remastered

I M I

nteresting

ath

deas

기하

서문 및 후기

귀찮으니 후기와 서문을 같이 쓰겠습니다.
IMI는 제가 2년 전에 작성한 전자책이고, 그때 저는 “다시는 이런 짓 안 하겠다”라고 후기에 썼었습니다. 보름 동안 문제를 쥐어짜느라 고생하면서 썼기 때문입니다.
잠시 여름방학 동안 과외 좀 구하려고 했는데(과외나 커리큘럼 상담 필요하신 분의 연락을 애타게 기다립니다) 입시 관련 정보를 찾던 도중 오르비 사이트의 정리글을 보게 되었고, 거기 아래에 “방금 판매된 전자책: IMI(4분 전)”를 보게 되었으며, 제가 김현정이라는 오르비 유저를 통해 무료배포한 지가 한참 되었는데도 불구하고 굳이 그걸 사고 있다는 안타까움이 생겼습니다. 과정이 바뀌기도 하였고 기하와 벡터, 미적분, 확률과 통계 택 1로 시험을 본다는 것을 알게 된 후 제가 사랑하는 기하와 벡터 부분을 리뉴얼하여 선보이게 되었습니다.

제가 2년 전에 오르비를 했던 틀이기 때문에 현재 IMI의 존재를 모르는 사람이 많을 것 같아 구 버전으로도 충분히 매력적이리라 생각하여 바뀐 부분이 많진 않습니다.
네 사실 핑계이고 귀찮아서 많은 내용을 추가할 수가 없었습니다. 젊었었으면 가능했을 것 같은데 미안합니다. 즉 지난번 IMI와 꽤 내용이 겹칩니다.
대신 지난번 책과 달리 문제가 나온 다음 페이지에 바로 해설을 수록하였습니다. 이전 IMI를 내고 가장 많이 제기되었던 불만 사항이었기에 시정하는 것은 아니고 해설을 같이 넣으면 분량이 뻥튀기되어 행복합니다. 그래봤자 30페이지입니다만.
표지 디자인 담당은 저입니다. 외주 맡길 재산이 없는 내 지갑을 알까?
여러분의 기프티콘 찔러넣기를 환영합니다.

IMI 미적분 remastered version은 낼지 안 낼지 모르겠습니다. 미적분은 그다지 사랑하지 않습니다. 제가 항상 수능만 보면 미적 때문에 만점을 한 번도 못 맞았단 말입니다. 미적분은 제가 미워합니다. 물론 그렇다고 확률과 통계 버전을 내겠다는 것은 아닙니다. 확률과 통계는 그냥 푸십시오. 저도 잘 못합니다.
참고로 저는 미적분에서 삼각함수 극한 부분만은 매우 사랑합니다. 그 부분은 칼럼을 쓸 수도 있습니다. 물론 정석적 풀이는 찾을 수 없을 것입니다.
여러분들의 공부 고민 상담을 환영합니다. 오픈 카톡방 링크를 통해 공부 커리큘럼이나 고민 상담을 요청하시면 성심성의껏 상대해드릴지는 모르겠지만 동기 부여 및 앞으로 해야 할 기틀을 대강 잡아드리겠습니다.
잡설이 길었으니 밑줄 친 것만 보셔도 됩니다. 본문은 반말을 쓰겠습니다. 짧은 문체는 집필자의 손목과 등 건강에 도움을 줍니다.

2021년 8월 6일 autophagy

Ⅰ 이차 곡선

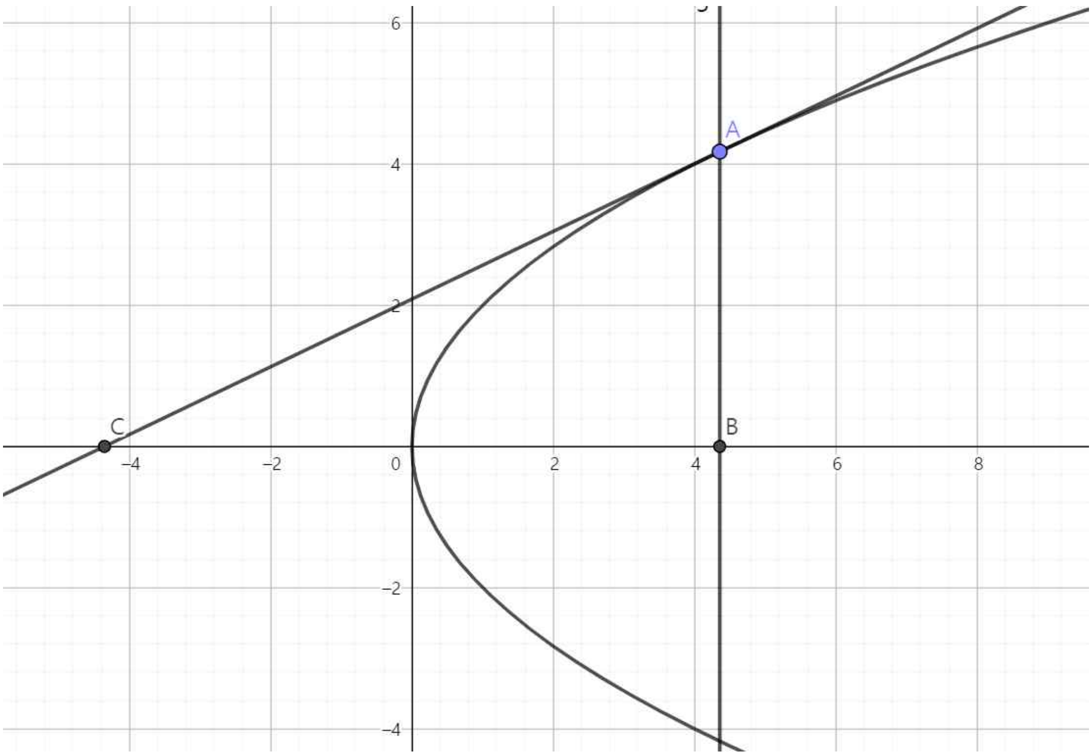
1. 포물선

포물선은 가장 간단한 이차곡선이다.

만약 어떠한 포물선에 접선을 그었을 때 접선의 방정식과 접점이 주어진다면, 포물선의 꼭짓점이 위치할 수 있는 영역은 어떻게 주어지는가?

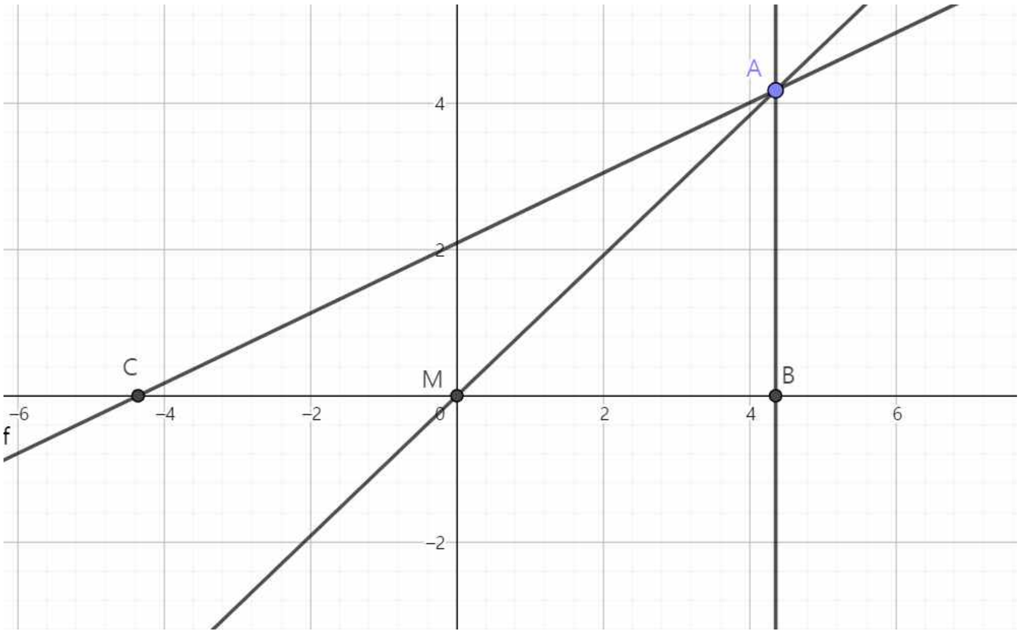
예를 들면 포물선 $(y-a)^2=4p(x-b)$가 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$과 (0, 1)에서 접한다고 하자. 이때 a와 b의 관계를 식으로 나타낼 수 있을지 알아보자.

우선 포물선의 대표적인 특징 중 한 가지를 짚고 넘어가자.



그림에서 C와 B는 꼭짓점에 대해 대칭인 위치에 있다.

따라서 포물선의 꼭짓점은 접점인 A에서 대칭축에 그은 수선의 발(B), 그리고 대칭축과 접선의 교점(C), 이 2개의 점의 중점이며, 준선에 평행한 선 위의 점이 무한히 존재하여 선으로 표현되므로 꼭짓점의 자취 또한 선으로 표현된다.



즉 만약에 포물선의 모양이 주어지지 않고 접선 AC와 접점 A만 주어진다고 해도 우리는 포물선의 꼭짓점의 위치를 유추할 수 있다. 그림의 직선 AM 위에 꼭짓점이 존재하게 되며, 이 직선은 접선 AC에서 기울기는 2배가 되고 A를 지나는 선이다.

따라서 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$과 (0, 1)에서 접하며, 준선이 y축과 평행한 포물선의 꼭짓점은 접점인 (0, 1)을 지나고 기울기는 2배인 직선 $y=x+1$ 위에 있다. 만약 찾는 포물선이 $(y-a)^2=4p(x-b)$인 형태가 아니라 준선이 x축과 평행한 $(x-a)^2=4p(y-b)$의 형태였다면 포물선의 꼭짓점은 접점인 (0, 1)을 지나고 기울기는 절반인 직선인 $y=\frac{1}{4}x+1$ 위에 있었을 것이다.

이 특징을 활용한 문제를 풀어보자.

좌표평면 위의 두 포물선 C_1, C_2가 다음 조건을 만족한다.

(가) 두 포물선의 축은 점 P에서 수직으로 만나며, 점 P는 C_1, C_2의 꼭짓점이다.

(나) C_1은 (-3, 0)에서 기울기가 $-\frac{4}{3}$인 직선과 접하고, C_2은 (3, 2)에서 기울기가 $\frac{2}{3}$인 직선과 접한다.

이때 $\overline{OP}^2$을 구하여라.

자작 문제이다.

풀이는 다음 페이지에 제시하겠다.

생각을 다소 하지 않더라도 서술한 특징을 통해 이 2가지 경우가 있음을 예측할 수 있다.

