

제 2 교시

Epsilon

# 수학 영역(B형)



성균관대학교 수학교육과 Epsilon 주관

**5지선다형**

1. 두 행렬  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 에 대하여 행렬  $BA + 3B$ 의 모든 성분의 합은? [2점]

- ① 6      ② 7      ③ 8      ④ 9      ⑤ 10

2.  $\cos \theta = \frac{1}{4}$ 일 때,  $\sin 2\theta$ 의 값은? (단,  $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ ) [2점]

- ①  $-\frac{\sqrt{15}}{8}$       ②  $-\frac{\sqrt{15}}{16}$       ③  $\frac{\sqrt{15}}{32}$   
 ④  $\frac{\sqrt{15}}{16}$       ⑤  $\frac{\sqrt{15}}{8}$

3. 좌표공간에서 두 점  $A(1, -3, 2)$ ,  $B(4, 3, -1)$ 에 대하여 선분  $AB$ 를 2:1로 외분하는 점의 좌표가  $(a, b, -4)$ 이다.  $a-b$ 의 값은? [2점]

- ① -4      ② -2      ③ 0      ④ 2      ⑤ 4

4. 등차수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $a_1 + a_9 = 10$ ,  $a_{25} - a_9 = 10$ 일 때,  $\sum_{n=1}^{25} a_n$ 의 값은? [3점]

- ① 150      ② 200      ③ 250      ④ 300      ⑤ 350

5. 확률변수  $X$ 가 이항분포  $B(16, p)$ 를 따르고,

$$V(X) = \frac{3}{4}E(X)$$

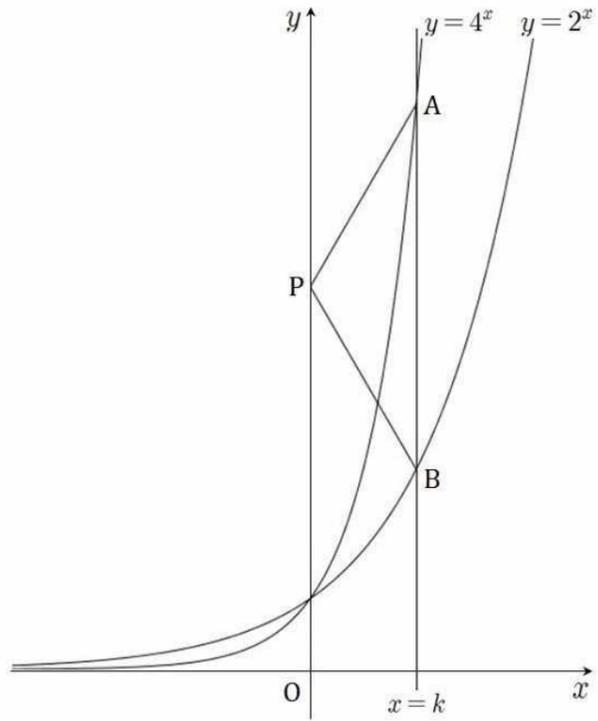
일 때,  $E(X^2)$ 의 값은? [3점]

- ① 4      ② 9      ③ 14      ④ 19      ⑤ 24

6. 좌표공간에서 평면  $\alpha : 3x - 2y + 2z + 1 = 0$ 에 수직이고,  
점  $(2, 2, 1)$ 를 지나고 직선이 점  $(-1, a, b)$ 을 지날 때,  
 $a+b$ 의 값은? [3점]

- ① -3      ② -1      ③ 1      ④ 3      ⑤ 5

7. 그림과 같이 두 함수  $y=4^x$ ,  $y=2^x$ 의 그래프가 직선  $x=k$ 와  
만나는 점을 각각 A, B라 하자.  $\overline{AP} = \overline{BP}$ 가 되도록  $y$ 축 위에  
점 P를 잡았을 때, 점 P의  $y$ 좌표를  $f(k)$ 라고 하자.  $f(k)=10$ 일  
때,  $k$ 의 값은? (단,  $k$ 는 상수이다.) [3점]



