23. 초점이 F인 포물선 $y^2 = 8x$ 위의 점 P와 y축 사이의 거리가 3일 때, 선분 PF의 길이는? [2점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

(i) P의 x좌표 3

준선 $x=-2$ P와 준선 사이 거리 $=5$

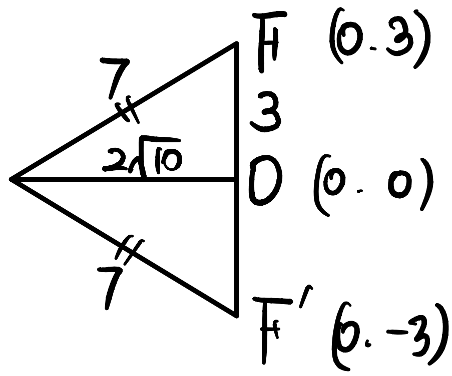
(ii) $P(3, \pm 2\sqrt{6})$, $F(2, 0)$ $\longrightarrow$ $\overline{PF}=5$

24. 두 초점의 좌표가 $(0, 3)$, $(0, -3)$인 타원이 y축과 점 $(0, 7)$에서 만날 때, 이 타원의 단축의 길이는? [3점]

① $4\sqrt{6}$ ② $4\sqrt{7}$ ③ $8\sqrt{2}$ ④ 12 ⑤ $4\sqrt{10}$

장축 길이 14, 두 초점 사이 거리 6

$(\text{장축 길이})^2 - (\text{두 초점 사이 거리})^2 = (\text{단축 길이})^2 = 160$



25. 쌍곡선 $4x^2-8x-y^2-6y-9=0$의 점근선 중 기울기가 양수인 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

l

① $\frac{19}{4}$ ② $\frac{21}{4}$ ③ $\frac{23}{4}$ ④ $\frac{25}{4}$ ⑤ $\frac{27}{4}$

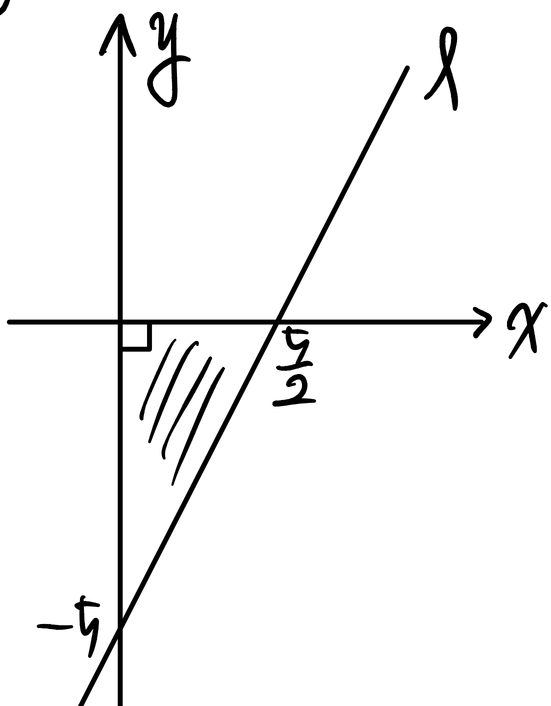
$$4(x^2-2x+1)-4-(y^2+6y+9)+9-9=0$$

$$\rightarrow 4(x-1)^2-(y+3)^2=4$$

$$\rightarrow (x-1)^2-\frac{(y+3)^2}{4}=1$$

l : $(1, -3)$을 지나고 가울기 2인 직선

l : $y=2x-5$



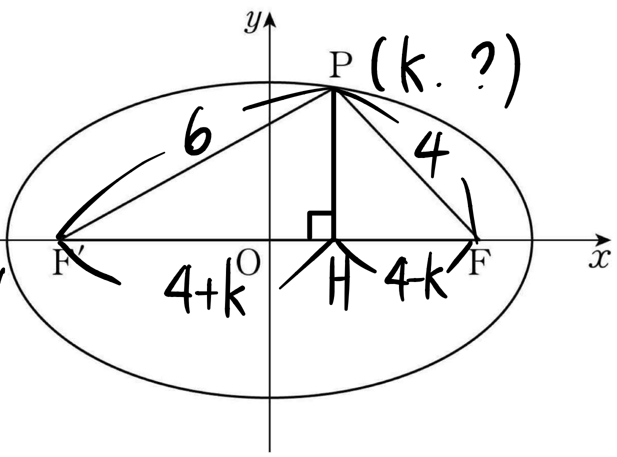
$\frac{25}{4}$

26. 그림과 같이 두 초점이 F, F′인 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 세 선분 PF, PF′, FF′의 길이가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 점 P의 x좌표는? (단, 점 F의 x좌표는 양수이다.) [3점]