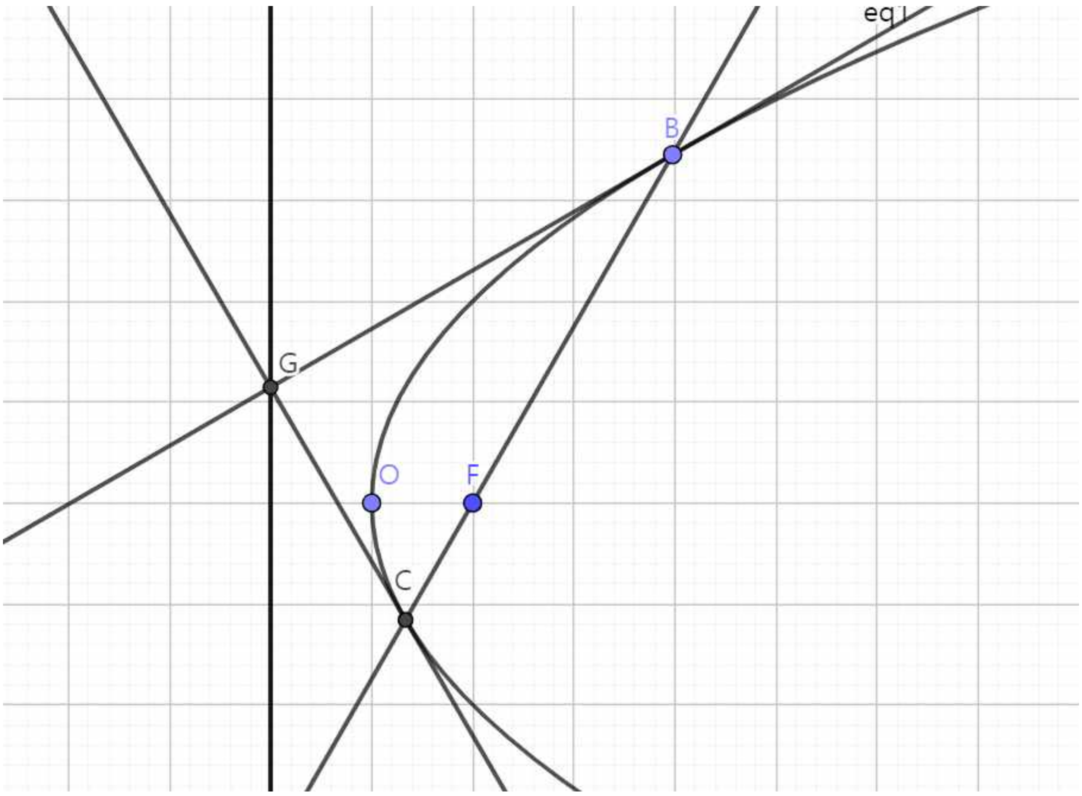
① C_1의 꼭짓점이 $y=-\frac{8}{3}x-8$ 위에 있고 C_2의 꼭짓점이 $y=\frac{1}{3}x+1$ 위에 있음

② C_1의 꼭짓점이 $y=-\frac{2}{3}x-2$ 위에 있고 C_2의 꼭짓점이 $y=\frac{4}{3}x-2$ 위에 있음

각각 C_1의 준선이 x축에 평행할 경우와 y축에 평행할 경우이다.

그런데 첫 번째 경우는 $y=-\frac{8}{3}x-8$, $y=\frac{1}{3}x+1$의 교점이 (-3, 0)인데 C_1은 점 (-3, 0)에서 기울기가 0이 아니므로 꼭짓점이 될 수 없다. 따라서 꼭짓점은 $y=-\frac{2}{3}x-2$와 $y=\frac{4}{3}x-2$의 교점 위에 존재하며, 그건 (0, -2)이다. 답은 4가 된다.

포물선에 관한 신기한 성질은 매우 많지만, 실제 문제 풀이에서 쓸만한 것은 흔하지 않다. 그 중 포물선의 초점을 관통하는 직선의 상황은 다뤄볼 만하다.



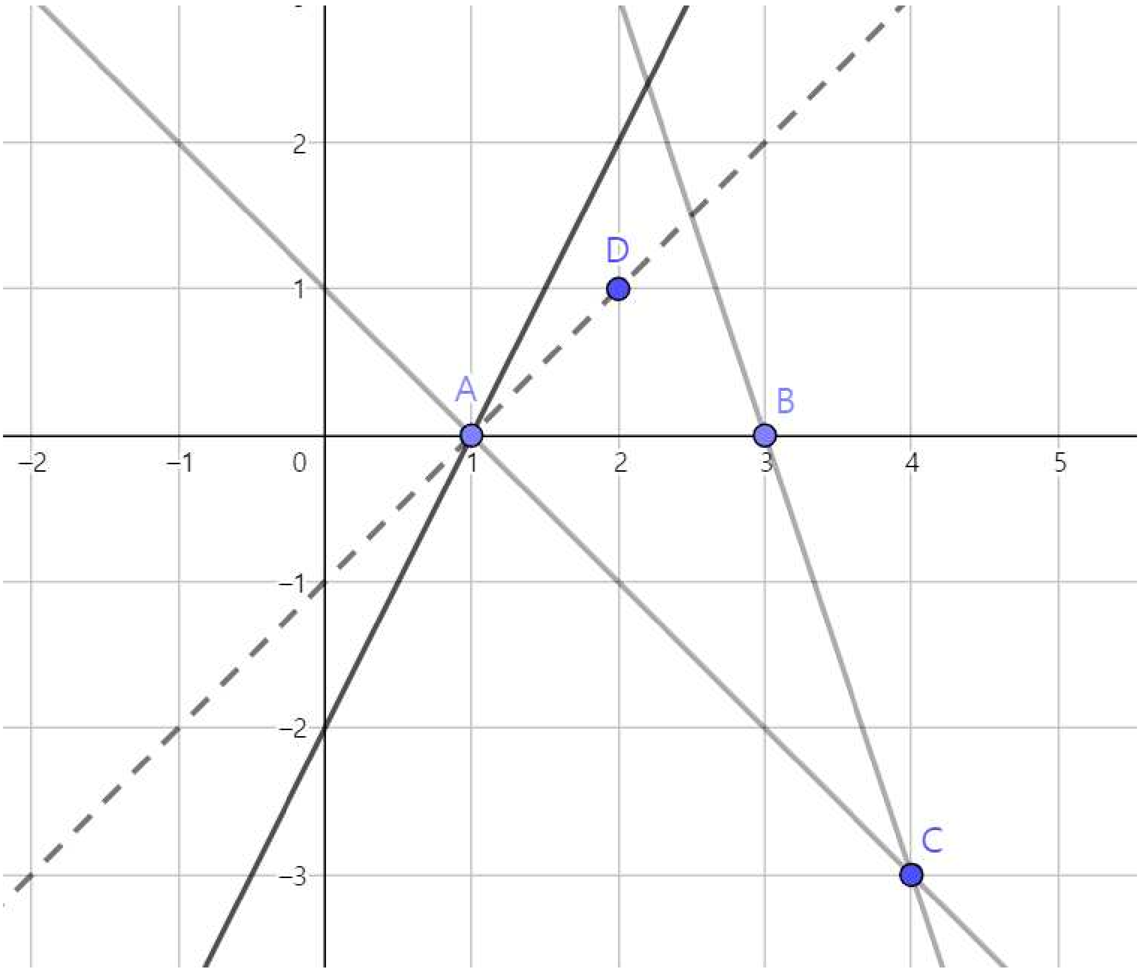
그림처럼 초점 F를 관통하는 직선과 포물선이 만나는 두 점에서의 접선의 교점은 준선 위에 있으며, 두 접선은 직교한다.

또한 $\frac{1}{\overline{OF}}=\frac{1}{\overline{BF}}+\frac{1}{\overline{CF}}$이다.

마지막으로 범용성이 없는 정보지만, x 좌표가 같지 않은 두 점 A와 B가 좌표 평면에 존재할 때, 직선 PA의 기울기와 PB의 기울기의 차가 일정한 값을 가진다면, 임의의 점 P가 그리는 자취는 대칭축이 y축과 평행하며 A와 B를 지나는 포물선이다.

이 특징을 이용하여 세 개의 점을 지나는 포물선을 빠르게 생각해 낼 수 있다. 특히 y 좌표가 0으로 같은 서로 다른 두 점 A(a, 0), B(b, 0)과 어떠한 점 C(x, y)가 주어졌을 때, 이 세 점을 지나는 포물선의 꼭짓점은 빠르게 구할 수 있다.

예시로 a, b, x, y가 각각 1, 3, 4, -3이라고 하자.



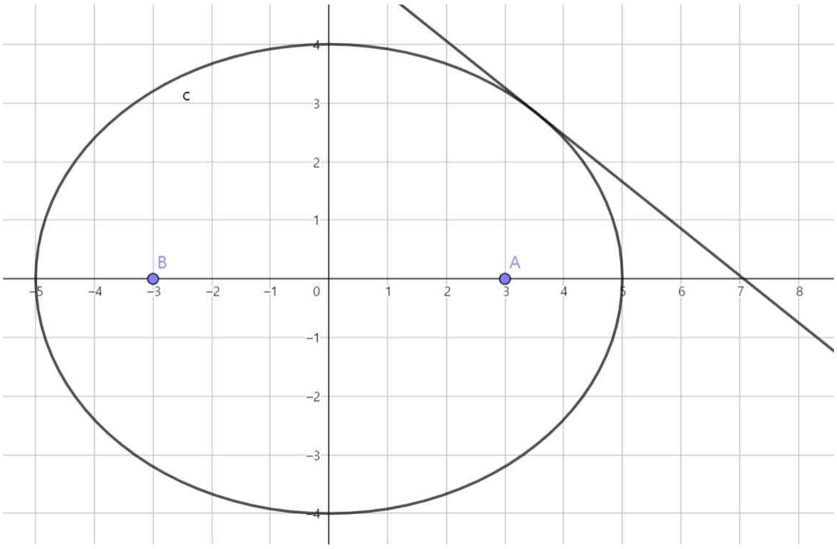
AC의 기울기는 -1이고 BC의 기울기는 -3이므로 그 차는 2이다. 즉 포물선 위의 점 P에 대해 직선 PA의 기울기는 직선 PC의 기울기보다 항상 2만큼 크다. P가 A에 무한히 가까워지는 상황을 상정하면 PC의 기울기는 0에 수렴하고 PA의 기울기는 A에서의 접선의 기울기에 무한히 가까워진다. 즉 A에서의 접선의 기울기는 2라고 할 수 있다.

A와 B의 중점(2, 0)을 대칭축이 지나가고, 접선의 특성에 따라 이 포물선의 꼭짓점은 $y=x-1$ 위에 존재하므로, D (2, 1)이 꼭짓점의 좌표임을 알 수 있다. 말로 설명하면 길어지지만 그림으로 그린다면 빠르게 꼭짓점의 좌표를 구하여 포물선의 개형을 그릴 수 있다.

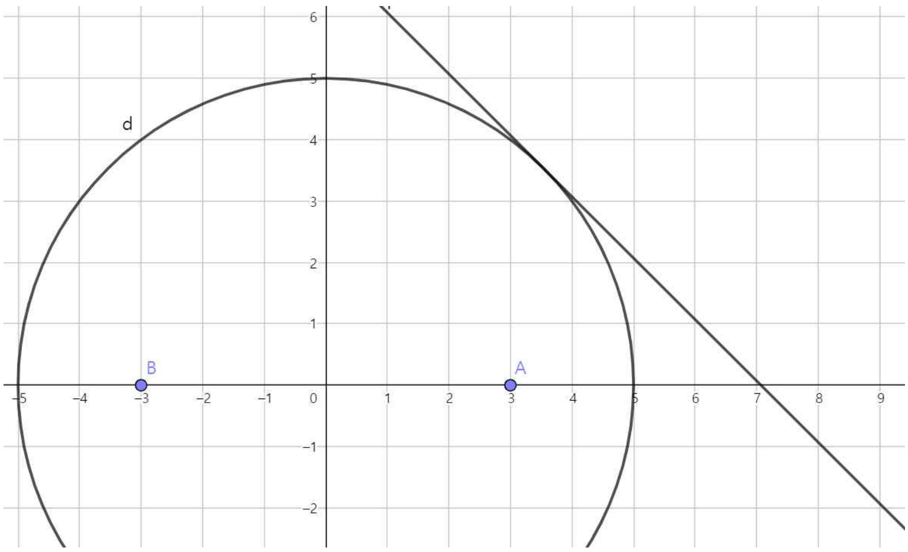
2. 타원

타원도 그렇고 포물선도 그렇고 초점에서 나간 빛이 도형에 반사되면 특정한 방향이나 위치로 나아가지만, 실제로 문제로 접할 일이 없으니 생략하도록 하겠다.

우선 타원은 원을 늘린 것이다. 이것은 문제 풀이 과정에서 활용할 수 있다.