- ① 1      ② 2      ③ 3      ④ 4      ⑤ 5

8. 쌍곡선  $x^2 - y^2 = 9$  위의 점  $P(5, 4)$ 에서의 접선이 두 점근선  $y = mx$ 와  $y = m'x$ 과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 삼각형 OPA의 넓이를  $S_1$ , 삼각형 OPB의 넓이를  $S_2$ 라 할 때,  $\frac{S_1}{S_2}$ 의 값은? (단,  $m > 0$ 이고, O는 원점이다.) [3점]

- ①  $\frac{1}{4}$     ②  $\frac{1}{2}$     ③ 1    ④ 2    ⑤ 4

9.  $a \leq b \leq 4 \leq c < d \leq e \leq 10$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수  $a, b, c, d, e$ 의 모든 순서쌍  $(a, b, c, d, e)$ 의 개수는? [3점]
- ① 640    ② 720    ③ 740    ④ 820    ⑤ 840

10. 수열  $\{a_n\}$ 은

$$3 \sum_{k=1}^n a_k = 4a_n - 4^{n+1} \quad (n \geq 1) \dots\dots (*)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항  $a_n$ 을 구하는 과정이다.

주어진 식에서

$$3 \sum_{k=1}^{n+1} a_k = 4a_{n+1} - 4^{n+2} \dots\dots \textcircled{1}$$

이다.  $\textcircled{1}$ 에서 (\*)을 빼서 정리하면

$$a_{n+1} = 4a_n + \boxed{\text{가}}$$

이다.  $b_n = \frac{a_n}{4^n}$ 이라 하면

$$b_{n+1} = b_n + \frac{\boxed{\text{가}}}{4^{n+1}}$$

이다. 수열  $\{b_n\}$ 의 일반항을 구하면

$$b_n = \boxed{\text{나}}$$

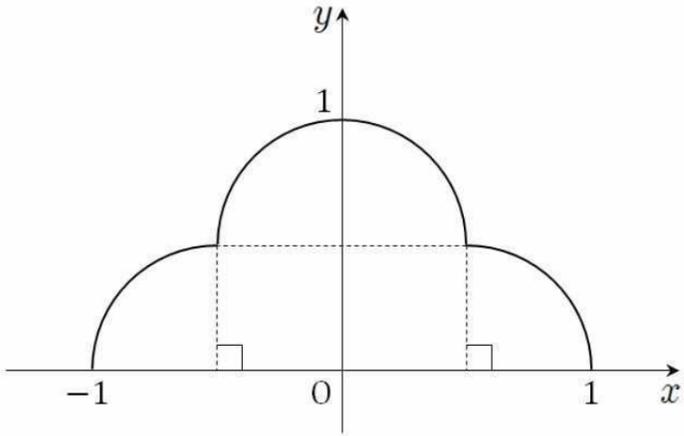
이다. 그러므로  $a_n = \boxed{\text{다}}$ 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각  $f(n)$ ,  $g(n)$ ,  $h(n)$

이라 할 때,  $\frac{g(5)h(2)}{f(3)}$ 의 값은? [3점]

- ①  $\frac{7}{3}$     ②  $\frac{10}{3}$     ③  $\frac{14}{3}$     ④  $\frac{19}{3}$     ⑤  $\frac{25}{3}$

11. 그림과 같이 함수  $f(x)$ 가 반지름의 길이가  $\frac{1}{2}$ 인 사분원들의 호로 이루어진 함수일 때, 방정식  $\sqrt{f(x)-x} = 2f(x) - 2x - 1$ 의 실근의 개수는? [3점]



- ① 1      ② 2      ③ 3      ④ 4      ⑤ 5

12. 밑변의 길이가  $n$ 이고 높이가  $h_n$ 인 이등변삼각형의 넓이를  $S_n$ 이라 하자.  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 9$ 일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