① 1　　② $\frac{9}{8}$　　③ $\frac{5}{4}$　　④ $\frac{11}{8}$　　⑤ $\frac{3}{2}$

장축 길이 10

$\overline{FF'}=8$



$\overline{PF}$, $\overline{PF'}$, $\overline{FF'}$
$\;\;\|\qquad\;\;\|\qquad\;\;\|$
$\;\;a\qquad 10-a\qquad 8$

$20-2a=a+8$

$\therefore a=4$

$\overline{PH}^2=6^2-(4+k)^2=16-(4-k)^2$

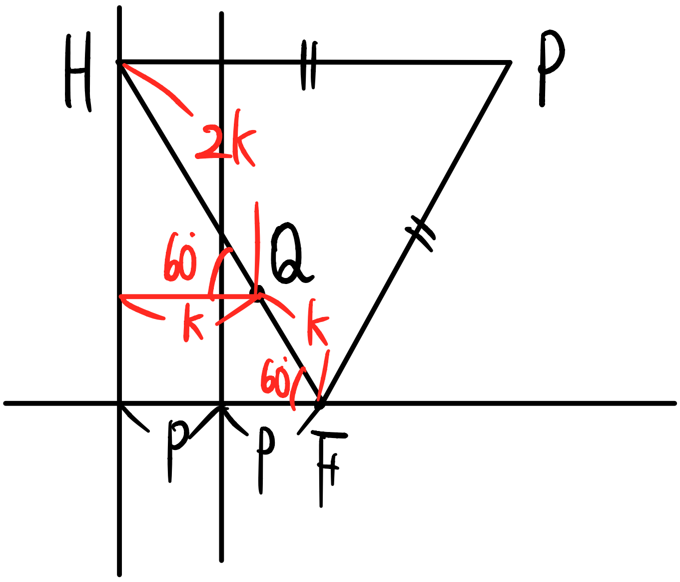
$\rightarrow 36-(16+8k+k^2)=16-(16-8k+k^2)$

$\rightarrow 20=16k$

27. 초점이 F인 포물선 $y^2=4px$ $(p>0)$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P에서 준선에 내린 수선의 발 H에 대하여 선분 FH가 포물선과 만나는 점을 Q라 하자. 점 Q가 다음 조건을 만족시킬 때, 상수 p의 값은? [3점]

(가) 점 Q는 선분 FH를 1:2로 내분한다. (나) 삼각형 PQF의 넓이는 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$이다.

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$



$\angle PHF = 60^\circ$ (엇각)

$\overline{PH} = \overline{PF}$ 이므로

$\angle PHF = \angle PFH$

$\boxed{\therefore \text{ 삼각형 PHF는 정삼각형, 한 변 길이 } 3k = 4p}$

외워두면 편함

(나) $\frac{1}{2} \times k \times 4p \times \sin 60^\circ = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

$\rightarrow \sqrt{3}kp = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

$\rightarrow kp = \frac{4}{3}p^2 = \frac{8}{3}$ $\therefore p = \sqrt{2}$

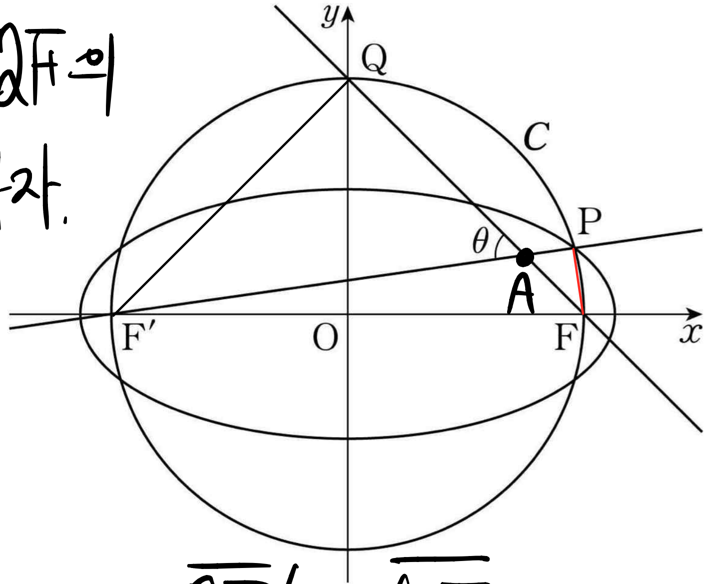
길이 주어진 게 없음 → 내 맘대로 설정
(계산 편하도록)

