(제 2 교시)

수학 영역

5지선다형

1. $\left(\dfrac{2^{\sqrt{3}}}{2}\right)^{\sqrt{3}+1}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ 1 ④ 4 ⑤ 16

2. 함수 $f(x)=2x^2+5$ 에 대하여 $\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ 의 값은? [2점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

3. $\sin(\pi-\theta)=\frac{5}{13}$ 이고 $\cos\theta<0$ 일 때, $\tan\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{12}{13}$ ② $-\frac{5}{12}$ ③ 0 ④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{12}{13}$

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -2x+a & (x\le a) \\ ax-6 & (x>a) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a 의 값의 합은? [3점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

5. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 = 2a_5, \quad a_8 + a_{12} = -6$$

일 때, a_2의 값은? [3점]

① 17 ② 19 ③ 21 ④ 23 ⑤ 25

6. 함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 + k$의 극댓값이 9일 때, 함수 $f(x)$의 극솟값은? (단, k는 상수이다.) [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

7. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_n = \frac{1}{n(n+1)}$일 때, $\sum_{k=1}^{10}(S_k - a_k)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{7}{10}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

8. 곡선 $y=x^3-4x+5$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선이 곡선 $y=x^4+3x+a$에 접할 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

9. 닫힌구간 $[0, 12]$에서 정의된 두 함수

$$f(x)=\cos\frac{\pi x}{6},\quad g(x)=-3\cos\frac{\pi x}{6}-1$$

이 있다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표를 α_1, α_2라 할 때, $|\alpha_1-\alpha_2|=8$이다. 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표를 β_1, β_2라 할 때, $|\beta_1-\beta_2|$의 값은? (단, k는 $-1<k<1$인 상수이다.) [4점]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

10. 수직선 위의 점 A(6)과 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 이 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 점 P의 속도 $v(t)$를

$$v(t)=3t^2+at\quad(a>0)$$

이라 하자. 시각 $t=2$에서 점 P와 점 A 사이의 거리가 10일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

11. 함수 $f(x)=-(x-2)^2+k$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수가 2일 때, 상수 k의 값은? [4점]

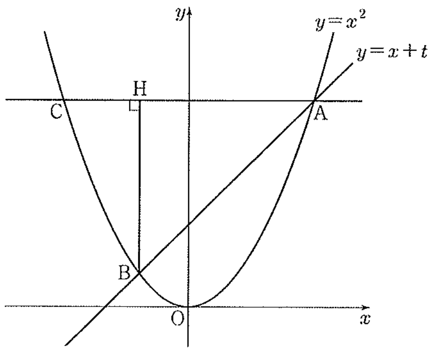
> $\sqrt{3}^{f(n)}$의 네제곱근 중 실수인 것을 모두 곱한 값이 -9이다.

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

12. 실수 $t\,(t>0)$에 대하여 직선 $y=x+t$와 곡선 $y=x^2$이 만나는 두 점을 A, B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=x^2$과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C, 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\overline{\mathrm{AH}}-\overline{\mathrm{CH}}}{t}$의 값은? (단, 점 A의 x좌표는 양수이다.) [4점]

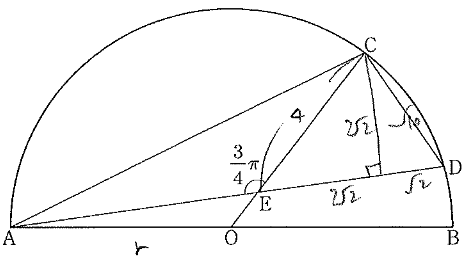
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



13. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 두 점 C, D가 있다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 두 선분 AD, CO가 점 E에서 만나고,

$$\overline{CE}=4,\quad \overline{ED}=3\sqrt{2},\quad \angle CEA=\frac{3}{4}\pi$$

이다. $\overline{AC}\times\overline{CD}$의 값은? [4점]



① $6\sqrt{10}$ ② $10\sqrt{5}$ ③ $16\sqrt{2}$
④ $12\sqrt{5}$ ⑤ $20\sqrt{2}$

$\overline{CD}^2 = 4^2+(3\sqrt2)^2-2\cdot4\cdot3\sqrt2\cdot\frac{\sqrt2}{2}=10$

$\cos C = \frac{26-18}{2\cdot4\cdot\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ $\sin D = \frac{2}{\sqrt5}$