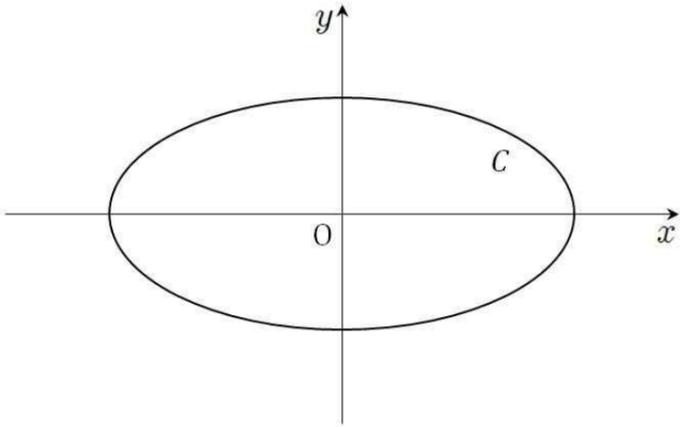
<보 기>

ㄱ.  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$   
 ㄴ.  $n = 6$ 일 때,  $h_n = 3$ 이다.  
 ㄷ. 이 이등변삼각형에 내접하는 원의 반지름을  $r_n$ 이라 하면  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_n}{r_n} = 2$ 이다.

- ① ㄱ                      ② ㄴ                      ③ ㄱ, ㄴ  
 ④ ㄱ, ㄷ                ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[13~14] 그림과 같이 곡선  $C : \frac{x^2}{4a^2} + y^2 = 1$ 가 있다.

13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



13.  $a=2$ 일 때, 곡선  $C$ 로 둘러싸인 부분을  $y$ 축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피는? [3점]

- ①  $\frac{4}{3}\pi$     ②  $\frac{8}{3}\pi$     ③  $\frac{16}{3}\pi$     ④  $\frac{32}{3}\pi$     ⑤  $\frac{64}{3}\pi$

14. 행렬  $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 2\sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}$ 로 나타내어지는 일차변환에 의하여 곡선  $C$ 가 옮겨지는 도형의 길이가  $14\sqrt{5}$ 일 때, 양수  $a$ 의 값은?

[4점]

- ① 2    ②  $\sqrt{6}$     ③  $2\sqrt{2}$     ④ 4    ⑤  $2\sqrt{6}$

15. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수  $y=f(x)$ 는 원점을 지난다.

(나)  $\frac{f'(x)-f(x)}{e^x} = 3x^2$

함수  $f(x)$ 의 극솟값이  $ae^b$ 일 때,  $ab$ 의 값은? [4점]  
(단,  $a, b$ 는 정수이다.)

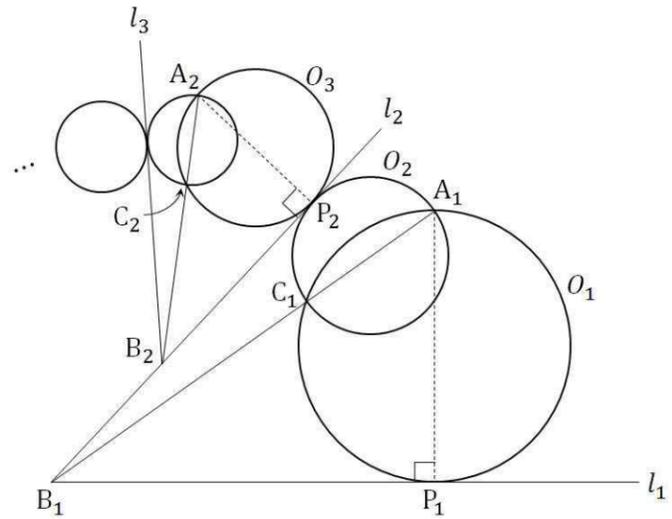
- ① 3      ② 9      ③ 27      ④ 81      ⑤ 243

16. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원  $O_1$ 이 있다. 원  $O_1$  위의 점  $P_1$ 를 지나는 접선을  $l_1$ 이라 하고,  $l_1$ 에 수직이고 점  $P_1$ 을 지나는 직선이 원  $O_1$ 과 만나는 점을  $A_1$ 이라 하자.

직선  $l_1$ 과 원  $O_1$  위에 각각  $\overline{A_1B_1} : \overline{A_1C_1} = 3 : 1$ 이 되도록 점  $B_1$ 과  $C_1$ 을 잡고, 선분  $A_1C_1$ 을 지름으로 하는 원을  $O_2$ 라 하자. 점  $B_1$ 에서 원  $O_2$ 에 그은 접선을  $l_2$ , 그 접점을  $P_2$ 라 하고, 원  $O_2$ 를 접선  $l_2$ 에 대하여 대칭이동 시킨 원을  $O_3$ 라 하자.