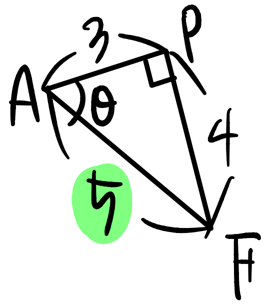
28. 그림과 같이 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점 F, F′에 대하여 선분 FF′을 지름으로 하는 원을 C라 하자. 원 C가 타원과 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하고, 원 C가 y축과 만나는 점 중 y좌표가 양수인 점을 Q라 하자. 두 직선 F′P, QF가 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$일 때, $\dfrac{b^2}{a^2}$의 값은?

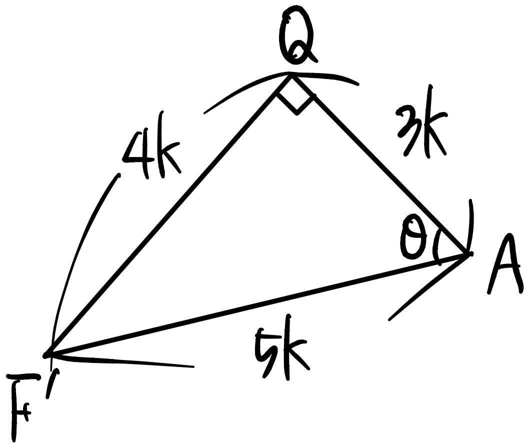
(단, a, b는 $a>b>0$인 상수이고, 점 F의 x좌표는 양수이다.) [4점]

① $\dfrac{11}{64}$　② $\dfrac{3}{16}$　③ $\dfrac{13}{64}$　④ $\dfrac{7}{32}$　⑤ $\dfrac{15}{64}$

두 직선 F′P, QF의 교점을 A라 하자.







$\overline{QF'}=\overline{QF} \longrightarrow 4k=3k+5$

$\longrightarrow k=5$

삼각형 QFF′ 직각이등변삼각형 $\longrightarrow \overline{FF'}=4k\times\sqrt{2}=20\sqrt{2}$ $\therefore c=10\sqrt{2}$

장축 길이 $\overline{F'A}+\overline{AP}+\overline{PF}=32$ $\therefore a=16$

$b^2=a^2-c^2=256-200=56$　$\therefore \dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{56}{256}=\dfrac{8\times7}{8\times32}$

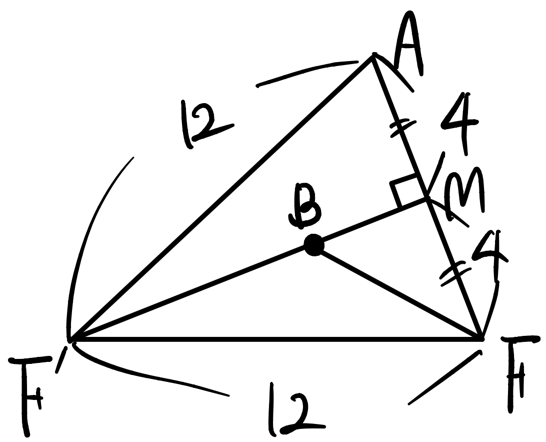
주축 길이 4

29. 두 점 F, F′을 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{32}=1$ 위의 점 A가 다음 조건을 만족시킨다.

F(6.0), F′(−6.0)

(가) $\overline{AF} < \overline{AF'}$ A가 제1사분면 위의 점이라 하자.   (나) 선분 AF의 수직이등분선은 점 F′을 지난다.

선분 AF의 중점 M에 대하여 직선 MF′과 쌍곡선의 교점 중 점 A에 가까운 점을 B라 할 때, 삼각형 BFM의 둘레의 길이는 k이다. k^2의 값을 구하시오. [4점]



