제 2 교시

2022학년도 EBS 수능특강 미적분 액기스 Final

수학 영역

홀수형

성명		수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

공통빽세 선택쉬워

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

본 자료 활용 방법)

1. xxxxx-xxxx 로 구성된 숫자는 교재의 문항번호입니다.
   오타가 있을 수 있으니, 해당 문제를 찾아 교재에서 푸는 것이 제일 Best합니다.

2. 문제/해설에 대한 오타제보는 kidae6150@gmail.com으로 보내주시면 감사히 시정하겠습니다.

<table>
<tr><td>11/19~11/22 (1주차)</td><td>11/22~27 (2주차)</td><td>11/29~(3주차)</td></tr>
<tr><td>〈학교별 Final〉
카톨릭 의예과, 서강대, 성균관, 경희대, 건국대, 과기대, 숭실대+항공대 진행</td><td>〈학교별 Final〉
한양대, 중앙대, 세종대+광운대, 고려대 약대, 경북대+부산대 진행</td><td>〈학교별 Final〉
인하대, 아주대 진행</td></tr>
<tr><td colspan="3">〈수리논술 액기스 Final〉
논술노베특강(3강) / 미적심화특강(1강) / 확통완성(3회) / 기하완성특강(2회)</td></tr>
<tr><td colspan="3">더 이상 뇌피셜 정보로 수업하는 논술 Final은 No! 쓸모없는 교과외공식과 대학수학만 가르치는 논술수업도 No!
대학별 성향에 맞는 문제만 엄선하여 짧은 시간에 최고의 효율을 선물하는 Final 수업입니다.
우수한 퀄리티의 모의고사로 증명한 ‘문제를 만드는 재주와 안목’은 수리논술에서도 적용됩니다.

특징)
1. 학교별 특성에 맞는 모의고사를 통해 초절정 시성비 제공, 어려운 문제를 쉽게 푸는 다양한 접근법 제시
2. 21년 한양대 모의논술 적중+이화여대 모의논술 수석, 20년 시립대 전체수석, 19년 한양대 모범답안자 배출 등등 보여지는 지표로도 항상 증명하는 참된 Final
3. 해설 후 답안재작성하는 시간을 부여하는 특이한 시간구성으로, 빈 답안지를 유도하여 쉽게 첨삭을 넘겨버리는 흔한 타 Final보다 훨씬 더 알찬 첨삭을 받을 수 있는 수업구성!!
4. 응용수학 대학원 박사과정 2인 (고려대, 연세대), 수학 관련대학원 석사과정 5인 (All SKY+보스턴Univ)을 비롯한 ‘최소’ 수학전공 3학년 이상 학부생까지 총 10명으로 구성된 최강 첨삭팀 (업계최고수준, 수능후 Final 첨삭 1,800건 중 ‘불만제보’ 오직 1건 (2020년))</td></tr>
</table>

특!

1. '21년' 한양대 모의 적중+이화여대 모의논술 수석, '20년' 시립대 수석, '19년' 한양대 모범답안자 배출 등등 보여지는 지표로도 항상 증명하는 참된 Final

21년 한양대 모의논술 적중

2. 극한값 $\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} n\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)dx\right]$와 $\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} n\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)dx\right]$을 구하시오.

3. 극한값 $\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5 - n\int_0^1 x^5 dx\right]$을 구하시오.

2021년 한양대 모의논술

[제시문 1]

함수 $f(x)=e^{x^2}$과 $t\in[\alpha,\beta]$ (단, α, β는 상수) 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

[문제 1-1] $f'(\alpha)\times(\beta-t)\le f(\beta)-f(t)\le f'(\beta)\times(\beta-t)$임을 보이시오. [5점]

[문제 1-2] $\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)-n\int_0^1 f(x)dx\right]$의 값을 구하시오. [15점]

2020년 기대T 수능 후 Final

이미 예견됐던 적중의 이유 -1

1. 양의 실수로 이루어진 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 어떤 자연수 k에 대하여 $\sum_{n=1}^{k}a_n=\sum_{n=1}^{k}b_n$을 만족한다고 하자. 양의 실수 x에 대하여 $x\ln x\ge x-1$이 성립함을 보이고, 부등식 $\sum_{n=1}^{k}a_n\ln b_n\le\sum_{n=1}^{k}a_n\ln a_n$을 보이시오.

19 한양대 의예과 문제

$\boxed{3}$ 正の実数 p_i, q_i $(i=1,2,\cdots,n)$が $\sum_{i=1}^{n}p_i=\sum_{i=1}^{n}q_i=1$ を満たすとき，次の問いに答えなさい。

(1) 不等式 $\log x\le x-1$ が成り立つことを証明しなさい。

(2) 不等式 $\sum_{i=1}^{n}p_i\log p_i\ge\sum_{i=1}^{n}p_i\log q_i$ が成り立つことを証明しなさい。

(3) $F=\sum_{i=1}^{n}p_i\log p_i$ の最小値を求めなさい。

(4) 正の実数 a_i $(i=1,2,\cdots,n)$に対して，$G=\sum_{i=1}^{n}a_i\log a_i$ の最小値を求めなさい。

일본대학 본고사 문제 (15학년도)

초고난도로 알려져있는 한양대 의예과 문제 중 소문제 하나가 일본 본고사 소문제 (2)와 완벽한 판박이!
(일본수학 및 대학교 학부수학에선 $\ln x$를 $\log x$로 씀.)

이토록 일본문제와 유사한 문제를 자주 내니, 한양대 Final의 Base는 일본본고사여야함이 당연하다. 이를 위해 본고사 3천여문제를 검토 및 선별할 정도로, Final에 쏟은 정성은 무한하다.

21년 이화여대 모의논술 수석

점수

구분	문제1	문제2	문제3	총점
내 점수	34	30	35	99
응시자평균	15.5	10.1	10.5	42.1
응시자최고	35	30	35	99
[illegible]	1	1	1	1
표준편차	9.5	10.1	10.5	23.2
순위분포	2.6%	15.1%	6.1%	0.2%

※ 순위분포 : 등수 / 전체응시생수 * 100%
예) 100명중 10등을 한 경우 상위누적은 10%
순위분포는 "개별응시 인원수" 에 대한 본인 순위의 비율이며, 숫자가 낮을수록 우수한 성적입니다.

2. 압도적 첨삭 시스템!! 비대면 수강생들도 1:1 첨삭 제공!!

첨삭시스템 비교

	일반적 Final	기대T Final
비대면 첨삭제공	첨삭 X	조교와 오픈카톡 매칭으로 1:1 첨삭 시스템 제공
답안 추가작성시간 제공 여부	제공 X → 문제풀기 급급 → 빈 답안지 제출 → 첨삭효율 ↓	제공 O → 추후 빈 답안지 보강 후 제출가능(혹은 못 풀었을시 해설강의 기반으로 답안작성) → 첨삭 받을 내용이 풍부해져 첨삭 효율 ↑
첨삭진 구성	일반 대학 알바생, 작년 합격 제자	Only 수학과/수교과 출신으로 구성된10인 최강 첨삭팀(업계최고수준! 박사과정 3인, 석사 및 학부졸업 5인 포함)

첨삭진이 부실하면 많은 양의 답안지를 첨삭해낼 수 없습니다. 그래서 지금까지의 Final들이 여러분에게 충분한 답안을 쓸 시간을 주지 않았던 거죠.