$\overline{AC} = 2r\sin D = \frac{4}{\sqrt5}r$ $r = \frac{\frac{\sqrt{10}}{2}}{\cos C} = 5$

$\therefore 4\sqrt5\cdot\sqrt{10} = 20\sqrt2$

14. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$, $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(t)$를

$$g(t)=\int_t^{t+1} f(x)\,dx-\int_0^1 |f(x)|\,dx$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

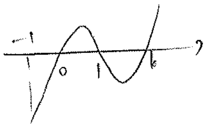
<보 기>

ㄱ. $g(0)=0$이면 $g(-1)<0$이다. (O)
ㄴ. $g(-1)>0$이면 $f(k)=0$을 만족시키는 $k<-1$인 실수 k가 존재한다. (O)
ㄷ. $g(-1)>1$이면 $g(0)<-1$이다. (O)

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

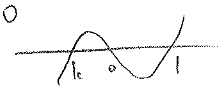
ㄱ. $g(0)=0$ $\int_0^1 f(x)dx > 0$

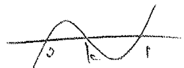
$g(-1) = \int_{-1}^0 f(x)dx - \int_0^1 |f(x)|dx < 0$



ㄴ. $g(-1) = \int_{-1}^0 f(x)dx - \int_0^1 |f(x)|dx > 0$

$k=-1$ 일때 $g(-1)=0$ $k<-1$



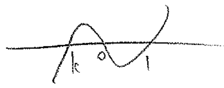


$g(-1)<0$ (x)

ㄷ. $g(-1) = \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx > 1$

$= \int_{-1}^1 (x^3-(k+1)x^2+kx)dx$

$= -\frac{k+1}{3}\times2 > 1$ $\therefore k<-\frac52$



$f(x)=x(x-1)(x-k)$

$g(0) = 2\int_0^1 f(x)dx = 2(\frac14-\frac{k+1}{3}+\frac k2)$

$= \frac k3-\frac16 < -\frac52\cdot\frac13-\frac16 = -1$

$\therefore g(0)<-1$

15. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 k에 대하여 $a_{4k}=r^k$이다.
(단, r는 $0<|r|<1$인 상수이다.)
(나) $a_1<0$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+3 & (|a_n|<5) \\ -\frac{1}{2}a_n & (|a_n|\ge 5) \end{cases}$$

이다.

$|a_m|\ge 5$를 만족시키는 100 이하의 자연수 m의 개수를 p라 할 때, $p+a_1$의 값은? [4점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

-14 7 $-\frac{7}{2}$ $-\frac{1}{2}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{11}{2}$ $-\frac{11}{4}$ $\frac{1}{4}$

$\frac{13}{4}$ $\frac{25}{4}$ $-\frac{25}{8}$ $-\frac{1}{8}$ $\cdots$ $r=-\frac{1}{2}$

$a_1=-14$ $p=25+1=26$ $-14+26=12$

단답형

16. 방정식 $\log_3(x-4)=\log_9(x+2)$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점] 7

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2-4x+3$이고 $f(1)=5$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점] 16

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{5} a_k = 10$일 때,

$$\sum_{k=1}^{5} c a_k = 65 + \sum_{k=1}^{5} c$$

를 만족시키는 상수 c의 값을 구하시오. [3점] 13

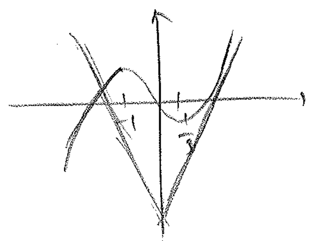
19. 방정식 $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + k = 0$이 서로 다른 4개의 실근을 갖도록 하는 자연수 k의 개수를 구하시오. [3점] 4

20. 상수 $k\,(k<0)$에 대하여 두 함수

$$f(x) = x^3 + x^2 - x, \quad g(x) = 4|x| + k$$

의 그래프가 만나는 점의 개수가 2일 때,
두 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하자.
$30 \times S$의 값을 구하시오. [4점] 80