직선  $l_2$ 과 원  $O_3$  위에 각각  $\overline{A_2B_2} : \overline{A_2C_2} = 3 : 1$ 이 되도록 점  $B_2$ 과  $C_2$ 을 잡고, 선분  $A_2C_2$ 을 지름으로 하는 원을  $O_4$ 라 하자. 점  $B_2$ 에서 원  $O_4$ 에 그은 접선을  $l_3$ , 그 접점을  $P_3$ 라 하고, 원  $O_4$ 를 접선  $l_3$ 에 대하여 대칭이동 시킨 원을  $O_5$ 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여  $n$ 번째 얻은 원  $O_n$ 의 넓이를  $S_n$ 이라 할 때,  $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ①  $\frac{4}{3}\pi$       ②  $\frac{5}{3}\pi$       ③  $2\pi$       ④  $\frac{7}{3}\pi$       ⑤  $\frac{8}{3}\pi$

17. 정규분포  $N\left(m - \frac{1}{2}, \frac{\sigma^2}{4}\right)$ 을 따르는 확률변수  $X$ 에 대하여 정규분포를 따르는 확률변수  $Y$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가)  $Y = 2X + 1$   
 (나)  $P(Y \leq 2m - 2) = 0.1587$

$P(2m - 1 \leq Y \leq 2m + 2)$ 의 값을 오른쪽 정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

$x$	$P(2m \leq Y \leq x)$
$2m + 0.5\sigma$	0.1915
$2m + \sigma$	0.3413
$2m + 1.5\sigma$	0.4332
$2m + 2\sigma$	0.4772

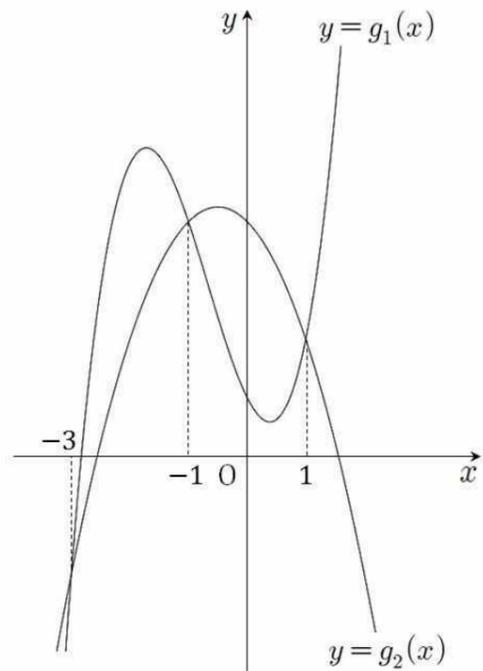
- ① 0.3830    ② 0.5328    ③ 0.6826    ④ 0.7745    ⑤ 0.8185

18. 그림과 같이 두 함수  $g_1(x)$ 와  $g_2(x)$ 의 그래프는 세 점에서 만나고, 그 세 점의  $x$ 좌표는  $-3, -1, 1$ 이다.

함수  $f(x) = (x+3)(x-2)(x-a)$ 에 대하여 함수  $g(x)$ 가

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) & (f(x) \geq 0) \\ g_2(x) & (f(x) < 0) \end{cases}$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

- ㄱ.  $a = 1$ 일 때,  $g(0) = g_1(0)$ 이다.  
 ㄴ.  $a = -1$ 일 때,  $g(x)$ 는  $x = -1$ 에서 연속이다.  
 ㄷ.  $g(x)$ 의 불연속점이 하나가 되도록 하는 실수  $a$ 의 개수는 4개이다.