과거 3년 동안의 수험생활 중 제가 직접 겪었던 Final 첨삭의 불편한 진실을,최강 첨삭진들이 바로 잡아드립니다.

2022 기대모의고사 문제지

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. 21011-0019

일반항이 $a_n = \dfrac{an^2+2n}{n^2+1}$인 수열 $\{a_n\}$과 함수 $f(x)=x^2+x$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{f(a_n)-b}{a_n-a}=a+3$이 성립할 때, $a+b$의 값은? (단, az, b는 상수이다.) []

① -8
② -4
③ 0
④ 4
⑤ 8

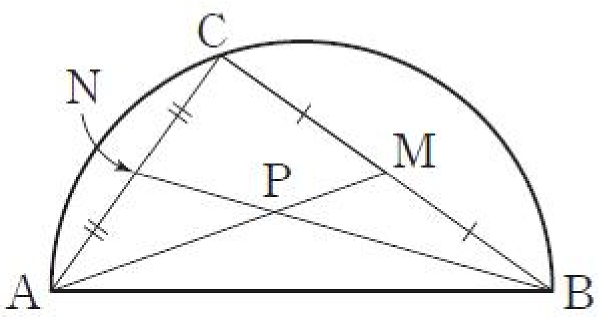
2. 21011-0039

$a_2=-\dfrac{1}{2}$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 제 n항까지의 부분합을 S_n이라 하자.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하고 모든 자연수 n에 대하여 $S_{n+1}+S_n=2n+a_1-\dfrac{pn^2+1}{n+1}$일 때, $p\times\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값을 구하시오. (단, p는 상수이다.) []

3. 21011-0068

그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 위의 점 C에 대하여 선분 BC의 중점을 M, 선분 AC의 중점을 N, 선분 AM과 선분 BN의 교점을 P라 하자. $\tan(\angle \mathrm{CBN})=\frac{\sqrt{2}}{4}$일 때, $\sin(\angle \mathrm{APB})$의 값은? []



① $\frac{\sqrt{3}}{3}$

② $\frac{7\sqrt{3}}{18}$

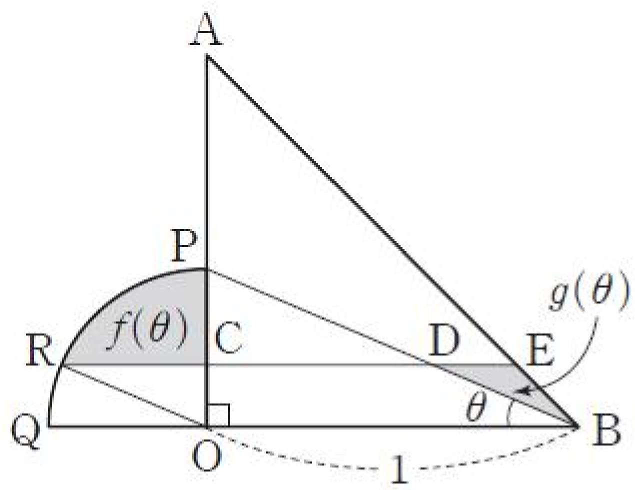
③ $\frac{4\sqrt{3}}{9}$

④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{9}$

4. 21011-0073

그림과 같이 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=1$, $\angle \mathrm{AOB}=\frac{\pi}{2}$인 직각이등변삼각형 AOB의 변 OA 위의 점 P에 대하여 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{OP}}$인 원이 선분 OB의 연장선과 만나는 점을 Q라 하자. 점 O를 지나고 직선 PB와 평행인 직선이 호 PQ와 만나는 점을 R라 하고, 점 R를 지나고 직선 OB와 평행인 직선이 세 선분 OA, PB, AB와 만나는 점을 각각 C, D, E라 하자.
$\angle \mathrm{OBP}=\theta$라 하고, 호 PR와 선분 RC, 선분 PC로 둘러싸인 도형의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 BED의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\theta \times f(\theta)}{g(\theta)}$의 값은? []



① $\frac{\pi}{8}$

② $\frac{\pi}{4}$

③ $\frac{3\pi}{8}$

④ $\frac{\pi}{2}$

⑤ $\frac{5\pi}{8}$

5. 21011-0093

실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x), g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to \ln 2} \frac{f(x)-5}{x-\ln 2} = 8$

(나) 모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{4+\{g(x)\}^2} = \frac{f(x)}{e^x}$이다.

$h(x) = f(x)g(x)$라 할 때, $h'(\ln 2)$의 값은? (단, 모든 양수 x에 대하여 $g(x) > 0$이다.) []

① $\frac{41}{2}$

② $\frac{43}{2}$

③ $\frac{45}{2}$

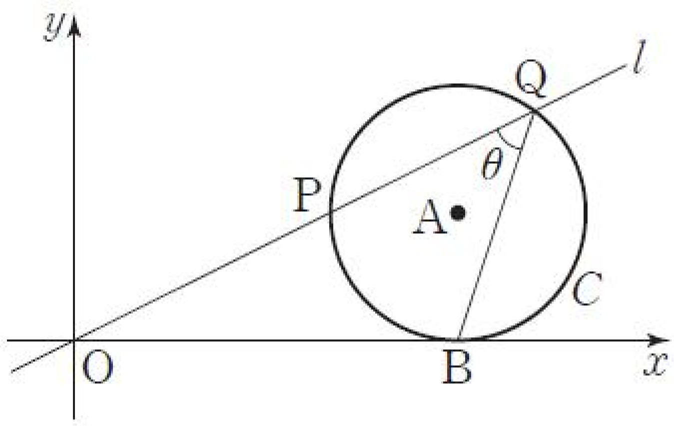
④ $\frac{47}{2}$

⑤ $\frac{49}{2}$

6. 21011-0094

그림과 같이 점 A(3, 1)을 중심으로 하고 점 B에서 x축과 접하는 원 C가 있다. 원점 O를 지나고 기울기가 양수인 직선 l이 원 C와 서로 다른 두 점에서 만날 때, 원점에서 가까운 점을 P, 원점에서 먼 점을 Q라 하고 $\angle BQO = \theta$라 하자. 선분 OP의 길이를 $f(\theta)$라 할 때, $f'(\frac{\pi}{4})$의 값은? []

(단, 직선 l의 기울기는 $\frac{3}{4}$보다 작다.)



① $\frac{\sqrt{5}}{5}$

② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

③ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

④ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

⑤ $\sqrt{5}$

7. 21011-0118

$0<x<2\pi$에서 정의된 함수 $f(x)=\cos x+1$에 대하여 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=t(0<t<2)$와 만나는 두 점을 각각 $A(\alpha(t),t),B(\beta(t),t)(\alpha(t)<\beta(t))$라 하고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 A, B에서의 접선이 y축과 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 선분 CD의 길이를 $g(t)$라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? []

< 보 기 >

ㄱ. $f'(\alpha(t))+f'(\beta(t))=0$

ㄴ. $\alpha'(t)\times\beta'(t)=-\csc^2(\alpha(t))$

ㄷ. $g'(\frac{1}{2})=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

① ㄱ
② ㄱ, ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

8. 21011-0136

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+f(-x)=\cos\frac{\pi x}{8}$를 만족시킨다.