그림처럼 장반경이 5, 단반경이 4인 타원이 기울기가 $\frac{4}{5}$이며 x 절편이 양수인 직선과 접하는 상황이다. 이때 x 절편을 구하는 방법은 여러 가지가 있겠으나, 나는 타원을 원으로 만들기 위해 y축 값을 1.25배 하는 방법을 사용한다.



이제 타원이 아니라 원이 되었고, 직선의 기울기도 원래는 $\frac{4}{5}$였으나 거기에 1.25를 곱해줘야 하므로 1이 된다. 따라서 y축 방향으로 늘려준 상태에서 직선의 x 절편은 $5\sqrt{2}$임을 쉽게 알 수 있고, 이 값은 다시 도로 y축 값을 줄여도 변하지 않으므로 원래 상태에서도 x 절편의 값은 $5\sqrt{2}$이다.

타원은 다루기 힘든 편이고 원은 다루기 상대적으로 편한 도형이기에 특히 접선 관련한 상황에서 사용하면 좋다.

좌표축을 늘리고 줄이는 기술은 타원 관련 문제에만 적용되는 것은 아니지만, 몇 가지 중요한 사항을 고려해야 한다. 우선 좌표축을 늘이고 줄일 때 축의 값에 곱해주는 배수를 k라고 둘 때(위에서 타원을 원으로 만들 때 k는 1.25임) 영향을 받는 값들을 확인해보자.

1) 넓이: k배 된다.

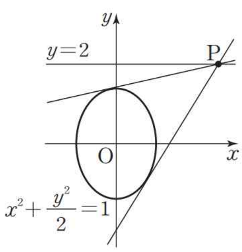
2) 좌표: 만약 x축에 k를 곱해준다면 x 좌표는 k배 되며 y 좌표는 그대로이다, 만약 y축에 k를 곱해준다면 x 좌표는 그대로이며 y 좌표는 k배 된다. 위 타원을 원으로 만드는 과정에서 y축에 1.25를 곱한 이유는 그렇게 해야 x 좌표가 그대로가 되어 x 절편 값을 계산하기 편해지기 때문이다.

3) 기울기: x축에 k를 곱해주는 경우 기울기는 $\frac{1}{k}$배 되며 y축에 k를 곱해주는 경우 기울기는 k배 된다.

4) 위치 관계: 당연하지만 평행 관계, 접하는 관계, 혹은 포함 관계 등 위치 관계는 그대로 보존된다고 보면 된다.

5) 선분의 길이: **생각하기 힘들다.** 길이가 변하는 비율은 그 선분의 기울기에 따라 달라지기 때문이다.

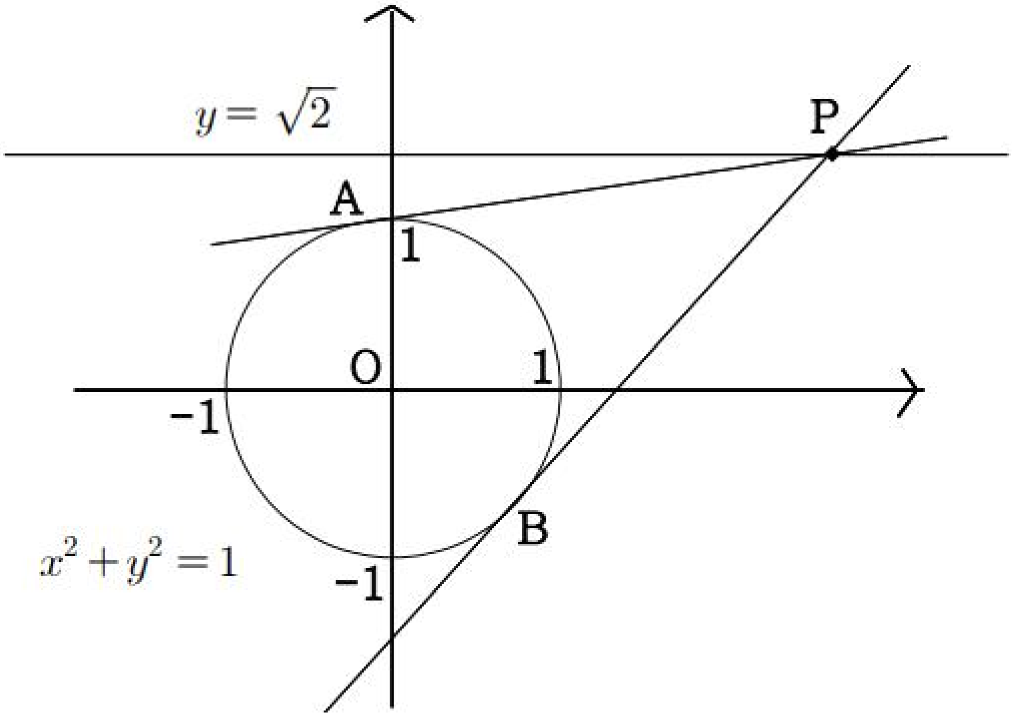
직선 $y=2$ 위의 점 P에서 타원 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$에 그은 두 접선의 기울기의 곱이 $\frac{1}{3}$이다. 점 P의 x좌표를 k라 할 때, k^2의 값은? [4점]



① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

모의고사 기출 문제이다. 좌표축 늘이기 줄이기를 활용해보자.

x 좌표 관련된 값을 답으로 구해야 하므로 세로를 줄이는 편이 좋다. 세로에 $\frac{1}{\sqrt{2}}$배를 해주면 타원은 원이 되며 접선의 기울기도 각각 $\frac{1}{\sqrt{2}}$배가 된다. 즉 기울기의 곱은 $\frac{1}{2}$배가 되므로 $\frac{1}{6}$이 된다.



즉 이 그림에서 두 접선의 기울기의 곱이 $\frac{1}{6}$일 때 P의 좌표를 구하는 문제로 변하게 되어 더 쉬워진다.

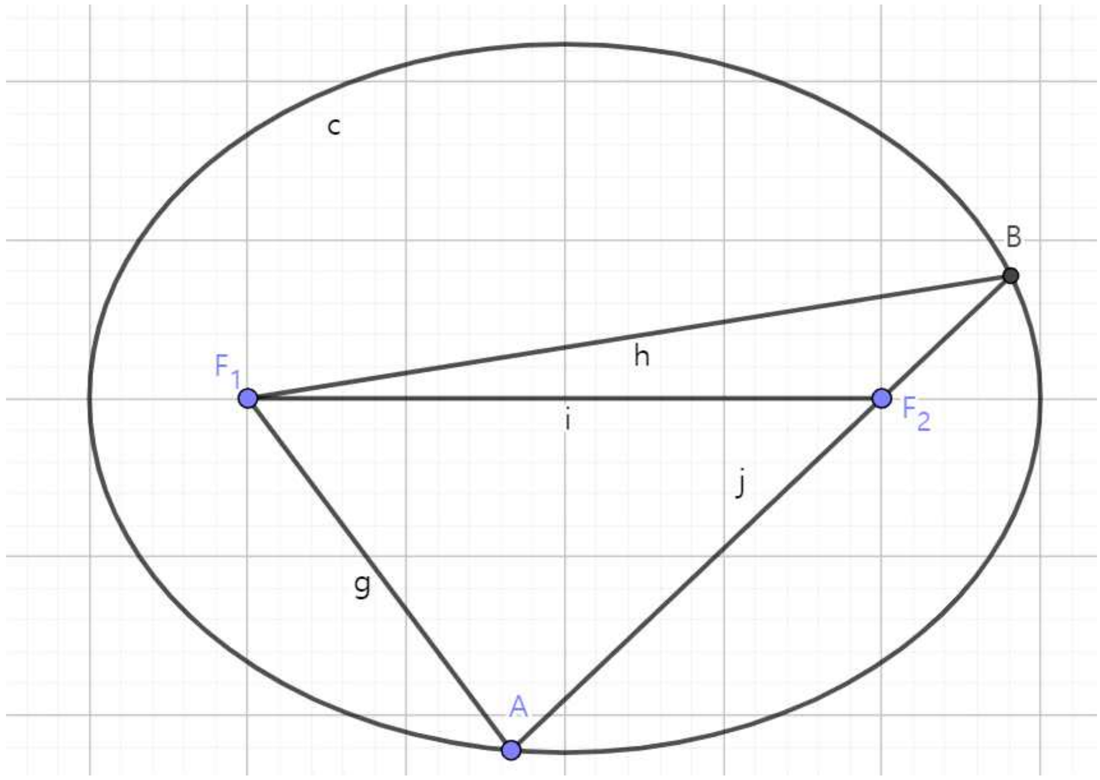
"$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ 공식을 쓰면 바로 답 2번인 거 나오는데 뭐 함?"

이라고 말할 수도 있다. 맞는 말이고 우선 나는 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ 공식을 외우지 않기에 저렇게 원으로 바꿔서 삼각함수 합 공식 써서 어렵게 풀었으나 여러분은 공식을 외우길 바란다. 아래는 그 어려운 풀이다.

접점 두 개를 각각 A, B라고 하면 $\angle OPA=\angle OPB=\theta$로 둘 수 있습니다. P의 x 좌표가 k이므로 $\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$이고 AP의 기울기는 $\frac{\frac{\sqrt{2}}{k}-\tan\theta}{1+\frac{\sqrt{2}}{k}\tan\theta}$이며 BP의 기울기는 $\frac{\frac{\sqrt{2}}{k}+\tan\theta}{1-\frac{\sqrt{2}}{k}\tan\theta}$입니다. 이 곱이 $\frac{1}{6}$이므로 정리하면 $\frac{\frac{2}{k^2}-\frac{1}{k^2+1}}{1-\frac{2}{k^2(k^2+1)}}=\frac{1}{6}$입니다. 이를 만족하는 k^2의 값을 구하면 7이며 답은 2번입니다.

하지만 확실히 원으로 바꿔서 푸는 방법은 재미있고, 직관적이며, 실수가 줄어든다는 장점이 있다. 또한 일부 문제는 정석적인 방법보다 원으로 만들어 푸는 방법이 매우 쉬워지는 경우가 있다. 알아두면 쓸만한 방법이다.

포물선을 다룰 때 나온 공식 중 $\frac{1}{\overline{\mathrm{OF}}}=\frac{1}{\overline{\mathrm{BF}}}+\frac{1}{\overline{\mathrm{CF}}}$가 있었다. 초점을 지나는 직선이 포물선을 나눌 때 쓰면 편리한 공식이다. 타원에서도 이와 비슷한 공식이 있다.



A가 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위를 자유롭게 움직이고 B는 $\mathrm{AF_2}$의 연장선이 타원과 만나는 점일 때, $\frac{2a}{b^2}=\frac{1}{\overline{\mathrm{AF_2}}}+\frac{1}{\overline{\mathrm{BF_2}}}$이다.

증명을 하겠다. 나무위키에서 스튜어트 정리를 찾아보고, 그것을 삼각형 $\mathrm{AF_1B}$에 사용할 것이다. $\mathrm{AF_2}=n, \mathrm{BF_2}=m$라고 하는 것이 편할 것 같다. 그러면 $\mathrm{AF_1}=2a-n, \mathrm{BF_1}=2a-m$이므로 다음과 같은 식이 성립한다.