- ① ㄱ                      ② ㄱ, ㄴ                      ③ ㄱ, ㄷ  
 ④ ㄴ, ㄷ                      ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 좌표공간의 세 구

$$\begin{cases} O_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ O_2 : (x-2)^2 + (y-2\sqrt{3})^2 + z^2 = 4 \\ O_3 : (x-4)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 9 \end{cases}$$

에 모두 접하는 두 평면이 이루는 예각의 크기를  $\theta$ 라 할 때,  $\cos\theta$ 의 값은? [4점]

- ①  $\frac{19}{21}$     ②  $\frac{17}{21}$     ③  $\frac{15}{21}$     ④  $\frac{13}{21}$     ⑤  $\frac{11}{21}$

20. 두 이차정사각행렬  $A, B$ 가

$$A^2 + 3AB = 2E, \quad (A+B)(A-B) = O$$

를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?  
(단,  $E$ 는 단위행렬이고,  $O$ 는 영행렬이다.) [4점]

<보 기>

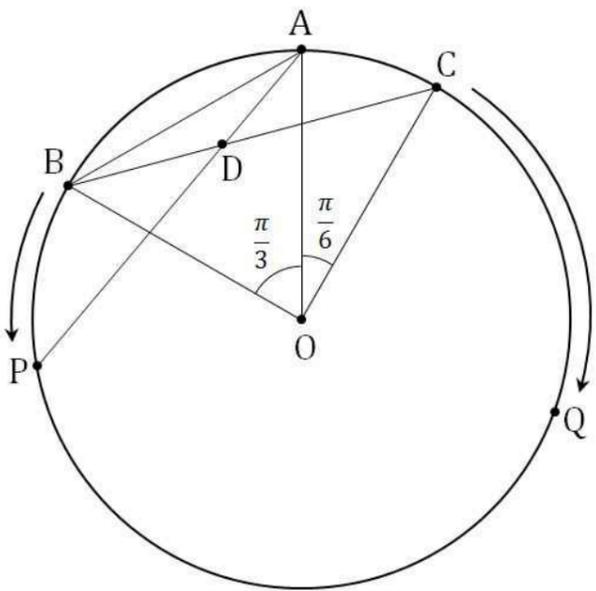
ㄱ.  $B$ 의 역행렬이 존재한다.

ㄴ.  $A^2B = BA^2$

ㄷ.  $(A+B)^5 = 4(A+B)$

- ① ㄴ                      ② ㄷ                      ③ ㄱ, ㄴ  
④ ㄱ, ㄷ                ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원 위에  $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ ,  $\angle AOC = \frac{\pi}{6}$ 을 만족하는 세 점 A, B, C가 있다. 원 위를 움직이는 두 점 P, Q에 대하여 선분 AP와 선분 BC의 교점을 D라 하자. 점 P는 점 B에서 출발하여 원 둘레를 따라 시계 반대 방향으로 매초 2의 일정한 속력으로 움직이고 있고, 점 Q는 점 C에서 출발하여 원 둘레를 따라 시계 방향으로 매초 4의 일정한 속력으로 움직이고 있다. 점 P, Q가 각각 동시에 점 B, C에서 출발하여 t초가 되는 순간, 삼각형 ABD의 외접원의 둘레의 길이를 L이라 하자. 점 P와 점 Q가 처음으로 만나는 순간, L의 시간(초)에 대한 변화율은? [4점]



- ①  $-\frac{2}{3}\pi$     ②  $-\frac{1}{3}\pi$     ③  $-\frac{1}{6}\pi$     ④  $\frac{1}{3}\pi$     ⑤  $\frac{2}{3}\pi$

단답형

22. 다항식  $(x+3)^5$ 의 전개식에서  $x^2$ 의 계수를 구하시오. [3점]

23. 두 개의 정사면체의 각 면에 1, 2, 3, 4의 숫자가 적혀있다. 준우와 호성이가 준우부터 시작하여 교대로 두 개의 정사면체를 동시에 던져서 밑면에 나온 수가 같으면 이기는 게임을 한다. 호성이가 이길 확률이  $\frac{q}{p}$ 일 때,  $p+q$ 의 값을 구하시오. (단,  $p$ 와  $q$ 는 서로소인 자연수이다.) [3점]