$\int_{-2}^{2}f(x)dx=\frac{k}{\pi}$일 때, k^2의 값을 구하시오. []

9. 21011-0141

실수 전체의 집합에서 이계도함수가 존재하는 함수 $f(x)$가 $\int_0^{\pi}\{f''(x)+4f(x)\}\sin 2x dx+2\pi^2=0$을 만족시킨다. $f(0)=1$일 때, $f(\pi)$의 값은? []

① $\pi-1$
② π
③ $\pi+1$
④ π^2-1
⑤ π^2+1

10. 21011-0143

실수 전체의 집합에서 이계도함수가 존재하는 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$f(x)=\cos x-2\int_0^x f(t)\sin(x-t)dt$

를 만족시킬 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? []

< 보 기 >

ㄱ. $f(0)=1$

ㄴ. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t dt=\dfrac{f'(-\frac{\pi}{2})+f'(\frac{\pi}{2})}{2}$

ㄷ. $f''(0)=3$

① ㄱ
② ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11. 21011-0144

실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x), g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0, g(x)>0$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)=f(x)g(x)$이다.

$f(1)=g(1)$일 때, $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{g(n)}{f(n)}$의 값은? (단, n은 자연수이다.) []

① $\frac{1}{e+1}$

② $\frac{1}{e-1}$

③ $\frac{e}{e+1}$

④ $\frac{e}{e-1}$

⑤ $\frac{e+1}{e-1}$

12. 21011-0145

정의역이 $\{x|x>0\}$인 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여

$f(x)>0$, $\{f(x)\}^2-xf(x)f'(x)=x^4e^{-x}$을 만족시킨다.

$$\int_1^2\frac{e^{2x}\{f(2x)\}^3}{x^3}dx-12\int_2^4 f(x)dx=\frac{e^4}{m}\{f(4)\}^3-\frac{e^2}{2}\{f(2)\}^3$$

일 때, 자연수 m의 값을 구하시오. []

13. 21011-0174

정의역이 $\{x|-3<x<3\}$인 함수 $f(x)=\frac{\ln(3+x)+\ln(3-x)}{2}$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=-2$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이가 $m\ln5-4$이다. 자연수 m의 값을 구하시오. []

14. 21011-0175

정의역이 $\{x|x>0\}$이고 모든 양의 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=1$, $f(3)=2$
(나) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{7}{2}$이다.

함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때,

$\int_1^9 f'(\sqrt{x})dx+\int_1^4 \frac{g(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$의 값을 구하시오. []

2022 수능특강 미적분 선별			
1.	5	11.	2
2.	3	12.	16
3.	1	13.	5
4.	4	14.	6
5.	5		
6.	2		
7.	5		
8.	32		
9.	5		
10.	1		

!!수리논술 Final 신청링크 QR코드!!

논술 액기스 Final (Only Live/비대면)	강의	내용
* 모든 수업 기본적으로 1.25배속 편집하여 제공 -> 시간절약 효과 * 정규반 강의 중 일부분을 발췌했으며, 첨삭은 포함되지 않습니다.		
논술노베특강 (부제: 유베되기 9시간 전)	1강	증명법 (강한수학적귀납법, 귀류법 등)
	2강	미분 (고난도 미분, 사잇값정리와 평균값 정리)
	3강	적분 (고난도 적분, 삼각치환, 여러 적분테크닉)
* 수능 기하를 응시했다면 필수 수강! 수리논술에서 미적분 비중은 70%에 육박!! * 사실상 모든 학교에 도움이 되는 액기스 Final		
미적심화특강	1강	젠센부등식 활용, 함수방정식, 미분방정식
* 서울 중상위권 대학 논술 지원자거나 의치한약수 지원자라면 수강 강추하는 수업		
확통완성특강 (기본+심화)	1강	확률과 통계 전반적 개념 (조건부확률, 중복조합 등등)
	2강	포함배제의 원리
	3강	조합의 성질
* 확통이 포함되는 모든 학교에 반드시 도움이 되는 액기스 Final		
기하완성특강 (빈출 위주)	1강	기하 교과서 기본개념 톺아보기
	2강	논술용 고난도 주제정리, 문제풀이
* 수능에서 기하를 선택하지 않은 학생들은 1, 2강 모두 수강해야하며, 논술을 따로 준비하지 않은 기하러들은 1강은 빠르게, 2강은 착실히 들을 것		

2주차 (대면+비대면)	소개
한양대 (이과전체)	1. 한양대 모범답안자 배출, 22학년도 모의논술 문항 적중 등 기대T의 시그니쳐 강의 중 하나 2. 철저히 한양대 스러운 문제들로 구성한 모의고사 문제들에 곁들여지는 'Smart, But simple'을 강조하는 해설강의가 핵심 3. 출제스타일이 매우 유사한 이화여대 지원자도 수강 추천
중앙대 (이과+의예+약학)	1. 무난한 난이도로 대부분 출제되나 몇몇 킬러문제에 의해 당락이 결정되는 만큼 충분한 문풀 준비가 필요한 학교 2. 과와 관련없이 비슷한 난이도일 뿐더러 공통된 시험지형식으로 출제되는 학교이므로 의예과나 약학과, 또는 안성캠 지원자들도 상관없이 수강 가능
세종대+광운대 연합반	1. 제시문이 있냐(광운) 없냐(세종)로 난이도가 결정될 뿐 유사한 문제스타일을 가진 두 학교를 분석하면서 기출대비(=지원학교 문제)와 예상문제대비(=상대학교문제)를 동시에 할 수 있는 강좌 2. 두 학교 사이의 미묘한 출제경향차이 또한 강조해주기 때문에 둘 중 한 학교에 지원했더라도 수강 추천 (과년도 [세종:광운:둘다지원] 수강생비율 [3:4:3]) 3. 해설지만 봐서는 억지였던 풀이들이 수업을 들은 후 자연스럽게 익혀지는 신기한 경험 가능!
고려대 세종캠 약대	1. 고려대 본캠 수리논술 합격 출신 강사의 믿을 수 있는 출제예상 문항선별 안목 2. 논술을 처음 시행하는 약대인 만큼 모의논술에서도 무난한 난이도, 유명한 소재들 위주로 출제됐고 실제시험도 그럴 예정. 다른 학교 수리논술을 준비할 때에도 Base가 돼줄 필수주제 위주로 단기간 정리!
경북+부산 연합반 (Only Live + 비대면)	1. 수능형 스타일을 출제하는 학교들의 연합 Final. (의치약 지원자는 전용 Final 수강할 것!) 2. 고려 세종, 한국외대 지원자 수강 추천 (연세 미래캠 지원자도 수강은 가능하나 확통특강 추가하여 들을 것) 3. 1~3회차는 주로 출제될 수학I, II 위주 진행, 4~5회차 강의는 각 학교별 맞춤문제로 진행함으로써 학교별 개성까지 챙겨갈 수 있는 Final (경북, 외대 : 수학I,II / 부산, 고려:미적)
비고	* 전부 5회 수업 * 모든반 첨삭 제공 * 수업장소 : 대치오르비학원 (대면+비대면 전부 진행)