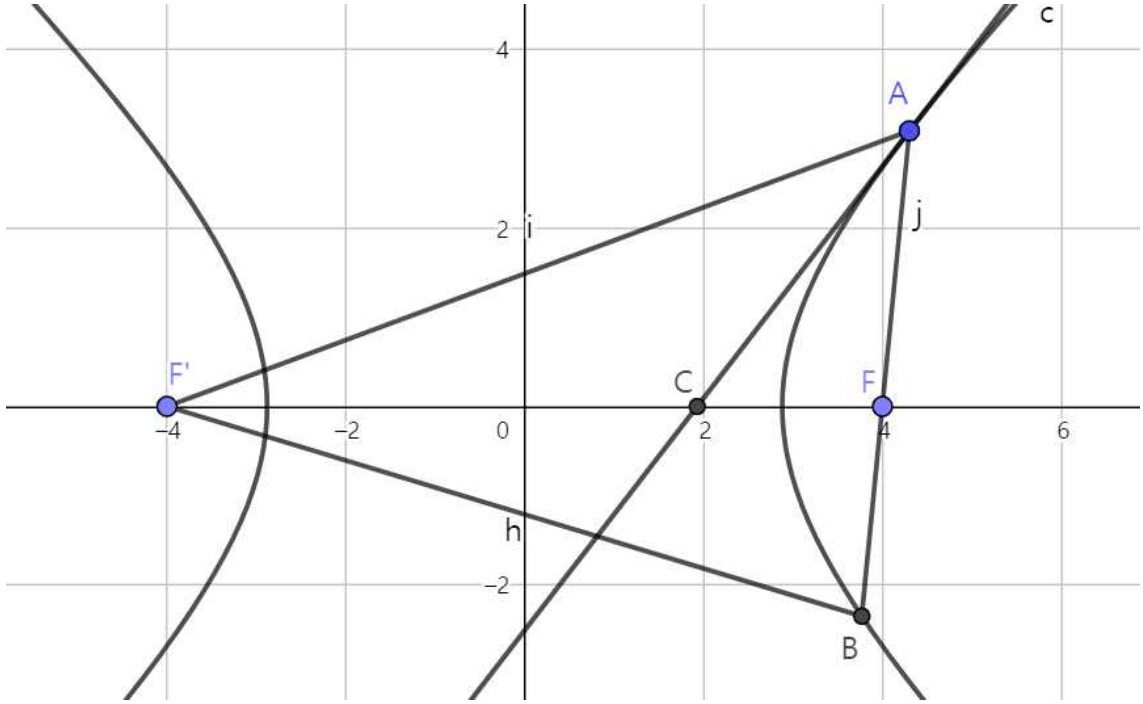
$$m(2a-n)^2+n(2a-m)^2=(n+m)(nm+4c^2)$$

이 식을 풀어서 쓰면 $-8anm=(n+m)(4c^2-4a^2)$이고, $a^2+b^2=c^2$이므로 정리해주면 $\frac{2a}{b^2}=\frac{n+m}{mn}=\frac{1}{n}+\frac{1}{m}$이다. 즉 증명이 완료된다.

이 공식 많이 유용하다. 초점을 지나는 직선이 나온다면 이 공식을 사용할 수 있는지 유심하게 관찰해주자.

3. 쌍곡선

이 곡선은 잔기술 없이 정의에 입각한 풀이가 대체로 낫긴 하지만, 그나마 범용적으로 쓸 수 있는 특성에는 접선이 좌표축과 만날 때의 성질이 있다.



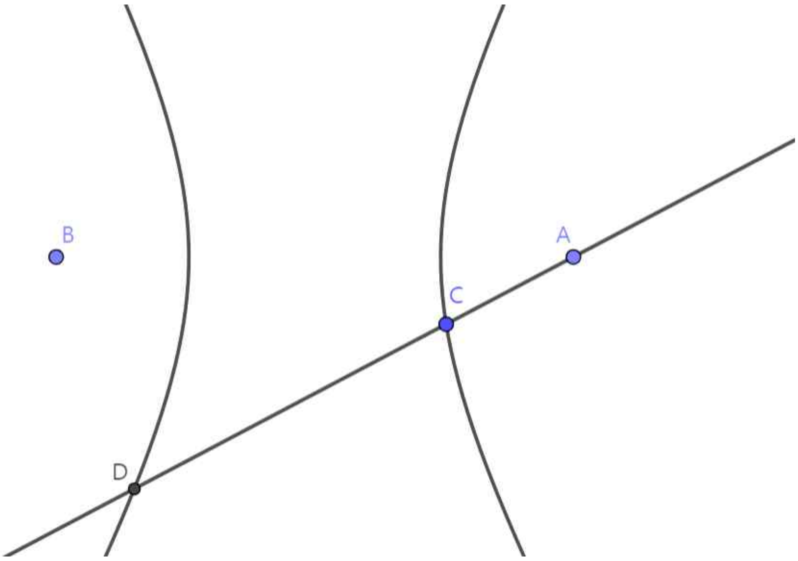
F′와 F는 초점이며, C는 쌍곡선 위의 점 A에서의 접선이 x축과 만나는 점이다. 이때 AF′:AF=CF′:CF이다. A에서의 접선이 각 F′AF를 이등분하는 성질이 존재하기 때문에 이등분선의 성질로 쉽게 보일 수 있는 특징이다.

또한 포물선 타원에서 나온 공식과 유사하게 초점을 통과하는 직선에 대한 공식이 있으며, $\frac{2a}{b^2}=\frac{1}{\mathrm{AF}}+\frac{1}{\mathrm{BF}}$로 타원과 동일하다. 증명은 또 위와 같은 삼각형에 스튜어트 정리를 적용하면 되므로 생략하겠다.

이렇게만 말을 끝내면 후에 추가 학습을 하는 경우 의문이 생길 수 있다.

“쌍곡선의 경우에는 양쪽에 볼록한 게 있으니까 한쪽 곡선과 두 점에서 만나는 것이 아니라 한 곡선하고 한 점과 만나고 다른 쪽 곡선과 한 점에서 만나는 경우가 존재하지 않나요?”

정확한 지적이다. 그런 경우를 그려주겠다.

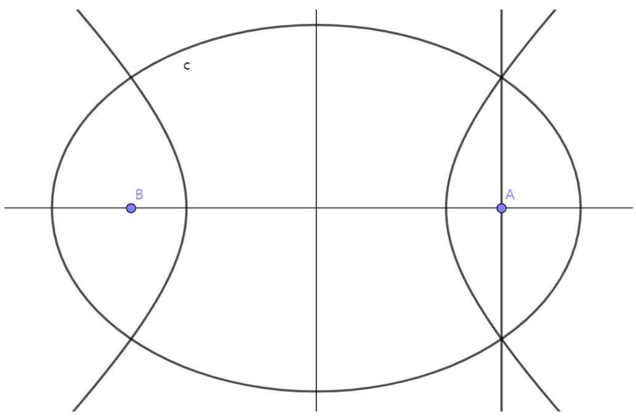


A, B점이 각각 초점인 상황이며 직선의 기울기 절댓값이 점근선의 기울기 절댓값보다 작은 상황이며, 이런 경우에는 $\frac{2a}{b^2}=\frac{1}{\overline{AC}}-\frac{1}{\overline{AD}}$이다. 같은 쪽의 곡선과 만나는 경우에는 합이 되고, 양쪽 곡선과 만날 때는 점이 각각 다른 쪽 곡선에 존재하므로 음의 관계가 된다.

증명은 역시 생략하며, 이 공식 또한 상당히 유용한 편에 속한다.

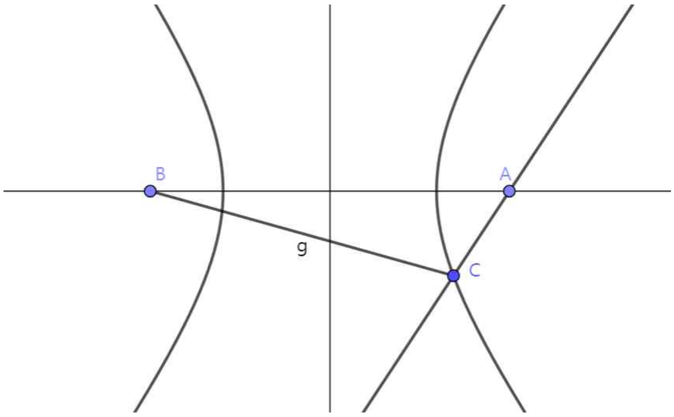
이상으로 이차곡선에 대한 내용을 마치겠으며, 몇 가지 연습 문제를 준비해 보았다.

1, 그림처럼 두 점 A, B가 초점인 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$과 쌍곡선 $\frac{x^2}{c^2}-\frac{y^2}{d^2}=1$이 있다. 이 두 도형은 A를 지나고 y축과 평행한 직선상의 두 점에서 교차한다. $\frac{a}{c}=2$일 때 $\frac{b}{d}$의 값은?



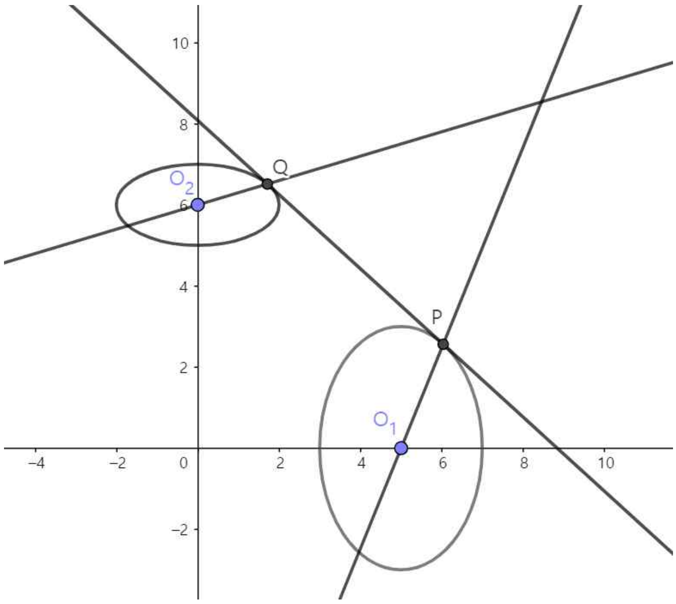
① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

2. 그림처럼 점 A와 B가 초점인 쌍곡선이 있다. 이 쌍곡선은 A를 지나고 기울기가 $\frac{4}{3}$인 직선과 한 점에서만 만난다. 그 점을 C라고 할 때, BC의 길이는 26이었다. AC의 길이는 얼마인가?

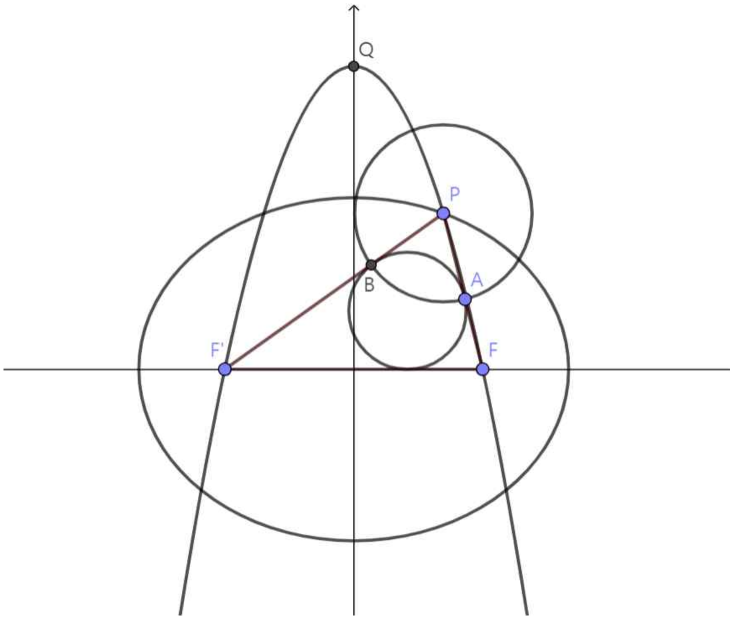


① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

3. 그림처럼 타원 $\frac{(x-5)^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$과 $\frac{x^2}{4}+(y-6)^2=1$가 있고 $\frac{(x-5)^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, $\frac{x^2}{4}+(y-6)^2=1$과 두 타원의 공통접선이 만나는 접점을 각각 P, Q라고 하자. P, Q는 제 1사분면에 있다. $\frac{(x-5)^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, $\frac{x^2}{4}+(y-6)^2=1$의 중심이 각각 O_1, O_2일 때 O_1P, O_2Q의 기울기가 각각 m, n이었다. 이때 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$을 구하여라.