24. 어느 컵라면 공장을 대상으로 생산되는 컵라면 중 불량품의 비율을 조사하려한다. 이 공장에서 생산되는 컵라면 중 임의로 추출한 100개를 조사한 결과, 불량품의 개수는 20개였다. 이 결과를 이용하여 이 공장에서 생산되는 컵라면 중 불량품의 비율에 대한 신뢰도 95.44%의 신뢰구간의 길이가  $\frac{q}{p}$ 일 때,  $p+q$ 의 값을 구하시오. (단,  $p$ 와  $q$ 는 서로소인 자연수이고,  $Z$ 가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때,  $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 이다.) [3점]

25. 단면의 반지름의 길이가  $r$ 인 원기둥 모양의 어느 호스에 물이 가득 차 흐르고 있다. 호스의 길이를  $L$ , 단위시간당 흐르는 물의 양을  $Q$ , 호스 양 끝의 압력차를  $\Delta P$ 라 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$\Delta P = \frac{8kLQ}{r^4}$$

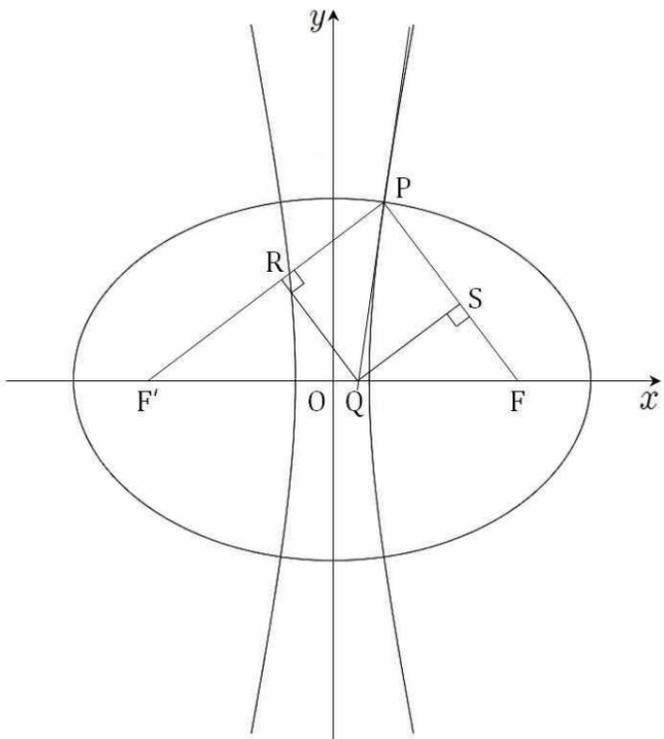
(단,  $k$ 는 양의 상수이고, 반지름의 단위는 cm, 호스 길이의 단위는 m 이고, 단위시간당 흐르는 물의 양은 일정하다.)

길이가 2이고 단면의 반지름의 길이가 2인 호스를 길이가 8이고 반지름의 길이가  $a$ 인 호스로 교체하려한다. 호스 양 끝의 압력차는 변하지 않게 하려할 때,  $a^6$ 의 값을 구하시오. [3점]

26. 닫힌구간  $[-5, 5]$ 에서 정의된 두 함수  $f(x) = 3\sin \frac{\pi}{2}x$ ,  $g(x) = x^2 - 4$ 에 대하여 부등식  $\frac{g(x)}{f(x)} \leq 1$ 을 만족시키는 모든 정수  $x$ 의 곱을 구하시오. [4점]

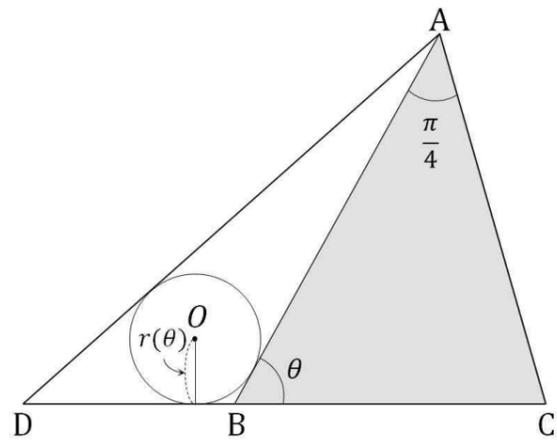
27. 그림과 같이 타원  $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ 과 쌍곡선  $x^2 - \frac{y^2}{24} = 1$ 의 두 초점을 F, F'라 하고, 타원과 쌍곡선의 한 교점을 P라 하자. 쌍곡선 위의 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q, 점 Q에서 선분 PF'와 선분 PF에 내린 수선의 발을 각각 R, S라 하자. 쌍곡선 위의 점 P에서의 접선이  $\angle F'PF$ 를 이등분할 때, 두 선분 QR과 QS의 길이의 곱  $\overline{QR} \times \overline{QS}$ 의 값은  $\frac{q}{p}$ 이다.  $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4점]