1)
[정답/모범답안]

5

[해설]

(i) $a=0$일 때

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}}{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=0$$

(ii) $a\neq 0$일 때

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+2n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a+2\times\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}$$

$$=\frac{a+2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=a$$

한편, $\lim_{n\to\infty}\frac{f(a_n)-b}{a_n-a}=a+3$에서 $a_n=t$로 놓으면

$n\to\infty$일 때, $t\to a$이므로

$\lim_{t\to a}\frac{f(t)-b}{t-a}=a+3\cdots$ ㉡

$t\to a$일 때, (분모)→0이므로 (분자)→0에서

$\lim_{t\to a}\{f(t)-b\}=0$

그러므로 $b=\lim_{t\to a}f(t)=f(a)$

이때 $f'(x)=2x+1$이므로 ㉡은

$\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}=f'(a)=2a+1=a+3$

이때 $a=2$이고 $b=f(2)=6$

(i), (ii)에 의하여

$a+b=2+6=8$

2)
[정답/모범답안]

3

[해설]

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S$라 하면

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}S_{n+1}=S$

이때

$S_{n-1}+S_n=2n+a_1-\frac{pn^2+1}{n+1}\cdots$ ㉠

에서 좌변의 극한은

$\lim_{n\to\infty}(S_n+S_{n-1})=\lim_{n\to\infty}S_n+\lim_{n\to\infty}S_{n-1}$

$=S+S=2S\cdots$ ㉡

또 우변의 극한은

$$\lim_{n\to\infty}\left(2n+a_1-\frac{pn^2+1}{n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+a_1)(n+1)-pn^2-1}{n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\{2n^2+(a_1+2)n+a_1\}-pn^2-1}{n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2-p)n^2+(a_1+2)n+a_1-1}{n+1}$$

이 극한값이 존재하려면 $p=2$이어야 한다.

이때 극한값은

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a_1+2)n+a_1-1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_1+2)+\frac{a_1-1}{n}}{1+\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{(a_1+2)+(a_1-1)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}$$

$=a_1+2\cdots$ ㉢

한편, ㉠에 $n=1$을 대입하면

$S_2+S_1=2+a_1-\frac{2\times 1^2+1}{1+1}$

$2a_1+a_2=a_1+\frac{1}{2}$

$a_1+a_2=\frac{1}{2}$

한편, $a_2=-\frac{1}{2}$이므로 $a_1=1$

㉡, ㉢에서

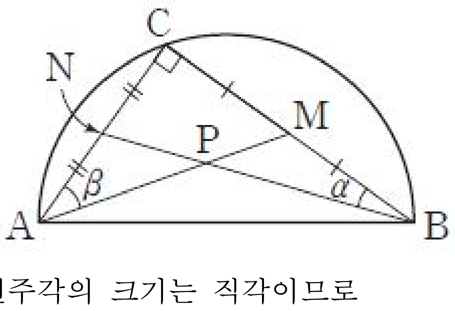
$2S=3, S=\frac{3}{2}$

따라서 $p\times\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2\times\frac{3}{2}=3$

3)
[정답/모범답안]

1

[해설]



반원에 대한 원주각의 크기는 직각이므로

$\angle ACB=\frac{\pi}{2}$

직각삼각형 CNB에서

$\angle CBN=\alpha$라 하면 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}$이므로

$\overline{BC}=4a\,(a>0)$으로 놓으면

$\overline{CN}=\sqrt{2}a$

$\overline{BN}=\sqrt{\overline{BC}^2+\overline{CN}^2}=\sqrt{16a^2+2a^2}=\sqrt{18a^2}=3\sqrt{2}a$

$\sin\alpha=\frac{\overline{CN}}{\overline{BN}}=\frac{\sqrt{2}a}{3\sqrt{2}a}=\frac{1}{3}$

$\cos\alpha=\frac{\overline{BC}}{\overline{BN}}=\frac{4a}{3\sqrt{2}a}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

직각삼각형 CAM에서

$\overline{AC}=2\overline{CN}=2\sqrt{2}a$, $\overline{CM}=\frac{1}{2}\overline{BC}=2a$이므로

$\overline{AM}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{CM}^2}=\sqrt{(2\sqrt{2}a)^2+(2a)^2}=\sqrt{12a^2}=2\sqrt{3}a$

$\angle CAM=\beta$라 하면

$\sin\beta=\frac{\overline{CM}}{\overline{AM}}=\frac{2a}{2\sqrt{3}a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\cos\beta=\frac{\overline{AC}}{\overline{AM}}=\frac{2\sqrt{2}a}{2\sqrt{3}a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

한편,

$\angle APB=\pi-(\angle PAB+\angle PBA)$
$=\pi-\{(\angle CAB-\beta)+(\angle CBA-\alpha)\}$
$=\pi-\{(\angle CAB+\angle CBA)-(\alpha+\beta)\}$
$=\pi-\{\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\}$
$=\frac{\pi}{2}+(\alpha+\beta)$

따라서 삼각함수의 성질과 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$\sin(\angle APB)=\sin(\frac{\pi}{2}+(\alpha+\beta))=\cos(\alpha+\beta)$
$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{6}{3}-\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}$
$=\frac{\sqrt{3}}{3}$

4)
[정답/모범답안]

4

[해설]

(i) 삼각형 POB에서

$\overline{OP}=\tan\theta$

삼각형 CRO에서 $\overline{OR}=\tan\theta$, $\angle CRO=\theta$이므로

$\overline{OC}=\tan\theta\sin\theta$

$f(\theta)$는 부채꼴 ROP의 넓이에서 삼각형 CRO의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\tan^2\theta\times(\frac{\pi}{2}-\theta)-\frac{1}{2}\times(\overline{OR}\times\overline{OC}\times\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)$

$=\frac{1}{2}\times\tan^2\theta\times(\frac{\pi}{2}-\theta)-\frac{1}{2}\times\tan\theta\times\tan\theta\sin\theta\times\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)$

$=\frac{\tan^2\theta}{2}\times(\frac{\pi}{2}-\theta-\sin\theta\cos\theta)$

(ii) $\overline{CE}=\overline{AC}=\overline{OA}-\overline{OC}$
$=1-\tan\theta\sin\theta$

삼각형 PCD에서

$\overline{CD}=\overline{PC}\times\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=(\overline{OP}-\overline{OC})\times\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=(\tan\theta-\tan\theta\sin\theta)\times\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=\tan\theta\times(1-\sin\theta)\times\frac{1}{\tan\theta}$

$=1-\sin\theta$

이므로

$\overline{DE}=\overline{CE}-\overline{CD}$
$=(1-\tan\theta\sin\theta)-(1-\sin\theta)$
$=\sin\theta\times(1-\tan\theta)$

즉,

$g(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{DE}\times\overline{OC}$
$=\frac{1}{2}\times\sin\theta\times(1-\tan\theta)\times\tan\theta\sin\theta$
$=\frac{\sin^2\theta\tan\theta\times(1-\tan\theta)}{2}$

(i), (ii)에서

$\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta\times f(\theta)}{g(\theta)}$

$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta\times\frac{\tan^2\theta}{2}\times(\frac{\pi}{2}-\theta-\sin\theta\cos\theta)}{\frac{\sin^2\theta\tan\theta\times(1-\tan\theta)}{2}}$

$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta\times\tan\theta\times(\frac{\pi}{2}-\theta-\sin\theta\cos\theta)}{\sin^2\theta\times(1-\tan\theta)}$

$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{\tan\theta}{\theta}}{\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{\pi}{2}-\theta-\sin\theta\cos\theta}{1-\tan\theta}$

$=1\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

5)
[정답/모범답안]

5

[해설]

조건 (가)에서 $\lim_{x\to\ln2}\frac{f(x)-5}{x-\ln2}=8$이고, $x\to\ln2$일 때 (분모) → 0이므로 (분자) → 0이어야 한다.