4. 그림처럼 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 위에 점 P가 존재한다. 이 타원의 두 초점을 각각 F, F′(단, F의 x 좌표는 양수)라고 할 때, 삼각형 PF′F의 내접원이 PF, PF'와 만나는 점을 각각 A, B라고 하자. P를 중심으로 하고 A, B를 지나는 원을 그렸더니 y축에 접하였다.



이때 P, F', F를 지나는 포물선의 꼭짓점을 Q라고 할 때, OQ의 길이는 $\frac{p\sqrt{21}}{q}$(단, p와 q는 서로소)이다. p+q는?

위 문제들은 모두 자작 문제이다. 풀이를 다음 페이지부터 제시하며 이번 단원을 마치겠다.

1번 문제는 정석적으로 풀자면 A의 x 좌표를 k로 둘 때 $k^2 = a^2 - b^2 = c^2 + d^2$이라는 점을 활용하여 대입을 한 후 정리하여 푸는 대략 3점짜리 문제이다.

하지만 우리는 초점을 지나는 직선이 타원이나 쌍곡선과 만날 때 쓸 수 있는 공식이 있다. 그 공식에 의하면 $\frac{2a}{b^2} = \frac{1}{\overline{\mathrm{AF}}} + \frac{1}{\overline{\mathrm{BF}}}$이고 그림 상에서 타원과 쌍곡선이 만나는 두 점이 초점을 지나는 직선상에 위치하므로, $\frac{2a}{b^2} = \frac{2c}{d^2}$이다. 따라서 $\frac{b}{d} = \sqrt{\frac{a}{c}} = \sqrt{2}$로 답은 2번이다.

2번 문제는 초점을 지나는 직선이 쌍곡선과 한 점에서 만나는 경우로 초점을 지나는 직선의 기울기가 점근선의 기울기와 같은 상황이다. 다르게 보자면 $\frac{2a}{b^2} = \frac{1}{\overline{\mathrm{AF}}} + \frac{1}{\overline{\mathrm{BF}}}$의 상황에서 $\frac{1}{\overline{\mathrm{AF}}}$나 $\frac{1}{\overline{\mathrm{BF}}}$ 둘 중 하나가 0인 상황이다. 그 이유는 초점을 지나는 직선이 점근선의 기울기에 가까워질수록 $\overline{\mathrm{AF}}$나 $\overline{\mathrm{BF}}$의 값 중 하나는 무한대로 커지기 때문이다.

어쨌거나 결론적으로는 $\frac{2a}{b^2} = \frac{1}{\overline{\mathrm{AC}}}$인 상황이라고 볼 수 있으며, 기울기 $\frac{4}{3} = \frac{b}{a}$이므로 $\frac{1}{\overline{\mathrm{AC}}} \frac{16}{9} = \frac{2a}{b^2} \frac{b^2}{a^2} = \frac{2}{a}$이다. 또한 $\overline{\mathrm{AC}} = 26 - 2a$이므로 $\frac{1}{26-2a} \frac{16}{9} = \frac{2}{a}$이므로 a의 값은 9가 되며, $\overline{\mathrm{AC}} = 26 - 2a = 8$이다. 답은 4번이다.

3번은 타원을 따로따로 관찰해주겠다. 공통접선의 기울기를 k라고 하자. y축 방향을 $\frac{2}{3}$배 한다면 O_1을 중심으로 하는 원이 생기고, 이때 직선의 기울기들은 좌표축을 변환하기 전의 $\frac{2}{3}$배가 되므로 O_1P의 기울기가 $\frac{2}{3}\mathrm{m}$이 되며 공통접선의 기울기는 $\frac{2}{3}\mathrm{k}$가 된다. 원에 접하는 직선과 접점과 원의 중심을 이은 직선은 수직하며, 수직한다는 것은 기울기를 곱하면 -1이 된다는 것이다. 따라서 $\frac{2}{3}\mathrm{m} \cdot \frac{2}{3}\mathrm{k} = -1$이다.

같은 방식으로 처음으로 돌아간 상황에서 y축 방향을 2배 해주면 변하게 된 기울기가 $2\mathrm{n}, 2\mathrm{k}$가 되어 그 직선들이 수직이 되므로 $2\mathrm{n} \cdot 2\mathrm{k} = -1$이다. 두 식을 정리하면 답은 9다.

4번은 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=10, \overline{\mathrm{FF'}}=6=\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{BF'}}$이므로 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}=10-6=4$이고 $\overline{\mathrm{PA}}=2$이다. 이때 y축에 접한다는 조건 때문에 P의 x 좌표가 2가 되며, 타원의 방정식에 대입하면 y 좌표는 $\frac{4\sqrt{21}}{5}$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{PF}}$, $\overline{\mathrm{PF'}}$의 기울기는 각각 $-\frac{4\sqrt{21}}{5}$, $\frac{4\sqrt{21}}{25}$가 되며, 이를 활용하여 $\overline{\mathrm{QF}}$, $\overline{\mathrm{QF'}}$의 기울기 값을 m, n이라고 하면 $m=-n$이며 $\overline{\mathrm{PF}}$, $\overline{\mathrm{PF'}}$의 기울기 차가 $\overline{\mathrm{QF}}$, $\overline{\mathrm{QF'}}$의 기울기 차와 같으므로 $n-m=\frac{4\sqrt{21}}{25}-(-\frac{4\sqrt{21}}{5})=\frac{24\sqrt{21}}{25}$이다. 따라서 $n=\frac{12\sqrt{21}}{25}$이므로 Q의 y 좌표는 $3n=\frac{36\sqrt{21}}{25}$이므로 p=36, q=25이며 답은 61이다.

Ⅱ 평면 기하와 벡터

1. 정점과 동점

많이 나오는 문제 유형 중 정점 두 개 A, B를 주고 도형 위의 동점 P를 제시하며 AP, BP 값을 어쩌고 하는 종류에 대해 다루어 보겠다. 간략하게나마 알아두면 좋다.

1) $\overline{AP}+\overline{BP}$

사실상 많이 나오지는 않는 부류지만, 동점 P가 직선 위에 있고, A와 B가 직선으로 나눠진 두 부분 중 한쪽 부분에만 존재하는 상황에서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값을 구하는 방법은 알아두어야 한다. A를 직선에 대해 대칭 이동하여 옮긴 점 C에 대해 $\overline{BC}$의 길이를 구하면 된다. 또한 그 상황에서 P의 위치는 $\overline{BC}$와 직선의 교점이다.

이 부류가 이차곡선과 연계될 경우 나올 가능성이 상당히 커진다. 특히 초점과 관련한 특징을 활용하기 좋기에, 이차곡선의 특징을 잘 생각하며 문제를 풀어주자.

2) $a\overline{AP}^2+b\overline{BP}^2$

파푸스의 중선 정리에 의해 $\overline{AB}$의 중점을 M이라 하면 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{MP}^2)$이다. A, B가 정점이기에 $\overline{AM}^2$는 상수로 표현되므로 $\overline{MP}^2$에 의해 값이 정해진다는 점을 알 수 있다. 즉 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=k$로 일정할 때 P의 자취는 M을 중심으로 하는 원이 되고, $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$가 최소가 되도록 하는 도형 위의 동점 P의 위치는 M과 가장 거리가 가까운 도형 위 동점 P의 위치와 같다.

만약 $a\overline{AP}^2+b\overline{BP}^2$의 형태라서 a, b가 1이 아닌 상황이라면 어떻게 될까?

이 경우 이차곡선에서 잠시 언급한 스튜어트 공식을 사용하면 되는데, 이 공식에 의하면 $\overline{AB}$를 b:a로 내분하는 점 Q에 대해 $a\overline{AP}^2+b\overline{BP}^2=\frac{ab}{a+b}\overline{AB}^2+(a+b)\overline{PQ}^2$라는 공식이 성립한다. 어쨌거나 중요한 점은 $a\overline{AP}^2+b\overline{BP}^2$의 값이 $\overline{PQ}$가 최대일 때 최대이고 $\overline{PQ}$가 최소일 때 최소라는 점이다. 다시 언급하자면 점 Q는 $\overline{AB}$를 b:a로 내분하는 점이며, a:b가 아니다.

3) $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}|$

$\overline{AB}$의 중점을 M이라 하면 $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}=(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MP})+(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MP})=2\overrightarrow{MP}$이므로 $|\overrightarrow{MP}|$의 값이 최대일 때와 최소일 때 $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}|$의 값도 최대, 최소이다.

4) $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}$

$2\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = (|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}|)^2 - (|\overrightarrow{AP}|^2 + |\overrightarrow{BP}|^2)$인데 $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}|$의 값은 $|\overrightarrow{MP}|$에 의해 좌우되고, $|\overrightarrow{AP}|^2 + |\overrightarrow{BP}|^2$의 값 또한 2)에 의해 $|\overrightarrow{MP}|$에 의해 좌우되므로 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}$의 값은 $|\overrightarrow{MP}|$에 비례한다는 점을 확인할 수 있다.

5) $\angle APB$

원주각의 특성에 의해서 $\angle APB$가 일정한 P의 자취는 A와 B를 지나는 원의 형태를 그린다. 자주 나오는 특징은 아니지만 알아두자.

위 내용들만 다 알아두어도 웬만한 정점 동점 문제는 다 파악이 가능하다.

2. 벡터의 자유로운 활용

벡터는 잘 만지작거리면 계산량을 줄일 수 있고, 그런 의도로 만들어진 문제들도 많이 있다. 만지작거리는 방법을 살펴보자.

1) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}$

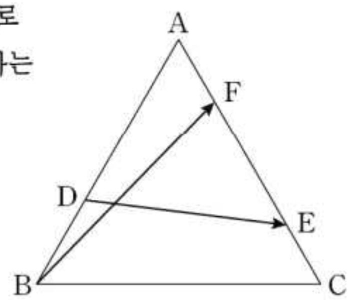
이것을 사용하면 알맞은 경우는 예를 들면 P가 원 위의 점일 때 원의 중심 O에 대해 $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP}$로 나누는 경우이다. $\overrightarrow{AO}$는 변하지 않고 $\overrightarrow{OP}$는 길이는 일정하고 방향만 변화하므로 파악하기 쉬워지며, 벡터끼리 연산할 때도 변하지 않는 부분을 먼저 계산한 후 변화하는 부분을 나중에 처리하는 식으로 활용할 수 있다.

2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

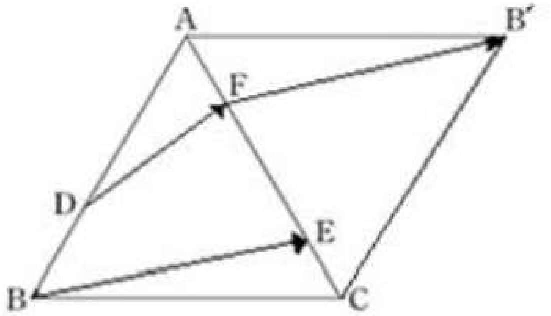
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$로 증명이 가능하다. 활용도가 없어 보이지만, 의외로 이 방법으로 문제를 꼬아서 낸 것을 쉽게 풀어내는 경우가 있다.

11. 한 변의 길이가 3인 정삼각형 ABC에서 변 AB를 2 : 1로 내분하는 점을 D라 하고, 변 AC를 3 : 1과 1 : 3으로 내분하는 점을 각각 E, F라 할 때, $|\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE}|^2$의 값은? [3점]

① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21



평가원 문제이다. 벡터가 교차하여 불편한 감이 있으니 풀어주자.