주축 길이 4 → $\overline{AF}=8$

$\overline{F'M}=8\sqrt{2}$

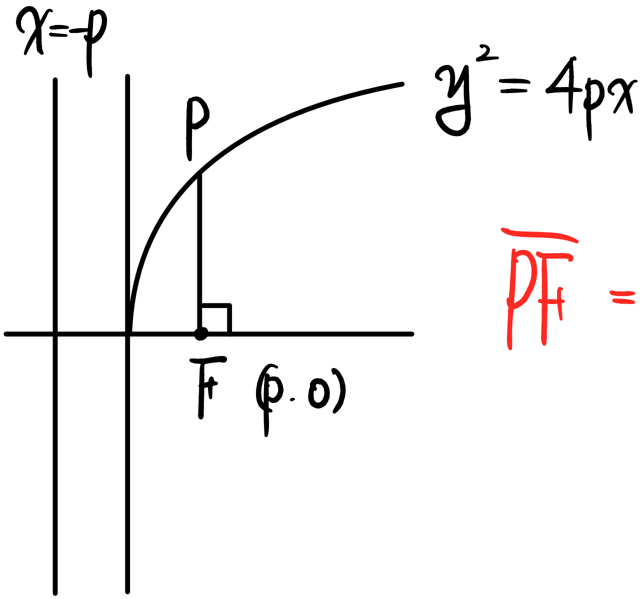
$\overline{BF}=a$, $\overline{BF'}=a+4$, $\overline{BM}=8\sqrt{2}-(a+4)$

$k=\overline{BM}+\overline{MF}+\overline{FB}$

$=8\sqrt{2}-(a+4)+4+a=8\sqrt{2}$

$\therefore \boxed{k^2=128}$

NOTE



$\overline{PF} = 2p$

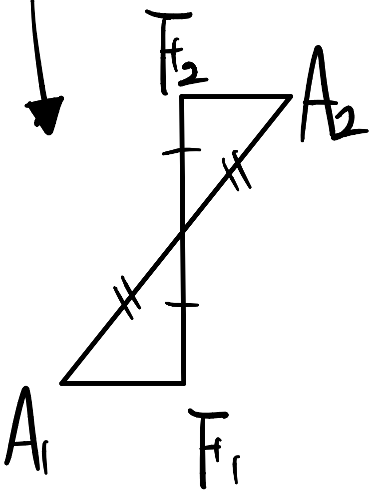
그냥 이것저것 많이 시키는 문제

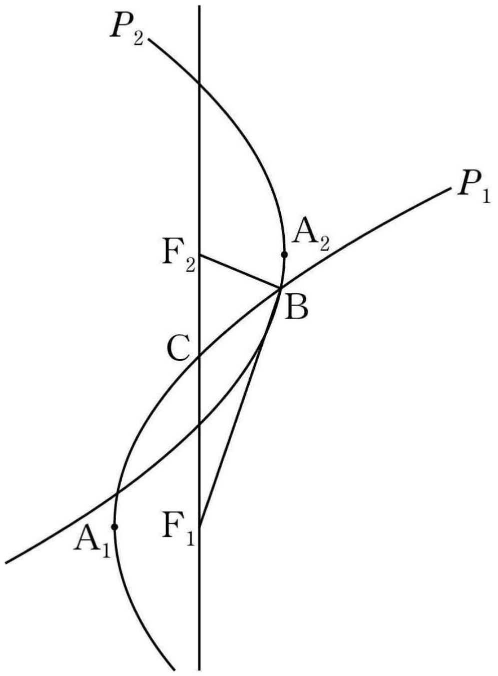
30. 그림과 같이 꼭짓점이 A_1이고 초점이 F_1인 포물선 P_1과 꼭짓점이 A_2이고 초점이 F_2인 포물선 P_2가 있다. 두 포물선의 준선은 모두 직선 F_1F_2와 평행하고, 두 선분 A_1A_2, F_1F_2의 중점은 서로 일치한다.
두 포물선 P_1, P_2가 서로 다른 두 점에서 만날 때 두 점 중에서 점 A_2에 가까운 점을 B라 하자. 포물선 P_1이 선분 F_1F_2와 만나는 점을 C라 할 때, 두 점 B, C가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{A_1C} = 5\sqrt{5}$

(나) $\overline{F_1B} - \overline{F_2B} = \dfrac{48}{5}$

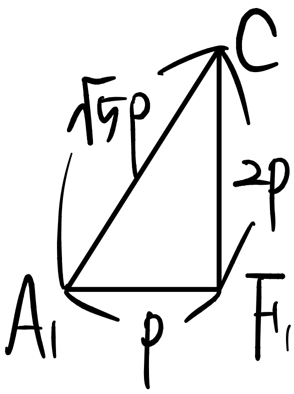
삼각형 BF_2F_1의 넓이가 S일 때, $10S$의 값을 구하시오. (단, $\angle F_1F_2B < 90^\circ$) [4점]





∴ $\overline{A_1F_1} = \overline{A_2F_2} = p$

(가)