이때 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$f(\ln2)=\lim_{x\to\ln2}f(x)=5$

따라서 미분계수의 정의에 의하여

$\lim_{x\to\ln2}\frac{f(x)-5}{x-\ln2}=\lim_{x\to\ln2}\frac{f(x)-f(\ln2)}{x-\ln2}$
$=f'(\ln2)=8$

조건 (나)에서

$\sqrt{4+\{g(x)\}^2}=\frac{f(x)}{e^x}$ …… ㉠

이므로 ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{2g(x)g'(x)}{2\sqrt{4+\{g(x)\}^2}}=\frac{f'(x)e^x-f(x)e^x}{e^{2x}}$

$\frac{g(x)g'(x)}{\sqrt{4+\{g(x)\}^2}}=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$ … ㉡

㉠에 $x=\ln2$를 대입하면

$\sqrt{4+\{g(\ln2)\}^2}=\frac{f(\ln2)}{e^{\ln2}}$

$=\frac{5}{2}$

$\sqrt{4+\{g(\ln2)\}^2}=\frac{5}{2}$의 양변을 제곱하면

$4+\{g(\ln2)\}^2=\frac{25}{4}$

$\{g(\ln2)\}^2=\frac{9}{4}$

모든 양수 x에 대하여 $g(x)>0$이므로

$g(\ln2)=\frac{3}{2}$

ⓛ에 $x=\ln 2$를 대입하면

$$\frac{g(\ln 2)g'(\ln 2)}{\sqrt{4+\{g(\ln 2)\}^2}}=\frac{f'(\ln 2)-f(\ln 2)}{2}$$

즉, $\dfrac{\frac{3}{2}g'(\ln 2)}{\sqrt{4+\left(\frac{3}{2}\right)^2}}=\dfrac{3}{2}$에서

$g'(\ln 2)=\dfrac{5}{2}$

한편, $h(x)=f(x)g(x)$에서

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

따라서

$h'(\ln 2)=f'(\ln 2)g(\ln 2)+f(\ln 2)g'(\ln 2)$

$=8\times\dfrac{3}{2}+5\times\dfrac{5}{2}=\dfrac{49}{2}$

6)

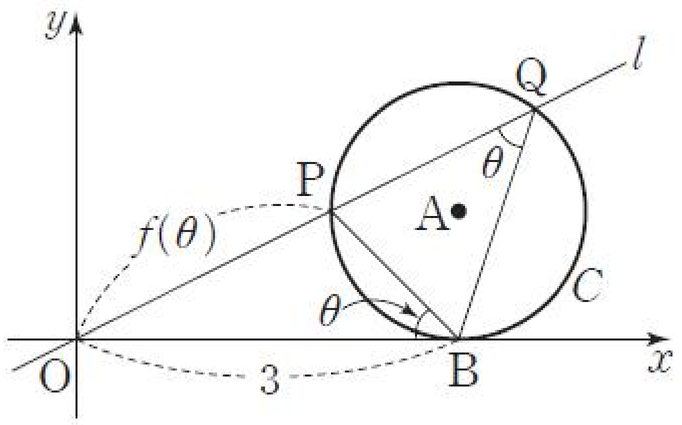
[정답/모범답안]

2

[해설]

원 C가 점 A(3, 1)을 중심으로 하고 x축에 접하므로 원 C의 반지름의 길이는 1이고, 점 B의 좌표는 (3, 0)이다. 원의 접선과 현이 이루는 각의 성질에 의하여

$\angle\mathrm{OBP}=\angle\mathrm{BQO}=\theta$



원 C는 삼각형 BQP의 외접원이므로 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{BP}}}{\sin\theta}=2$에서 $\overline{\mathrm{BP}}=2\sin\theta$

삼각형 POB에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{OP}}^2=\overline{\mathrm{OB}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2-2\times\overline{\mathrm{OB}}\times\overline{\mathrm{BP}}\times\cos\theta$

$=3^2+(2\sin\theta)^2-2\times 3\times 2\sin\theta\times\cos\theta$

$=4\sin^2\theta-12\sin\theta\cos\theta+9$

이므로

$\mathrm{f}(\theta)=\overline{\mathrm{OP}}$

$=\sqrt{4\sin^2\theta-12\sin\theta\cos\theta+9}$

이고,

$$f'(\theta)=\frac{8\sin\theta\cos\theta-12(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{2\sqrt{4\sin^2\theta-12\sin\theta\cos\theta+9}}$$

$$=\frac{4\sin\theta\cos\theta-6(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{\sqrt{4\sin^2\theta-12\sin\theta\cos\theta+9}}$$

따라서

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}-6\left(\cos^2\frac{\pi}{4}-\sin^2\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{4\sin^2\frac{\pi}{4}-12\times\sin\frac{\pi}{4}\times\cos\frac{\pi}{4}+9}}$$

$$=\frac{4\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-6\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{4\times\frac{1}{2}-12\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+9}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

{다른 풀이}

$f(\theta)=\sqrt{4\sin^2\theta-12\sin\theta\cos\theta+9}$ 에서

$\{f(\theta)\}^2=4\sin^2\theta-12\sin\theta\cos\theta+9\cdots\cdots$ ㉠

㉠에 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$를 대입하면

$\left\{f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}^2=4\times\dfrac{1}{2}-12\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+9$

$=2-6+9=5$

$f(\theta)>0$이므로

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{5}$

㉠의 양변을 θ에 대하여 미분하면

$2f(\theta)f'(\theta)$

$=8\sin\theta\cos\theta-12(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\cdots\cdots$ ㉡

㉡에 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$를 대입하면

$2\times\sqrt{5}\times f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=8\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}-12\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\right)$

$2\times\sqrt{5}\times f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=4$

따라서 $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

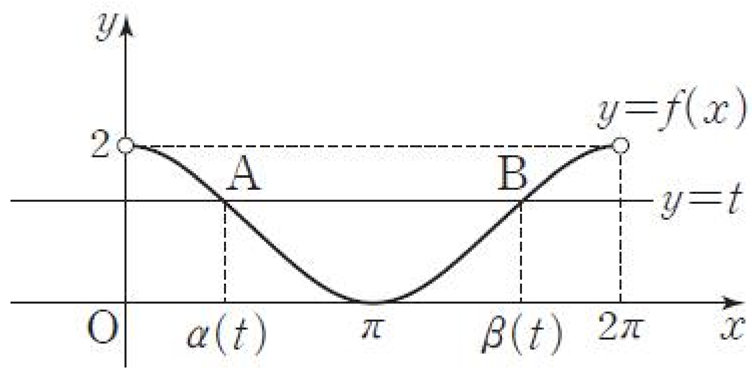
7)

[정답/모범답안]

5

[해설]

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$는 그림과 같다.