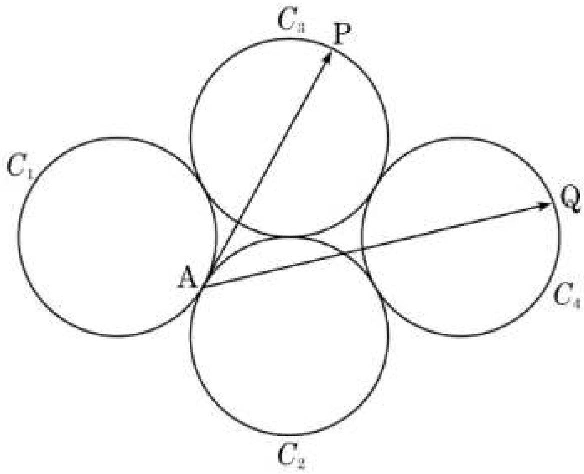


$\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{BE}$이므로 그렇게 바꾸어 주었고 정삼각형을 덧그려 $\overrightarrow{BE}$의 시작점을 F에 갖다 댄 모양이다. 이제 $\overline{DB'}$의 길이를 계산하면 끝나는 쉬운 문제가 되었으며 답은 19로 3번이다.

3) $\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{AC}=0$일 때 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{C'A}=\overrightarrow{C'B}$

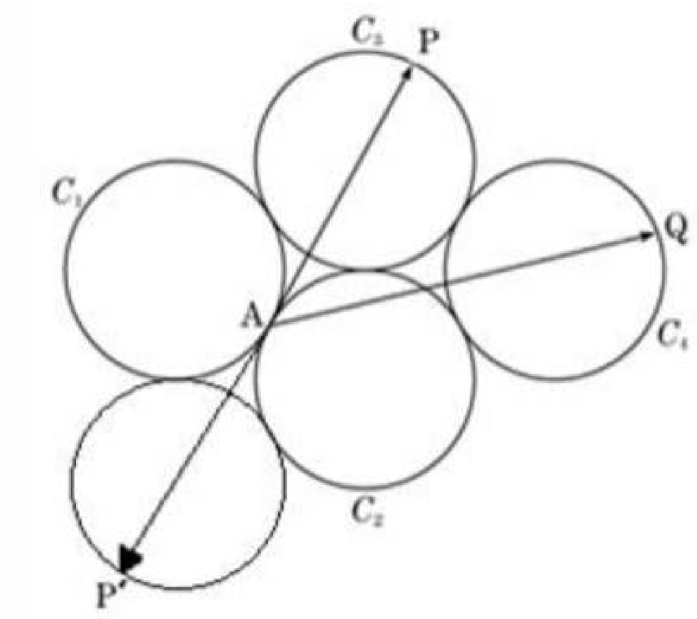
C와 C′의 중점이 A가 되도록 C′을 두면 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{C'B}$가 되어 계산하기 쉬워진다는 점을 활용한다.

21. 그림과 같이 평면 위에 반지름의 길이가 1인 네 개의 원 C_1, C_2, C_3, C_4가 서로 외접하고 있고, 두 원 C_1, C_2의 접점을 A라 하자. 원 C_3 위를 움직이는 점 P와 원 C_4 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}|$의 최댓값은? [4점]



① $4\sqrt{3}-\sqrt{2}$　② 6　③ $3\sqrt{3}+1$
④ $3\sqrt{3}+\sqrt{2}$　⑤ 7

이 문제는 3) 방법을 통하면 10초 만에 풀어낼 수 있다.

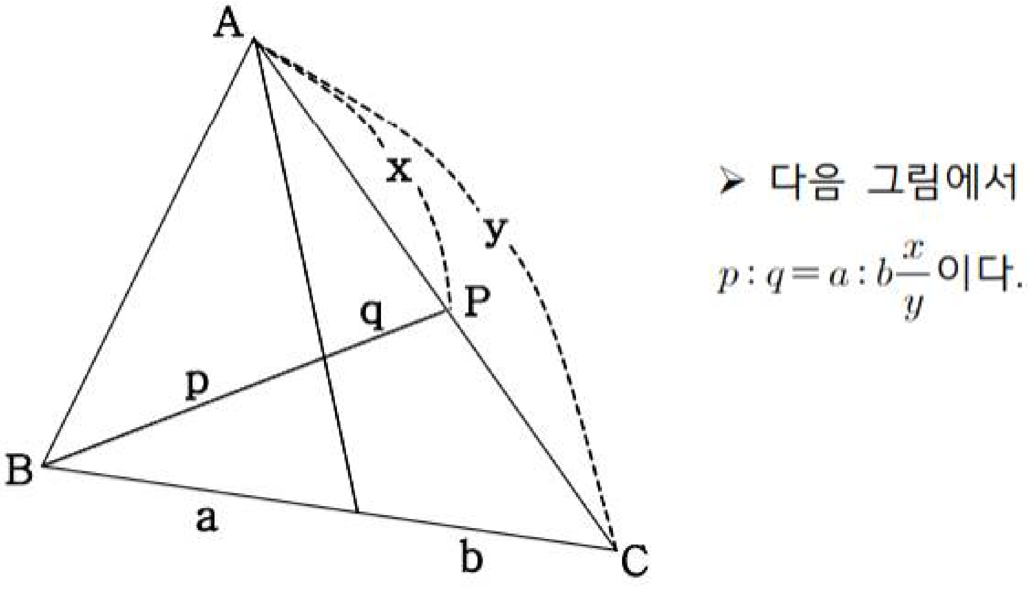


위 그림처럼 한다면 $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{P'Q}$가 되며, 가장 멀어지게 되는 경우는 쉽게 상상이 되고 그때 $|\overrightarrow{P'Q}|$의 크기는 지름 길이의 3배이므로 답은 2번 6이다.

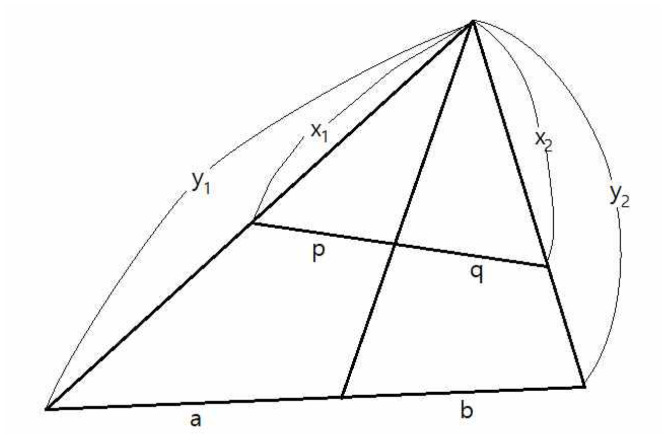
3. 메넬라오스의 정리

이건 상당히 유용하며 자주 써먹을 수 있는 공식이다.

메넬라우스의 정리를 실용성 있게 변형한 형태다.



그냥 일반적인 기하 문제, 예를 들면 삼각형의 크기 비 문제에도 사용 가능하고, 벡터의 합성을 풀 때도 자주 쓰일 수 있는 공식이다. 이것보다 더 심화적으로 쓰일 수 있는 공식도 소개하겠다.

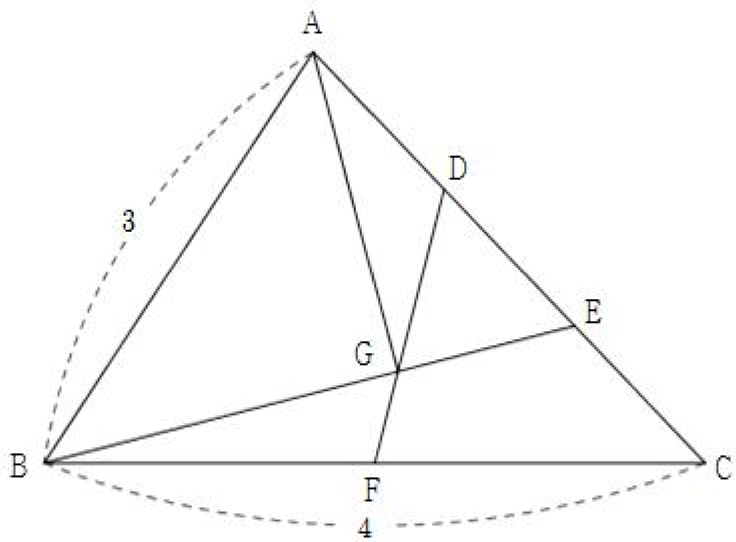


다음 그림에서

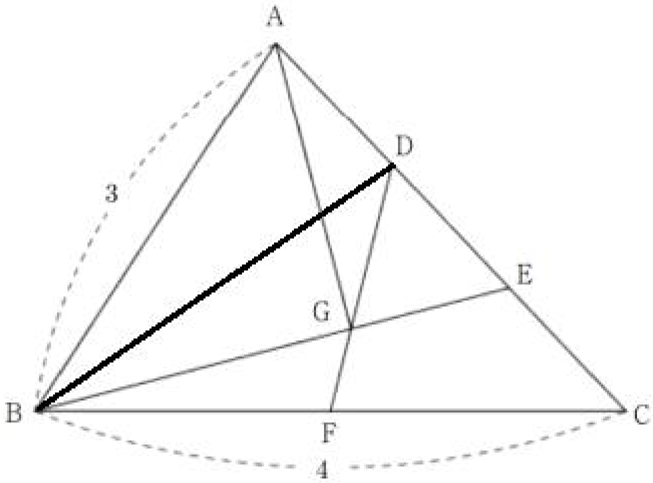
$p:q = a\frac{x_1}{y_1}:b\frac{x_2}{y_2}$이다.

이 공식을 적재적소에서 사용할 수 있도록 연습하면 좋다. 체화하기 그렇게 어려운 공식도 아니다. 시험해보겠다.

27. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=4$인 삼각형 ABC에서 선분 AC를 1:2로 내분하는 점을 D, 선분 AC를 2:1로 내분하는 점을 E라 하자. 선분 BC의 중점을 F라 하고, 두 선분 BE, DF의 교점을 G라 하자. $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BE}=0$일 때, $\cos(\angle ABC)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



사관학교 기출 문제로, 간단한 문제는 아니다.

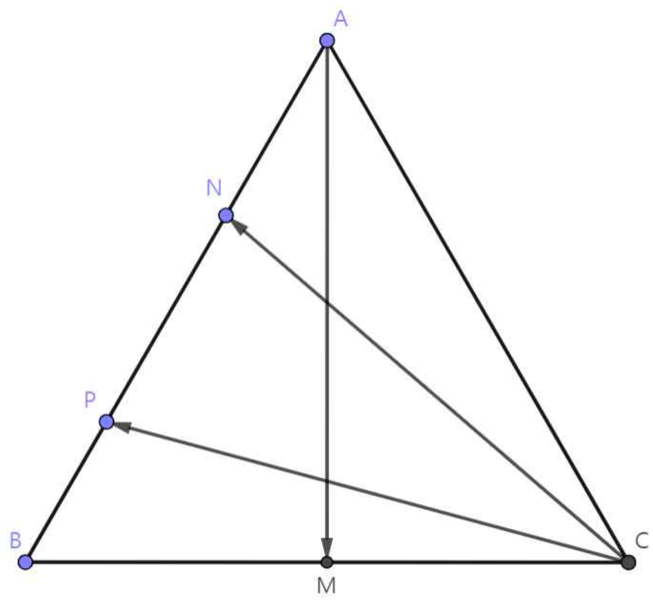


모처럼 $\overline{AB}, \overline{BC}$의 길이가 나와 있고 구하는 것이 각 ABC와 관련되어 있으므로 벡터를 $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$를 중심으로 잡아 분석하자. $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC})$이고, $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{BG}-\overrightarrow{BA}$인데 $\overline{BG}:\overline{EG}=\overline{BF}:\overline{FC}\frac{1}{2}=2:1$이므로 $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC})-\overrightarrow{BA}=\frac{1}{9}(-7\overrightarrow{BA}+4\overrightarrow{BC})$로 둘 수 있다. 따라서 $27\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AG}=(\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC})\cdot(-7\overrightarrow{BA}+4\overrightarrow{BC})=0$이며, 이 식을 정리하면 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=4\times3\times\cos\angle ABC=\frac{13}{2}$이므로 답은 24+13=37이다.

