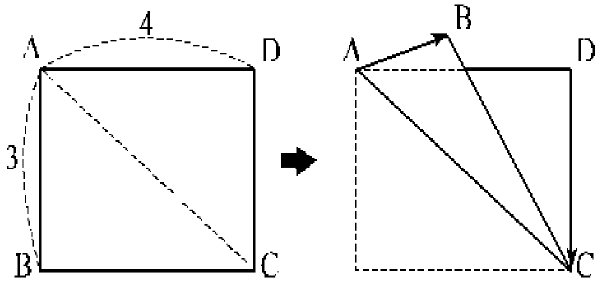


① -1　② $-\dfrac{1}{2}$　③ 0

④ $\dfrac{1}{4}$　⑤ 1

8. **2004** **교육청(4점)**

$\overline{\mathrm{AD}}=4$, $\overline{\mathrm{AB}}=3$인 직사각형 모양의 종이ABCD 가 있다. 대각선AC를 접는 선으로 하여 평면ABC가 평면 ACD와 수직이 되게 접는다. 접은 도형에서 내적 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\dfrac{b}{a}$ (a, b는 서로소인 자연수)일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

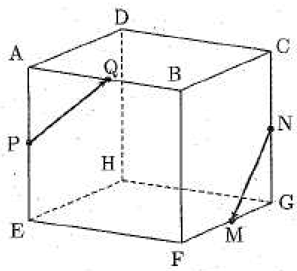


9. **2009** **교육청(3점)**

그림과 같이 한 변의 길이가 $\sqrt{6}$ 인 정육면체 ABCD－EFGH 가 있다. 모서리 AE, AB, FG, CG 의 중점을 각각 P, Q, M, N 이라 하자.

$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{NM}}\right|=\dfrac{b}{a}$

일 때, a^2+b^2 의 값을 구하시오.
(단, a, b 는 서로소인 자연수이다.)

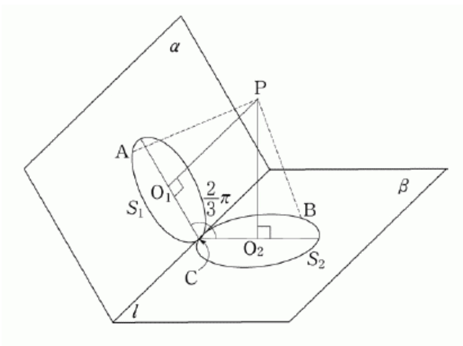


10. **2010** **교육청(4점)**

두 점 $A(2,\ 0)$, $B(0,\ 1)$ 와 타원 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 위를 움직이는 점 P에 대하여, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$가 최대가 되는 점 P에서의 접선의 방정식은 $y=ax+b$ 이다. a^2+b^2 의 값을 구하시오

11. **2005** **평가원(4점)**

두 평면 α, β의 교선을 l이라 하자. 평면 α 위에 있는 원 S_1과 평면 β 위에 있는 원 S_2는 반지름의 길이가 모두 2이다. 그림과 같이 원 S_1과 원 S_2는 점 C에서 직선 l과 접한다. S_1의 중심 O_1을 지나고 평면 α에 수직인 직선과 S_2의 중심 O_2를 지나고 평면 β에 수직인 직선이 만나는 점을 P라 하자. $\angle O_1CO_2 = \dfrac{2}{3}\pi$일 때, S_1 위에 있는 임의의 점 A와 S_2 위에 있는 임의의 점 B에 대하여 $\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right|$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M+m$의 값을 구하시오.



12. **2012** **평가원(3점)**

좌표공간에서 네 점 $\mathrm{A_0}$, $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{A_3}$이 다음 조건을 만족시킨다.

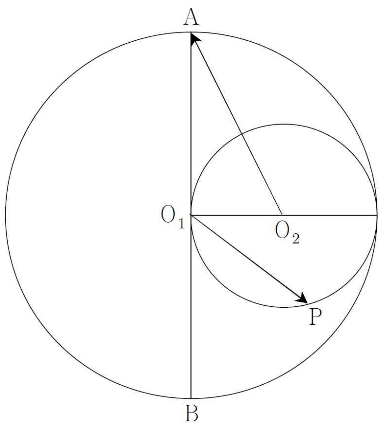
(가) $\left|\overrightarrow{\mathrm{A_0A_2}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{A_1A_3}}\right| = 2$

(나) $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{A_0A}_k} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}\right) = \cos\dfrac{3-k}{3}\pi$ $(k=1,\ 2,\ 3)$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}\right|$의 최댓값을 M이라 할 때, M^2의 값을 구하시오.