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$의 두 교점 A, B의 x좌표가 각각 $\alpha(t), \beta(t)$이고 곡선 $y=f(x)$가 직선 $x=\pi$에 대하여 대칭이므로

$\alpha(t)+\beta(t)=2\pi$에서

$\beta(t)=2\pi-\alpha(t)$

ㄱ. $f(x)=\cos x+1$에서 $f'(x)=-\sin x$

$\beta(t)=2\pi-\alpha(t)$이므로

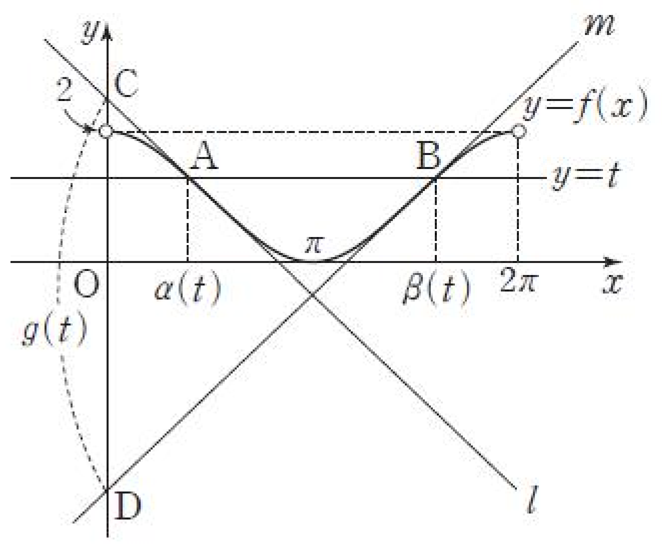
$f'(\alpha(t))+f'(\beta(t))$
$=-\sin(\alpha(t))-\sin(\beta(t))$
$=-\sin(\alpha(t))-\sin(2\pi-\alpha(t))$
$=-\sin(\alpha(t))+\sin(\alpha(t))$
$=0$ (참)

ㄴ. $f(\alpha(t))=t$에서 양변을 t에 대하여 미분하면
$f'(\alpha(t))\alpha'(t)=1$
$\alpha'(t)=\dfrac{1}{f'(\alpha(t))}=\dfrac{1}{\sin(\alpha(t))}$
$f(\beta(t))=t$에서 양변을 t에 대하여 미분하여 정리하면
$\beta'(t)=\dfrac{1}{f'(\beta(t))}=-\dfrac{1}{\sin(\beta(t))}$
이때 $\beta(t)=2\pi-\alpha(t)$이므로
$\beta'(t)=-\dfrac{1}{\sin(\beta(t))}=-\dfrac{1}{\sin(2\pi-\alpha(t))}$

따라서

$\alpha'(t)\times\beta'(t)=-\dfrac{1}{\sin(\alpha(t))}\times\dfrac{1}{\sin(\alpha(t))}$
$=-\dfrac{1}{\sin^2(\alpha(t))}$
$=-\csc^2(\alpha(t))$ (참)

ㄷ.



곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(\alpha(t),t)$에서의 접선의 방정식을 l이라 하

$l: y-t=f'(\alpha(t))(x-\alpha(t))$ …… ㉠

㉠에 $x=0$을 대입하여 직선 l이 y축과 만나는 점 C의 y좌표를 구하면

$t-f'(\alpha(t))\times\alpha(t)=t+\alpha(t)\sin(\alpha(t))$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{B}(\beta(t),t)$에서의 접선의 방정식을 m이라 하면

$m: y-t=f'(\beta(t))(x-\beta(t))$ …… ㉡

㉡에 $x=0$을 대입하여 직선 m이 y축과 만나는 점 D의 y좌표를 구하면

$t-f'(\beta(t))\times\beta(t)$
$=t-\{-\sin(\beta(t))\}\times\beta(t$
$=t-(2\pi-\alpha(t))\sin(\alpha(t))$
따라서
$g(t)=\{t+\alpha(t)\sin(\alpha(t))\}-\{t-(2\pi-\alpha(t)\sin(\alpha(t))\}$
$=2\pi\sin(\alpha(t))$ …… ㉢

한편, $t=\dfrac{1}{2}$일 때, $1+\cos x=\dfrac{1}{2}$, $\cos x=-\dfrac{1}{2}$이고,

$0<x<2\pi$이므로 $x=\dfrac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\dfrac{4}{3}\pi$

즉, $\alpha(\dfrac{1}{2})=\dfrac{2}{3}\pi$ …… ㉣

ㄴ의 풀이 중 $\alpha'(t)=-\dfrac{1}{\sin(\alpha(t))}$ 에서

$\alpha'(\dfrac{1}{2})=-\dfrac{1}{\sin(\alpha(\dfrac{1}{2}))}=-\dfrac{1}{\sin\dfrac{2}{3}\pi}$

$=-\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ …… ㉤

㉢의 양변을 t에 대하여 미분하면

$g'(t)=2\pi\cos(\alpha(t))\times\alpha'(t)$

따라서 위 식에 $t=\dfrac{1}{2}$을 대입하면 ㉣, ㉤에 의하여

$g'(\dfrac{1}{2})=2\pi\cos(\alpha(\dfrac{1}{2}))\times\alpha'(\dfrac{1}{2})$
$=2\pi\times\cos\dfrac{2}{3}\pi\times(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3})$
$=2\pi\times(-\dfrac{1}{2})\times(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3})$
$=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다

8)

[정답/모범답안]

32

[해설]

$\displaystyle\int_{-2}^{2}f(x)dx=\int_{-2}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{2}f(x)dx$

이때 $\displaystyle\int_{-2}^{0}f(x)dx$에서 $x=-t$로 놓으면

$x=-2$일 때 $t=2$, $x=0$일 때 $t=0$이고,

$1=-\dfrac{dt}{dx}$이므로

$\displaystyle\int_{-2}^{0}f(x)dx=-\int_{2}^{0}f(-t)dt=\int_{0}^{2}f(-t)dt$

따라서

$\displaystyle\int_{-2}^{2}f(x)dx=\int_{0}^{2}f(-x)dx+\int_{0}^{2}f(x)dx$

$\displaystyle=\int_{0}^{2}\{f(-x)+f(x)\}dx$

$\displaystyle=\int_{0}^{2}\cos\frac{\pi x}{8}dx$

$=\left[\dfrac{8}{\pi}\sin\dfrac{\pi x}{8}\right]_0^2$

$=\dfrac{8}{\pi}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\pi}$

즉, $k=4\sqrt{2}$이므로 $k^2=(4\sqrt{2})^2=32$

9)

[정답/모범답안]

5

[해설]