이상으로 이번 단원의 내용을 마치겠고, 연습 문제를 풀어보자.

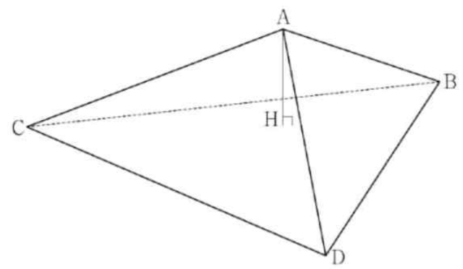
1, 좌표 평면 위의 점 A, B에 대해 $|\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}|\leq 8$을 만족하는 점 P가 나타내는 영역의 크기가 16π일 때 $\overline{AB}$의 길이의 최솟값을 m이라고 하자. m^2은?

2, 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정삼각형 ABC와 BC의 중점 M, A와 B를 1:2로 내분하는 점 N이 존재한다. $|\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{CP}|$의 값이 최소가 되도록 하는 선분 AB 위의 점 P에 대해 $|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CP}|^2$는?



3,

19. 한 변의 길이가 12인 정삼각형 BCD를 한 면으로 하는 사면체 ABCD의 꼭짓점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 점 H는 삼각형 BCD의 내부에 놓여 있다. 삼각형 CDH의 넓이는 삼각형 BCH의 넓이의 3배, 삼각형 DBH의 넓이는 삼각형 BCH의 넓이의 2배이고 $\overline{AH}=3$이다. 선분 BD의 중점을 M, 점 A에서 선분 CM에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, 선분 AQ의 길이는? [4점]

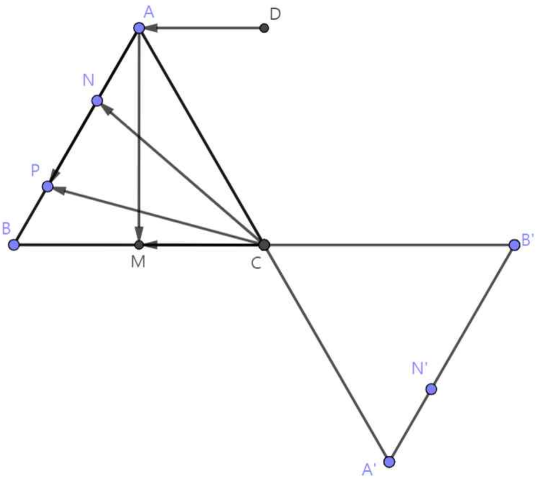


① $\sqrt{11}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{13}$ ④ $\sqrt{14}$ ⑤ $\sqrt{15}$

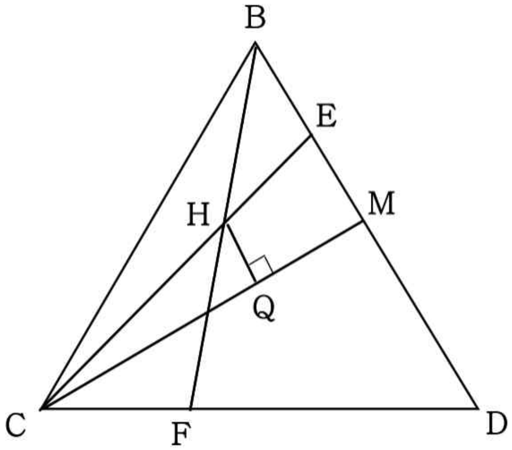
앞의 두 문제는 자작 문제고, 3번은 수능 기출이다.
다음 페이지에 풀이를 제시하겠다.

1번 문제에서 AB의 중점 M에 대해 $|\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}|=|(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MP})\cdot(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MP})|$이고 $\overrightarrow{BM}$은 $-\overrightarrow{AM}$이므로 $|\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}|=|(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MP})\cdot(-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MP})|=|\overline{MP}^2-\overline{AM}^2|\le 8$이라는 식이 성립한다. $\overline{AM}=k$라고 두면 $\sqrt{k^2-8}\le\overline{MP}\le\sqrt{k^2+8}$라는 조건으로 변화하는데, 이 조건에 따르면 P가 존재하는 영역은 점 M을 중심으로 하는 두 원 사이의 도넛과 같은 영역이 된다.

이것은 물론 k^2-8가 0 이상이어야 성립하며, 만약 k^2-8가 0보다 작다면 $0\le\overline{MP}\le\sqrt{k^2+8}$이라는 조건이 된다. $\sqrt{k^2-8}\le\overline{MP}\le\sqrt{k^2+8}$라는 조건에서 P가 존재하는 영역의 크기를 계산해보면 항상 16π가 된다. 따라서 k^2-8가 0보다 작을 때인 $k<2\sqrt{2}$인 경우에는 $0\le\overline{MP}\le\sqrt{k^2+8}$라는 조건에서 알 수 있듯이 P가 존재하는 영역은 항상 16π보다 작다. 따라서 $k\ge 2\sqrt{2}$이어야 하며, $\overline{AB}^2$의 최솟값은 32이다.



2번에서 그림처럼 $|\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{CP}|$를 쉽게 계산하기 위해 N을 A에 대해 대칭 이동하였다. 따라서 $|\overrightarrow{N'P}|$의 크기가 최소가 되면 되는데, 직선 위의 점과 직선 밖의 점의 거리를 최소로 하는 것이므로 P가 AB를 2:1로 내분하는 위치에 있음을 쉽게 알 수 있다. $|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CP}|^2=|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{CM}|^2$이므로 이를 쉽게 계산하도록 D의 위치를 설정하여 $|\overrightarrow{DP}|^2$의 값을 계산하면 간단하게 마무리된다. 답은 37이다.

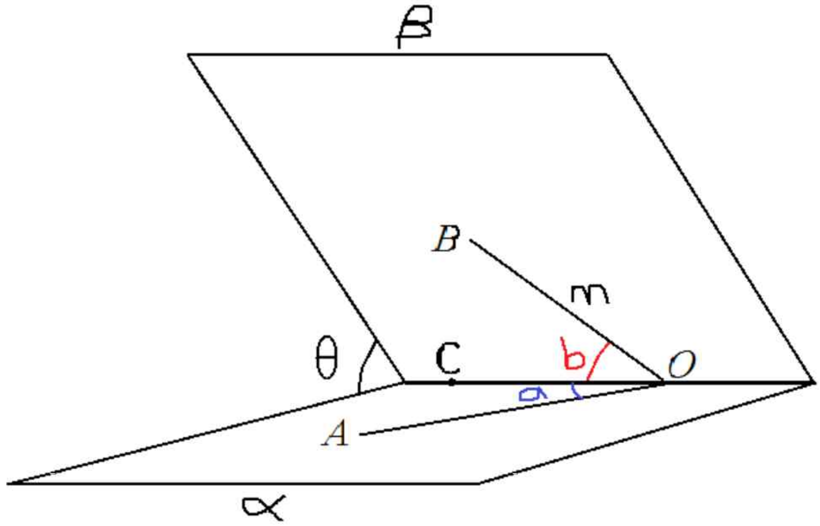


삼각형 CDH의 넓이가 BCH 넓이의 3배이므로 ED의 길이는 BE의 3배이다. 또한 삼각형 DBH의 넓이는 BCH 넓이의 2배이므로 FD의 길이는 CF의 2배이다. 이 관계에 메넬라오스 정리를 적용하면 $\overline{CH}:\overline{HE}=\overline{CF}:\overline{FD}\dfrac{\overline{BE}}{\overline{BD}}=2:1$이다. 즉 $\overline{QH}=\dfrac{2}{3}\overline{ME}=2$이며 피타고라스 정리를 사용하면 답은 3번이다.

Ⅲ 공간기하

공간기하에서는 이면각 공식이라는 것을 다뤄 보고자 한다. 내가 예전에 스스로 만든 것이었는데 알고 보니 대치동 어둠의 공식 중 하나였던 것 같다.

공간에 4개의 점 O, A, B, C가 존재한다고 할 때 각 AOC, 각 BOC, 각 AOB의 값을 모두 알 수 있는 경우, 삼각형 OAC를 포함하는 평면과 삼각형 OBC를 포함하는 평면의 이면각을 구할 수 있는 공식이다.

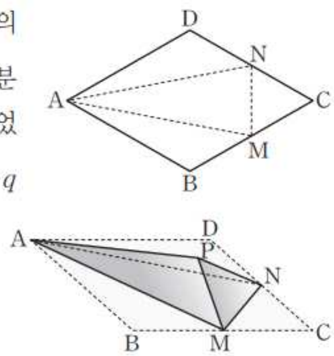


그림과 같은 상황이다. 구하고자 하는 이면각이 θ이고, 각 AOC, BOC, AOB의 크기를 각각 a, b, c로 둘 때, 다음과 같은 공식이 성립한다.

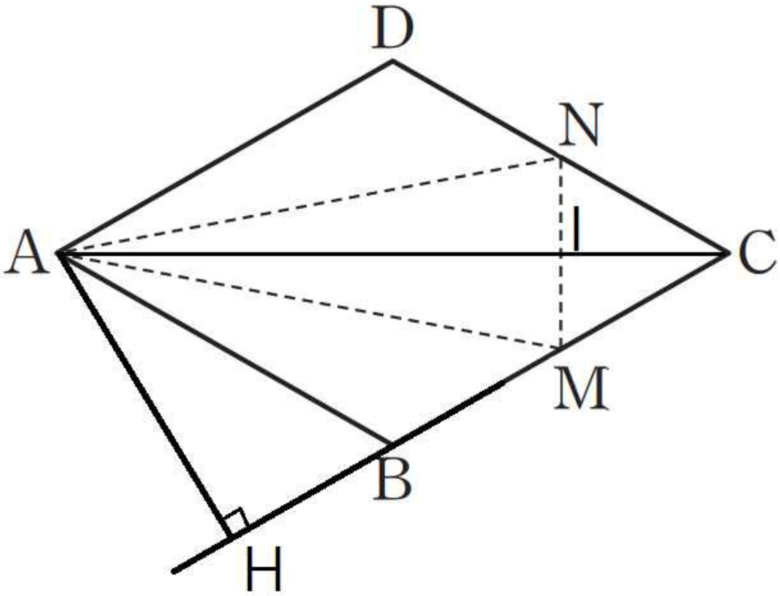
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\theta$$

이 공식을 사용하여 이면각을 구하기 편한 상황으로는 정육면체, 정사면체 등 입체도형 안에서 점을 찍어 만들어진 평면의 이면각을 구하는 상황이나, 전개도를 접어서 만들어지는 입체에서 평면끼리의 이면각을 재는 상황이다. 4개의 점으로 만들어진 직선 사이의 각도를 재기 쉬운 상황에서 사용하면 된다. 예시를 보자.

그림과 같이 한 변의 길이가 4이고 $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$인 마름모 ABCD 모양의 종이가 있다. 변 BC와 변 CD의 중점을 각각 M과 N이라 할 때, 세 선분 AM, AN, MN을 접는 선으로 하여 사면체 PAMN이 되도록 종이를 접었다. 삼각형 AMN의 평면 PAM 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 종이의 두께는 고려하지 않으며 P는 종이를 접었을 때 세 점 B, C, D가 합쳐지는 점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



현장 응시로 풀었던 수능 문제로 이면각 공식을 잘 활용했었다.