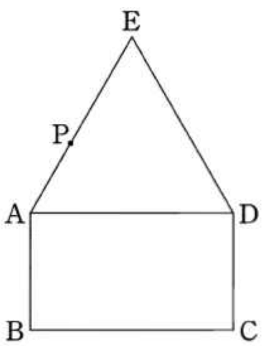
13. **2011** **교육청(4점)**

그림과 같이 두 점 O_1, O_2 를 중심으로 하는 반지름의 길이가 각각 2, 1 인 두 원이 내접하고, 큰 원의 지름 AB와 선분 O_1O_2 가 수직이다. 점 P가 작은 원 위를 움직일 때, 두 벡터 $\overrightarrow{O_1P}$, $\overrightarrow{O_2A}$ 의 내적 $\overrightarrow{O_1P} \cdot \overrightarrow{O_2A}$ 의 최댓값 M에 대하여 $12(M+1)^2$ 의 값을 구하시오.



14. **2010** **평가원(4점)**

평면에서 그림과 같이 $\overline{AB}=1$이고 $\overline{BC}=\sqrt{3}$인 직사각형 $ABCD$와 정삼각형 EAD가 있다. 점 P가 선분 AE 위를 움직일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?



[보 기]

ㄱ. $\left|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CP}\right|$의 최솟값은 1이다.

ㄴ. $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CP}$의 값은 일정하다.

ㄷ. $\left|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CP}\right|$의 최솟값은 $\dfrac{7}{2}$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. **2006** | **수능 (3점)**

타원 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$의 두 초점을 F, F′이라 하자. 이 타원 위의 점 P가 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OF}}|=1$을 만족시킬 때, 선분 PF의 길이는 k이다. $5k$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

16. **2012** | **수능 (3점)**

삼각형 ABC 에서 $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\angle \mathrm{B}=90^\circ$, $\angle \mathrm{C}=30^\circ$ 이다. 점 P 가 $\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ 를 만족시킬 때, $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2$ 의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

17. **2006** | **수능 (3점)**

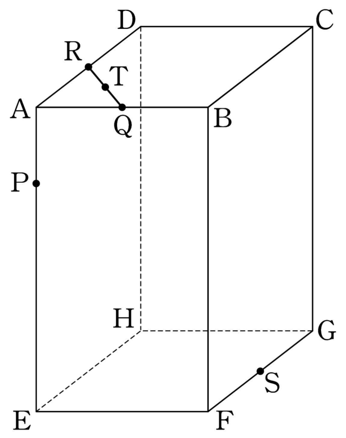
좌표평면 위에 원점 O를 시점으로 하는 서로 다른 임의의 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$가 있다. 두 벡터의 종점 P, Q를 x축 방향으로 3만큼, y축 방향으로 1만큼 평행이동 시킨 점을 각각 P′, Q′이라 할 때, 다음 중 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

ㄱ. $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OP'}}|=\sqrt{10}$
ㄴ. $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OP'}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}|$
ㄷ. $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

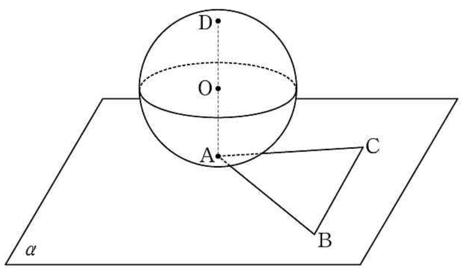
18. **2008** 수능 (3점)

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AD}}=4$, $\overline{\mathrm{AE}}=8$인 직육면체 ABCD-EFGH에서 모서리 AE를 1 : 3으로 내분하는 점을 P, 모서리 AB, AD, FG의 중점을 각각 Q, R, S라 하자. 선분 QR의 중점을 T라 할 때, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{TP}}$와 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{QS}}$의 내적 $\overrightarrow{\mathrm{TP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QS}}$의 값을 구하시오.



19. **2006** 수능 (4점)

그림과 같이 평면 α 위에 한 변의 길이가 3인 정삼각형 ABC가 있고, 반지름의 길이가 2인 구 S는 점 A에서 평면 α에 접한다. 구 S 위의 점 D에 대하여 선분 AD가 구 S의 중심 O를 지날 때, $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}}|^2$의 값을 구하시오.



20. **2007** 수능 (4점)

좌표공간에서 중심이 C인 구 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$와 평면 $x+y+z=6$이 만나서 생기는 도형을 S라 하자. 도형 S 위의 두 점 P, Q에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$의 내적 $\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$의 최솟값은?