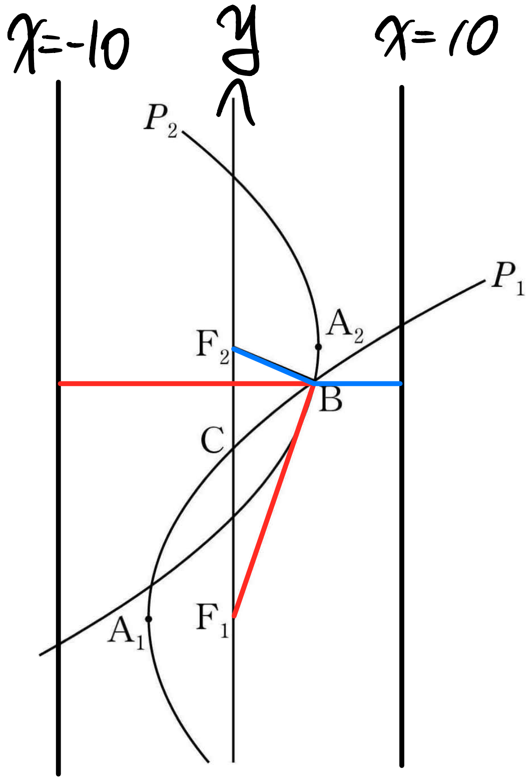
$\sqrt{5}p = 5\sqrt{5}$

∴ $p = 5$

30. 그림과 같이 꼭짓점이 A_1이고 초점이 F_1인 포물선 P_1과 꼭짓점이 A_2이고 초점이 F_2인 포물선 P_2가 있다. 두 포물선의 준선은 모두 직선 F_1F_2와 평행하고, 두 선분 A_1A_2, F_1F_2의 중점은 서로 일치한다.
두 포물선 P_1, P_2가 서로 다른 두 점에서 만날 때 두 점 중에서 점 A_2에 가까운 점을 B라 하자. 포물선 P_1이 선분 F_1F_2와 만나는 점을 C라 할 때, 두 점 B, C가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{A_1C} = 5\sqrt{5}$
(나) $\overline{F_1B} - \overline{F_2B} = \frac{48}{5}$

삼각형 BF_2F_1의 넓이가 S일 때, $10S$의 값을 구하시오. (단, $\angle F_1F_2B < 90°$) [4점]

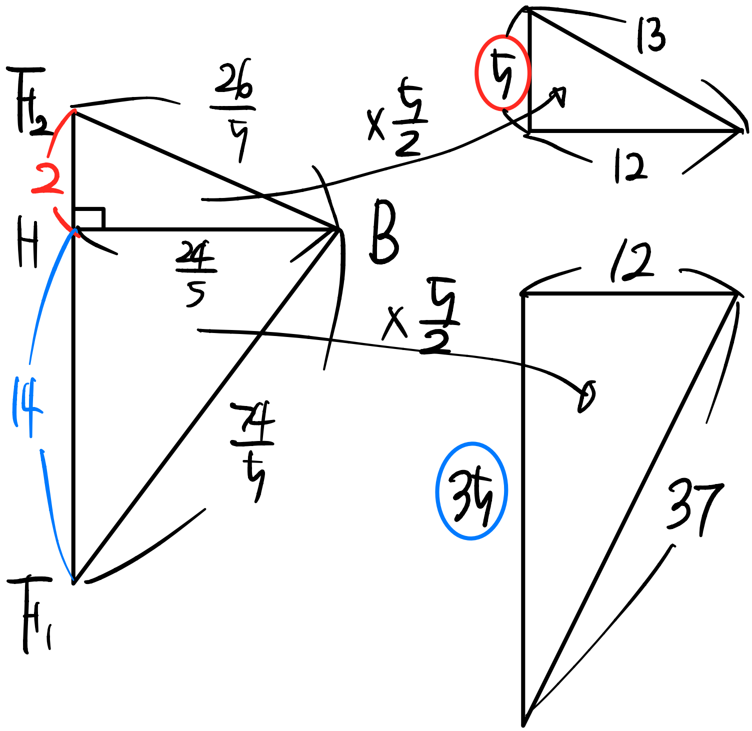


(나) $\overline{F_1B} - \overline{F_2B} = \frac{48}{5}$

$\overline{F_1B} + \overline{F_2B} = 20$

$\longrightarrow$ $\overline{F_1B} = \frac{74}{5}$

$\overline{F_2B} = \frac{26}{5}$



$$37^2-12^2=(37-12)(37+12)=5^2\times7^2$$

삼각형 BF_2F_1 넓이 $=\frac{1}{2}\times(B$의 x좌표$)\times\overline{F_1F_2}$

B의 x좌표 $=\frac{74}{5}-10=\frac{24}{5}$ $\quad\overline{F_1F_2}=16$

$\therefore 10S=10\times\frac{1}{2}\times\frac{24}{5}\times16=24\times16=\boxed{384}$