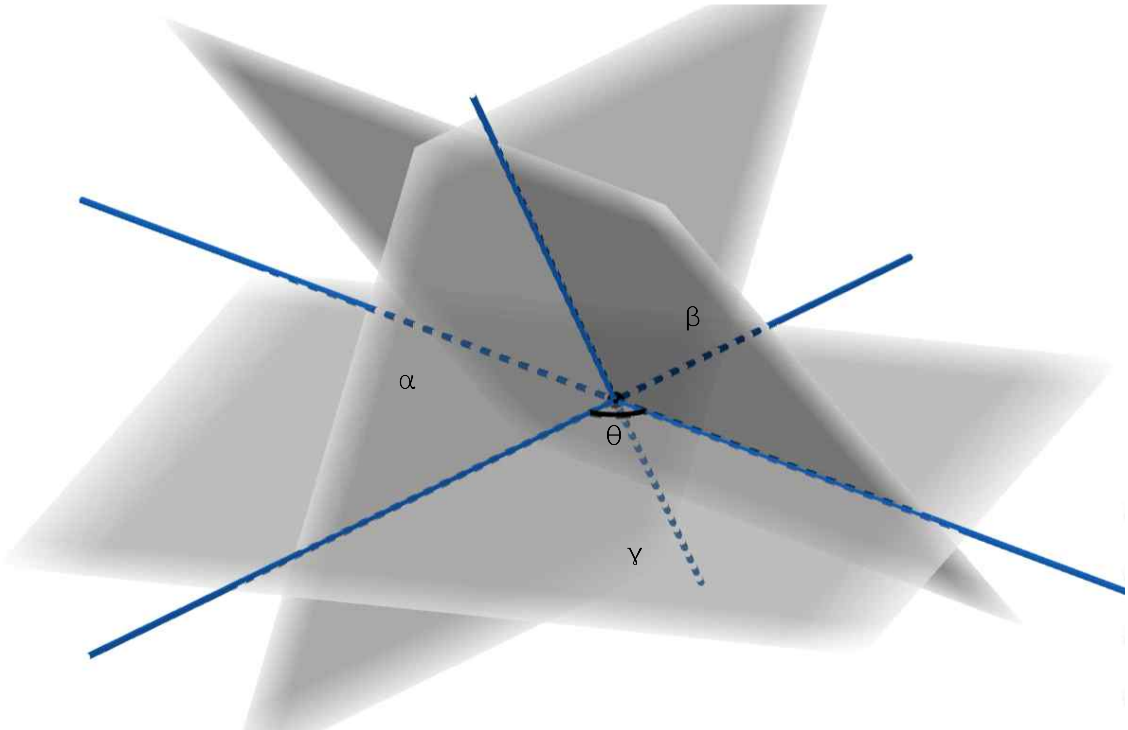


$\cos(\angle \mathrm{AMP})$, $\sin(\angle \mathrm{AMP})$, $\cos(\angle \mathrm{AMN})$, $\sin(\angle \mathrm{AMN})$, $\cos(\angle \mathrm{PMN})$을 구하기만 하면 이면각을 계산할 수 있다. 우선 $\angle \mathrm{AMP} = \angle \mathrm{AMH}$이고 $\overline{\mathrm{HM}} = \overline{\mathrm{HB}} + \overline{\mathrm{BM}} = 2+2=4$이고 $\overline{\mathrm{AH}} = 2\sqrt{3}$이므로 $\cos(\angle \mathrm{AMP}) = \cos(\angle \mathrm{AMH}) = \frac{2}{\sqrt{7}}$이다. 또 $\overline{\mathrm{MI}} = 1$이고 $\overline{\mathrm{AM}} = 2\sqrt{7}$이므로 $\cos(\angle \mathrm{AMN}) = \frac{1}{2\sqrt{7}}$이다. 그리고 $\cos(\angle \mathrm{PMN}) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$이다. sin 값들은 cos 값들을 통해 구하면 $\sin(\angle \mathrm{AMP}) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$, $\sin(\angle \mathrm{AMN}) = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$이다. 이제 공식에 대입하면 $\frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{7}}\frac{1}{2\sqrt{7}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}\cos\theta$이므로 정리하면 $\cos\theta = \frac{5}{9}$이다. 삼각형 AMN의 넓이가 $3\sqrt{3}$이므로 답은 $\frac{5}{3}\sqrt{3}$에서 3+5=8이다.

“너무 복잡한 거 같은데요? 정석 풀이 쓰는 게 더 빠르지 않을까요?”

정석 풀이를 완벽히 외운 사람과 이면각 공식을 사용한 풀이를 완벽히 외운 사람이 동시에 풀이를 시작한다면 어쩌면 정석 풀이가 더 빠를 수도 있지만, 정석 풀이는 문제를 보자마자 떠오르는 것이 아니며, 자기가 푸는 방향을 의심해야 한다. 내가 이 공식을 애용하는 이유는 점 4개가 주어지고 이면각을 구하는 상황에서 무지성으로 바로 공식을 사용하려고 달려들면 풀리기 때문이다. 즉 문제를 보자마자 적절한 풀이가 생각나게 된다는 것이 장점이고, 즉시 문제 풀이 방법이 보인다는 것은 시험장에서 매우 큰 장점으로 작용한다.

한편 4개의 점이 주어지지 않는 경우에 평면의 이면각을 구하고 싶으면 어떻게 해야 할지 고민을 했었다. 일반적으로는 교선에 수직인 선을 각 평면에 포함되도록 그은 후 두 개의 직선이 이루는 각을 재는 것이 정석적이다. 다소 복잡한 과정이 될 수 있기에, 이면각 공식의 변형본을 만들어내었다. 그림으로 확인하자.



평면 α가 γ와 이루는 각의 크기를 a(단, θ를 재는 쪽으로 잰 각도여야 함), 평면 β가 γ와 이루는 각의 크기를 b(단, θ를 재는 쪽으로 잰 각도여야 함)라고 하면, 평면 α와 β가 이루는 각도 c에 대해서 다음 공식이 성립한다.

$$\cos c = -\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\theta$$

평면이 3개가 주어지는 경우지만, 방금 다뤘던 원래 이면각 공식하고 형태는 거의 유사하다. 사실 변형 하지 않은 원본 공식보다 활용도는 많이 적어지지만 가끔 유용하다.

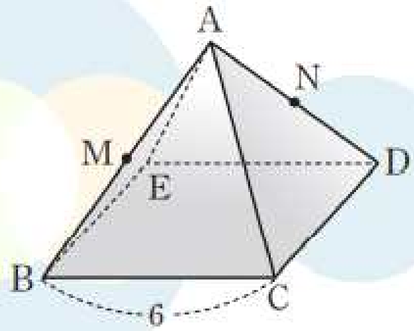
이상으로 단원을 마치며 연습 문제를 통해 이면각 공식에 익숙해져 보자.

1.

30

▸ 21056-1090

그림과 같이 모든 모서리의 길이가 6인 사각뿔 A$-$BCDE에서 선분 AB와 선분 AD의 중점을 각각 M, N이라 할 때, 평면 MCN과 평면 ABC가 이루는 예각의 크기를 θ라 하자.
$50\cos^2\theta$의 값을 구하시오. [4점]

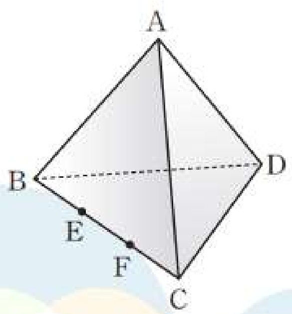


2.

26

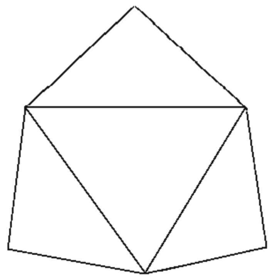
▸ 21056-1026

그림과 같이 한 모서리의 길이가 6인 정사면체 ABCD에서 모서리 BC를 삼등분하는 점을 점 B에서 가까운 것부터 차례로 E, F라 하자. 직선 AF와 직선 DE가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? (단, $0^\circ \le \theta \le 90^\circ$) [3점]



① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{3}{7}$
④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

3. 다음 그림과 같은 전개도가 있다. 이 전개도를 접으면 밑면이 정삼각형이고 3개의 옆면은 합동인 이등변삼각형이며, 높이는 4인 삼각뿔이 만들어진다. 전개도의 넓이가 $72\sqrt{3}$일 때, 두 옆면이 이루는 각을 θ라고 하자. $100|\cos\theta|$의 값은?



첫 번째, 두 번째 문제는 각각 수능 완성 모의고사 30번, 26번 출신이고, 3번은 내 자작 문제이다.

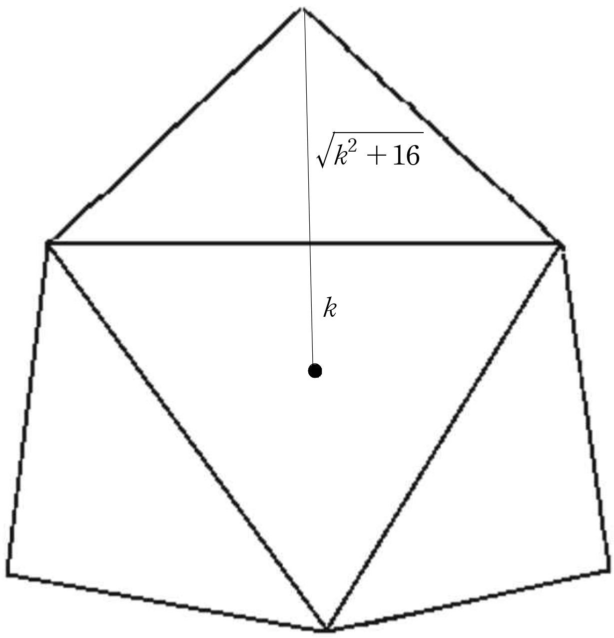
다음 페이지에서 풀이를 하겠다.

1번에서 $\cos(\angle \mathrm{AMN}) = \cos(\angle \mathrm{AMC})\cos(\angle \mathrm{CMN}) + \sin(\angle \mathrm{AMC})\sin(\angle \mathrm{CMN})\cos\theta$인데, $\angle \mathrm{AMN} = \frac{\pi}{4}$, $\angle \mathrm{AMC} = \frac{\pi}{2}$ 이며 $\cos(\angle \mathrm{CMN}) = \frac{\overline{\mathrm{MN}}}{2}\frac{1}{\overline{\mathrm{CM}}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$이기에 sin 값도 구해서 대입하면 $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \times \frac{1}{\sqrt{6}} + 1 \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\cos\theta$이므로 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \cos\theta$이다. 따라서 답은 30이다.

2번은 직선과 직선 사이의 각을 구하는 문제인데, 이면각이 쉽게 구해지는 경우에는 이면각 공식을 통해 구할 수 있다. 부호에 주의하자.

$$\cos\theta = \cos(\angle \mathrm{DEC})\cos(\angle \mathrm{AFC}) + \sin(\angle \mathrm{DEC})\sin(\angle \mathrm{AFC})\frac{1}{3} = -\frac{1}{\sqrt{28}}\frac{1}{\sqrt{28}} + \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{28}}\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{28}}\frac{1}{3}$$

이것을 계산하면 답은 2번이다.



3번에서 그림과 같이 밑면의 무게중심에서 변에 내린 수선의 발까지의 거리를 k라고 하면 수선의 발과 그 수선과 이어지는 이등변삼각형의 꼭짓점까지의 거리는 $\sqrt{k^2+16}$이다. 또한 밑면의 한 변의 길이는 $2\sqrt{3}k$이다. 따라서 $3\frac{1}{2}2\sqrt{3}k(k+\sqrt{k^2+16}) = 72\sqrt{3}$이고 이를 풀면 k는 3이다. 따라서 $\cos c = -\cos a\cos b + \sin a\sin b\cos\theta$ 공식을 사용하면 $\cos c = -\frac{3}{5}\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\frac{4}{5}\frac{1}{2} = -\frac{1}{25}$이므로 답은 4이다.

끝이다.

기하와 벡터 선택자들에게 축복을.