① -3 ② -2 ③ -1

④ 1 ⑤ 2

21. 2005 수능 (4점)

좌표공간에 두 점 A$(3,\ 1,\ 1)$, B$(1,\ -3,\ -1)$이 있다.
평면 $x-y+z=0$에 있는 점 P에 대하여 $\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|$의 최솟값은?

① $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ ③ $2\sqrt{3}$

④ $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

22. 2007 수능 (4점)

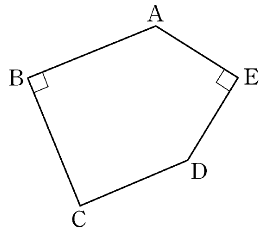
좌표공간에 네 점 A$(2, 0, 0)$, B$(0, 1, 0)$, C$(-3, 0, 0)$, D$(0, 0, 2)$를 꼭지점으로 하는 사면체 ABCD가 있다.
모서리 BD 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$의 값을 최소로 하는 점 P의 좌표를 (a, b, c)라고 할 때, $a+b+c=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

23. 2006 수능 (4점)

좌표공간의 점 A$(3, 6, 0)$에서 평면 $\sqrt{3}y-z=0$에 내린 수선의 발을 B라 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이다.)

24. 2010 수능 (4점)

평면에서 그림의 오각형 $ABCDE$가



$\overline{AB}=\overline{BC}$, $\overline{AE}=\overline{BD}$, $\angle B=\angle E=90^o$를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. 선분 BE의 중점 M에 대하여 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}$와 $\overrightarrow{AM}$은 서로 평행하다.

ㄴ. $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{BC}\bullet\overrightarrow{ED}$

ㄷ. $|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ED}|=|\overrightarrow{BE}|$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

25. 2013학년 수능 (4점)

한 변의 길이가 2 인 정삼각형 ABC 의 꼭짓점 A 에서 변 BC 에 내린 수선의 발을 H 라 하자. 점 P 가 선분 AH 위를 움직일 때, $\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|$ 의 최댓값은 $\dfrac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

1) 정답 32
2) 정답 48
3) 정답 ②
4) 정답 12
5) 정답 12
6) 정답 ③
7) 정답 ②
8) 정답 106
9) 정답 13
10) 정답 21
11) 정답 12
12) 정답 8
13) 정답 60
14) 정답 ⑤
15) 정답 15
16) 정답 ③
17) 정답 ③
18) 정답 12
19) 정답 43
20) 정답 ①
21) 정답 ③
22) 정답 11
23) 정답 18
24) 정답 ⑤
25) 정답 7

23) 정답 ⑤

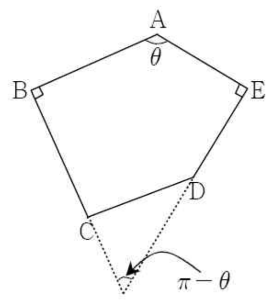
ㄱ. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}=2\overrightarrow{\mathrm{AM}}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$은 평행하다. (참)

ㄴ. (참)

$\angle\mathrm{B}=\angle\mathrm{E}=90°$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$가 이루는 각을 θ라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{ED}}$가 이루는 각은 $\pi-\theta$이다.

따라서

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AE}}|\cos\theta$



$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ED}}=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}||\overrightarrow{\mathrm{ED}}|\cos(\pi-\theta)=-|\overrightarrow{\mathrm{BC}}||\overrightarrow{\mathrm{ED}}|\cos\theta$

이때, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{ED}}$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}=-\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ED}}$ (참)

ㄷ. $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{ED}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ED}}+|\overrightarrow{\mathrm{ED}}|^2$

$|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$ 이때, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{ED}}$이고 'ㄴ'에 의해 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}=-\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ED}}$이 성립하므로

$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{ED}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|^2$

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{ED}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|$이 성립한다. (참)

24) 정답 7

해설

$\angle\mathrm{BPH}=\theta$라 하면

$\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|=\left|\,\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|\cdot\cos(\pi-\theta)\right|=\left|\,\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|\cdot\cos\theta\right|$

$=\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{PH}}\right|=\overline{\mathrm{PA}}\cdot\overline{\mathrm{PH}}$

$\overline{\mathrm{PA}}=x$, $\overline{\mathrm{Ph}}=y$ $(x>0,\ y>0)$라 하면

$\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|=xy$, $\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{3}$ 이므로

$x+y=\sqrt{3}$

∴ (산술평균)≥(기하평균)으로부터

$x+y\geq 2\sqrt{xy}$ (등호는 $x=y$ 일 때 성립)

$\sqrt{3}\geq 2\sqrt{xy}$, $\dfrac{3}{4}\geq xy$

∴ $p+q=4+3=7$