$\displaystyle\int_{0}^{\pi}f''(x)\sin 2x\,dx$에서

$u(x)=\sin 2x$, $v'(x)=f''(x)$로 놓으면

$u'(x)=2\cos 2x$, $v(x)=f'(x)$이므로

$\int_0^{\pi} f''(x)\sin 2x dx$

$=[f'(x)\sin 2x]_0^{\pi}-2\int_0^{\pi} f'(x)\cos 2x dx$

$=-2\int_0^{\pi} f'(x)\cos 2x dx$

또 $\int_0^{\pi} f'(x)\cos 2x dx$에서

$u_1(x)=\cos 2x,\ v_1{}'(x)=f'(x)$로 놓으면
$u_1{}'(x)=-2\sin 2x,\ v_1(x)=f(x)$이므로

$\int_0^{\pi} f'(x)\cos 2x dx$

$=[f(x)\cos 2x]_0^{\pi}+2\int_0^{\pi} f(x)\sin 2x dx$

$=f(\pi)-f(0)+2\int_0^{\pi} f(x)\sin 2x dx$

$=f(\pi)-1+2\int_0^{\pi} f(x)\sin 2x dx$

따라서

$\int_0^{\pi} f''(x)\sin 2x dx$

$=-2f(\pi)+2-4\int_0^{\pi} f(x)\sin 2x dx$

이므로

$\int_0^{\pi}\{f''(x)+4f(x)\}\sin 2x dx=-2f(\pi)+2$

즉, $-2f(\pi)+2=-2\pi^2$이므로
$f(\pi)=\pi^2+1$

10)

[정답/모범답안]

1

[해설]

ㄱ. $f(x)$

$=\cos x-2\int_0^x f(t)\sin(x-t)dt$

$=\cos x-2\int_0^x f(t)(\sin x\cos t-\cos x\sin t)dt$

$=\cos x-2\sin x\int_0^x f(t)\cos t dt+2\cos x\int_0^x f(t)\sin t dt$

이므로 $f(0)=1$(참)

ㄴ. $f(x)=\cos x-2\sin x\int_0^x f(t)\cos t dt+2\cos x\int_0^x f(t)\sin t dt$

$f'(x)$

$=-\sin x-2\cos x\int_0^x f(t)\cos t dt-2\sin x$

$\times f(x)\cos x-2\sin x\int_0^x f(t)\sin t dt+2\cos x\times f(x)\sin x$

이므로

$f'(x)=-\sin x-2\cos x\int_0^x f(t)\cos t dt-2\sin x\int_0^x f(t)\sin t dt\cdots\cdots$ ㉠

㉠에 $x=\frac{\pi}{2}$를 대입하면

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1-2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t dt\ \cdots\cdots$ ㉡

또 ㉠에 $x=-\frac{\pi}{2}$를 대입하면

$f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1+2\int_0^{-\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t dt$

$=1-2\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(t)\sin t dt\ \cdots\cdots$ ㉢

㉡+㉢에서

$f'(\frac{\pi}{2})+f'(-\frac{\pi}{2})$

$=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t dt-2\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(t)\sin t dt$

$=-2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t dt$

이므로

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t dt=-\frac{f'(-\frac{\pi}{2})+f'(\frac{\pi}{2})}{2}$(거짓)

ㄷ. $f'(x)=-\sin x-2\cos x\int_0^x f(t)\cos t dt-2\sin x\int_0^x f(t)\sin t dt$

의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f''(x)$

$=-\cos x+2\sin x\int_0^x f(t)\cos t dt$

$-2\cos x\times f(x)\cos x-2\cos x\int_0^x f(t)\sin t dt-2\sin x\times f(x)\sin x$

$=-\cos x+2\sin x\int_0^x f(t)\cos t dt$

$-2\cos x\int_0^x f(t)\sin t dt-2f(x)(\cos^2 x+\sin^2 x)$

$=-\cos x+2\sin x\int_0^x f(t)\cos t dt-2\cos x\int_0^x f(t)\sin t dt-2f(x)$

ㄱ에서 $f(0)=1$이므로

$f''(0)=-1-2f(0)=-1-2=-3$(거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

11)

[정답/모범답안]

2

[해설]

$f(x)>0,\ g(x)>0$이므로

조건 (나)의 식의 양변에 $\frac{1}{f(x)g(x)}$을 곱하면

$\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{g'(x)}{g(x)}=1$

이 식의 양변을 적분하면

$\ln|f(x)|-\ln|g(x)|=x+C$(단, C는 적분상수)

$\ln|\frac{f(x)}{g(x)}|=x+C$

이 식에 $x=1$을 대입하면 $\frac{f(1)}{g(1)}=1$이므로

$0=1+C$에서 $C=-1$

즉, $\ln\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|=x-1$

$f(x)>0,\ g(x)>0$이므로 $\frac{f(x)}{g(x)}=e^{x-1}$

따라서 $\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{1}{e^{x-1}}$이므로

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{g(n)}{f(n)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{g(k)}{f(k)}$

$=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{e}+\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e^3}+\cdots+\frac{1}{e^{n-1}})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{e}\{1-(\frac{1}{e})^{n-1}\}]}{1-\frac{1}{e}}$

$=\frac{\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}}=\frac{1}{e-1}$

{다른 풀이}

$g(x)>0$이므로 조건 (나)의 식의 양변에 $\frac{1}{\{g(x)\}^2}$을 곱하면

$\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}=\frac{f(x)}{g(x)}$

즉, $\{\frac{f(x)}{g(x)}\}'=\frac{f(x)}{g(x)}$

$\frac{f(x)}{g(x)}>0$이고, $\frac{\{\frac{f(x)}{g(x)}\}'}{\frac{f(x)}{g(x)}}=1$이므로

이 식의 양변을 적분하면

$\ln\frac{f(x)}{g(x)}=x+C$(단, C는 적분상수)

$\frac{f(1)}{g(1)}=1$이므로 $C=-1$

$\ln\frac{f(x)}{g(x)}=x-1$에서

$\frac{f(x)}{g(x)}=e^{x-1}$

12)

[정답/모범답안]

16

[해설]

$\{f(x)\}^2-xf(x)f'(x)=x^4e^{-x}$에서

$x>0$, $f(x)>0$이므로 양변에 $\frac{1}{f(x)}$을 곱하면

$f(x)-xf'(x)=\frac{x^4e^{-x}}{f(x)}$

$\frac{f(x)-xf'(x)}{x^2}=\frac{x^2e^{-x}}{f(x)}$

$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=-\frac{x^2e^{-x}}{f(x)}$

그런데 $\frac{d}{dx}\{\frac{f(x)}{x}\}=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$이므로