28. 길이가 2인 선분 AB을 한 변으로 하고  $\angle BAC = \frac{\pi}{4}$ ,  $\angle ABC = \theta$ 인 삼각형 ABC가 있다. 그림과 같이 선분 BC의 연장선 위에  $\overline{BD} = 1$ 가 되도록 점 D를 잡고, 삼각형 ABD의 내접원을 O라 하자. 원 O의 반지름을  $r(\theta)$ , 삼각형 ABC의 넓이를  $S(\theta)$ 라 할 때,  $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{r(\theta)}{S(\theta)} = \frac{q}{p}$ 이다.  $p^2 + q^2$ 의 값을 구하시오. (단,  $0 < \theta < \frac{3}{4}\pi$ , p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4점]

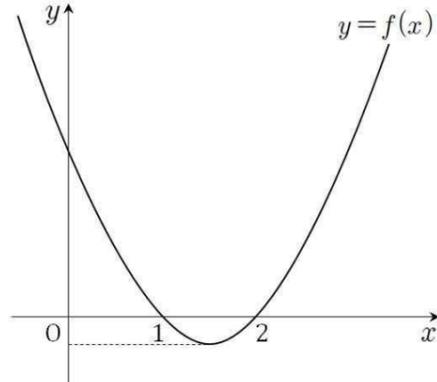


29. 좌표공간에서 점  $A_0$ 와 같은 거리에 있는 세 점  $A_1, A_2, A_3$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 두 벡터  $\overrightarrow{A_1A_2}$ 와  $\overrightarrow{A_2A_3}$ 는 서로 수직이다.  
 (나)  $\overrightarrow{A_0A_k} \cdot (\overrightarrow{A_0A_3} - \overrightarrow{A_0A_{3-k}}) = 4\cos \frac{3-k}{3}\pi$  ( $k=1, 2, 3$ )

삼각형  $A_0A_1A_2$ 의 경계 및 내부에서 움직이는 점을  $P$ , 삼각형  $A_0A_2A_3$ 의 경계 및 내부에서 움직이는 점을  $Q$ 라 하자.  $2|\overrightarrow{PQ}|^2 - |\overrightarrow{A_0P}|^2 - |\overrightarrow{A_0Q}|^2$ 의 최댓값을 구하시오. (단, 네 점  $A_0, A_1, A_2, A_3$ 은 한 평면 위에 있지 않다.) [4점]

30. 그림과 같이 실수 전체의 집합에서 미분가능하고,  $f(1)=f(2)=0, f''(x)>0$ 인 함수  $f(x)$ 가 있다.



$x \geq 0$ 에서 정의된 함수  $g(x) = \int_{\sqrt{x}}^x f(t)dt$ 와 양수  $k$ 에 대하여 집합  $S$ 를

$$S = \{a \mid \text{함수 } |g(x) - g(k)| \text{가 } x=a \text{에서 미분가능하지 않다.}\}$$

라 하고, 집합  $S$ 의 원소의 개수를  $h(k)$ 라 하자. 함수  $h(k)$ 의 불연속점의 개수의 최솟값을 구하시오. [4점]

- \* 확인 사항  
 ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2014년 10월 11일 시행  
Epsilon 모의고사 3회

출제자 : 성균관대학교 수학교육과 수학문제연구학회 Epsilon

09학번 : 서호성 이성규 이흥구

10학번 : 김우성 김준우 최원재

12학번 : 양한솔

13학번 : 김단비 김찬호 안정혁 오인수 오현주

14학번 : 고정민 서재현 이다운 황인호

편집 : 13학번 오인수, 14학번 김민지,

13학번 김찬호, 13학번 오현주

검토위원 :

학회 Epsilon