$\frac{d}{dx}\{\frac{f(x)}{x}\}=-\frac{x^2e^{-x}}{f(x)}$ …… ㉠

한편, $\int_1^2\frac{e^{2x}\{f(2x)\}^3}{x^3}dx$에서 $2x=t$로 놓으면

$x=1$일 때 $t=2$, $x=2$일 때 $t=4$이고,

2= $\frac{dt}{dx}$이므로

$\int_1^2\frac{e^{2x}\{f(2x)\}^3}{x^3}dx=\int_2^4\frac{8e^t\{f(t)\}^3}{2t^3}dt$

$=4\int_2^4 e^t\{\frac{f(t)}{t}\}^3dt$

이때 $\int_2^4 e^t\{\frac{f(t)}{t}\}^3dt$에서

$u(t)=\{\frac{f(t)}{t}\}^3$, $v'(t)=e^t$으로 놓으면 ㉠에서

$u'(t)=3\{\frac{f(t)}{t}\}^2\times\{-\frac{t^2e^{-t}}{f(t)}\}$

$=-3f(t)e^{-t}$

이고, $v(t)=e^t$이므로

$\int_2^4 e^t\{\frac{f(t)}{t}\}^3dt$

$=\left[\{\frac{f(t)}{t}\}e^t\right]_2^4+3\int_2^4 f(t)dt$

따라서

$\int_1^2\frac{e^{2x}\{f(2x)\}^3}{x^3}dx$

$=4\int_2^4 e^t\{\frac{f(t)}{t}\}^3dt$

$=\frac{e^4}{16}\times\{f(4)\}^3-\frac{e^2}{2}\times\{f(2)\}^3+12\int_2^4 f(t)dt$

이므로

$\int_1^2\frac{e^{2x}\{f(2x)\}^3}{x^3}dx-12\int_2^4 f(x)dx$

$=\frac{e^4}{16}\times\{f(4)\}^3-\frac{e^2}{2}\times\{f(2)\}^3$

즉, $m=16$

13)

[정답/모범답안]

5

[해설]

$f'(x)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3+x}-\frac{1}{3-x}\right)$

$=-\frac{x}{(3+x)(3-x)}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

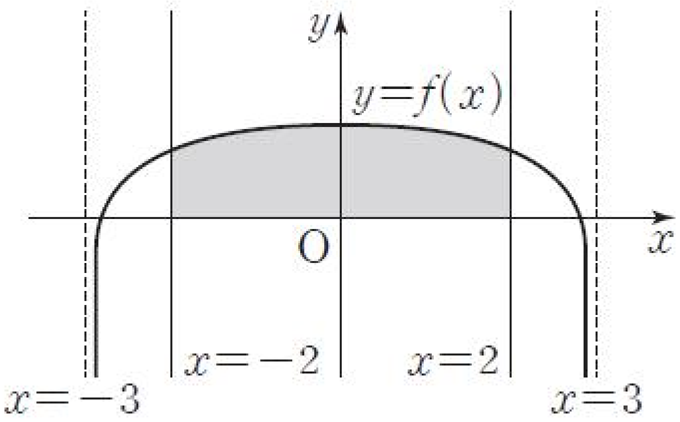
$-3<x<3$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(-3)	$\cdots$	0	$\cdots$	(3)
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	극대	↘	

$\lim_{x\to-3+}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to3-}f(x)=-\infty$이고,

$f(x)=0$에서 $x=-2\sqrt{2}$ 또는 $x=2\sqrt{2}$

또 $f(-x)=f(x)$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$\frac{1}{2}S=\int_0^2 \frac{\ln(3+x)+\ln(3-x)}{2}dx$

$S=\int_0^2 \{\ln(3+x)+\ln(3-x)\}dx$

$=\int_0^2 \ln(3+x)dx+\int_0^2 \ln(3-x)dx$

이때 $\int_0^2 \ln(3+x)dx$에서 $3+x=t$로 놓으면

$x=0$일 때 $t=3$, $x=2$일 때 $t=5$이고,

$1=\frac{dt}{dx}$이므로

$\int_0^2 \ln(3+x)dx=\int_3^5 \ln t dt$

또 $\int_0^2 \ln(3-x)dx$에서 $3-x=s$로 놓으면

$x=0$일 때 $s=3$, $x=2$일 때 $s=1$이고,

$-1=\frac{ds}{dx}$이므로

$\int_0^2 \ln(3-x)dx=-\int_3^1 \ln s ds=\int_1^3 \ln s ds$

따라서

$S=\int_3^5 \ln t dt+\int_1^3 \ln s ds$

$=\int_3^5 \ln t dt+\int_1^3 \ln t dt$

$=\int_1^5 \ln t dt$

$u(t)=\ln t$, $v'(t)=1$로 놓으면

$u'(t)=\frac{1}{t}$, $v(t)=t$이므로

$\int_1^5 \ln t dt=[t\ln t]_1^5-\int_1^5 dt$

$=[t\ln t]_1^5-[t]_1^5$

$=5\ln 5-4$

이므로 $m=5$

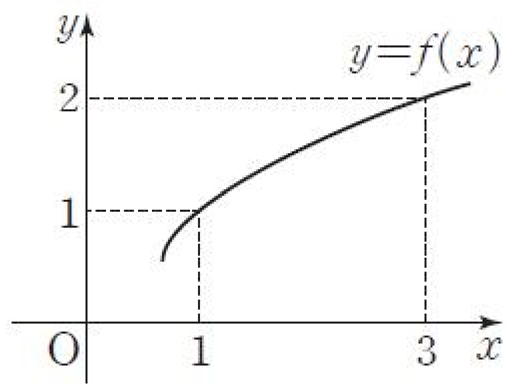
14)

[정답/모범답안]

6

[해설]

함수 $y=f(x)$의 그래프가 좌표평면의 두 점 (1, 1), (3, 2)를 지나고, $f'(x)>0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



(i) $\int_1^9 f'(\sqrt{x})dx$에서 $\sqrt{x}=t$로 놓으면

$x=1$일 때, $t=1$, $x=9$일 때 $t=3$이고,

$\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{dt}{dx}$, $\frac{1}{2t}=\frac{dt}{dx}$이므로

$\int_1^9 f'(\sqrt{x})dx=\int_1^3 2tf'(t)dt$

이때 $\int_1^3 2tf'(t)dt$에서

$u(t)=2t$, $v'(t)=f'(t)$로 놓으면

$u'(t)=2$, $v(t)=f(t)$이므로

$\int_1^3 2tf'(t)dt=[2tf(t)]_1^3-2\int_1^3 f(t)dt$

$=6f(3)-2f(1)-2\int_1^3 f(t)dt$

조건 (가)에서 $f(1)=1$, $f(3)=2$이고,

조건 (나)에서 $\int_1^3 f(x)dx=\frac{7}{2}$이므로

$\int_1^3 2tf'(t)dt=6\times2-2\times1-2\times\frac{7}{2}=3$

즉, $\int_1^9 f'(\sqrt{x})dx=3$

(ii) $\int_1^4 \frac{g(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$에서 $\sqrt{x}=s$로 놓으면

$x=1$일 때 $s=1$, $x=4$일 때 $s=2$이고,

$\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{ds}{dx}$이므로

$\int_1^4 \frac{g(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx=\int_1^2 2g(s)ds$

이때 $\int_1^3 g(s)ds$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 y축 및 두 직선 $y=1$, $y=2$로 둘러싸인 부분의 넓이이므로

$\int_1^2 g(s)ds=3\times2-1\times1-\frac{7}{2}=\frac{3}{2}$

즉, $\int_1^4 \frac{g(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx=2\times\frac{3}{2}=3$

(i), (ii)에서

$\int_1^9 f'(\sqrt{x})dx+\int_1^4 \frac{g(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx=3+3=6$