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (3x-1)(x+1)$



$y = 4x + k$와 $y = x^3 + x^2 - x$가 $x = t$에서 접함

$4t + k = t^3 + t^2 - t$ $\quad 4 = 3t^2 + 2t - 1$ $\quad 3t^2 + 2t - 5 = 0$

$4 + k = 1 \quad k = -3$ $\quad \begin{matrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{matrix}$ $\quad t = 1$

$x^3 + x^2 - x = -4x - 3 \quad x^3 + x^2 + 3x + 3 = 0$

$(x+1)(x^2+3) = 0 \quad \therefore x = -1$

$\therefore S = \int_{-1}^{0} (x^3 + x^2 + 3x + 3)\,dx + \int_{0}^{1} (x^3 + x^2 - 5x + 3)\,dx$

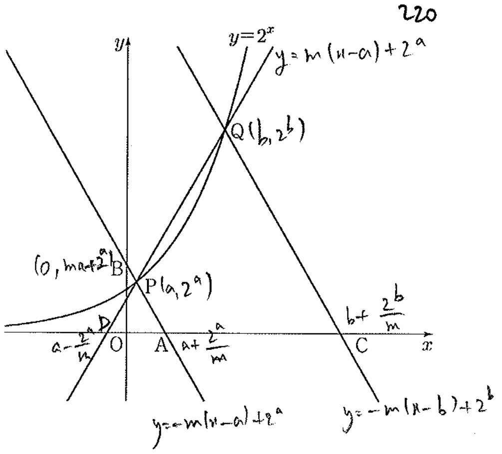
$= \frac{19}{12} + \frac{13}{12} = \frac{32}{12} = \frac{8}{3} \quad \therefore 30S = 80$

21. 그림과 같이 곡선 $y=2^x$ 위에 두 점 $\mathrm{P}(a,\ 2^a)$, $\mathrm{Q}(b,\ 2^b)$이 있다. 직선 PQ의 기울기를 m이라 할 때, 점 P를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 Q를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축과 만나는 점을 C라 하자.

$$\overline{\mathrm{AB}}=4\overline{\mathrm{PB}},\quad \overline{\mathrm{CQ}}=3\overline{\mathrm{AB}}$$

일 때, $90\times(a+b)$의 값을 구하시오. (단, $0<a<b$) [4점]

220



$\overline{AB} : \overline{BP} = 4:1$ $\quad a + \frac{2^a}{m} = 4a$ $\quad 2^a = 3am$

$\overline{DA} : \overline{AC} = 1:3$ $\quad b - a + \frac{2^b - 2^a}{m} = 3 \cdot 2 \cdot \frac{2^a}{m}$

$m = \frac{2^b - 2^a}{b-a}$ $\quad 2(b-a) = 6 \cdot 2^a \cdot \frac{1}{m}$

$= 18a$

$2b = 10a$ $\quad \therefore b = 10a$

$\frac{2^{10a} - 2^a}{9a} = \frac{3am(2^{9a}-1)}{9a} = m$

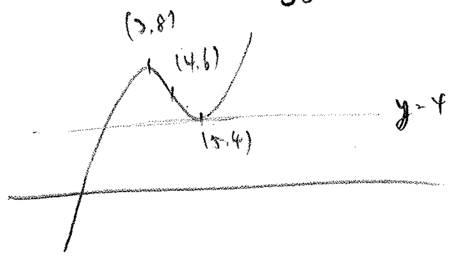
$\therefore 2^{9a} - 1 = 3$ $\quad 9a = 2$ $\quad a = \frac{2}{9}$ $\quad b = \frac{20}{9}$

$90(a+b) = 220$

22. 최고차항의 계수가 1이고 $x=3$에서 극댓값 8을 갖는 삼차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\geq t) \\ -f(x)+2f(t) & (x<t) \end{cases}$$

라 할 때, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 두 개일 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점] 58



$f'(x) = 3(x-3)(x-5) = 3(x^2-8x+15) = 3x^2-24x+45$

$f(x) = x^3-12x^2+45x-46$ $\quad f(8)=58$

＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{x \to 0} \frac{4^x - 2^x}{x}$ 의 값은? [2점]

① $\ln 2$ ② 1 ③ $2\ln 2$ ④ 2 ⑤ $3\ln 2$

24. $\int_0^{\pi} x\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx$ 의 값은? [3점]

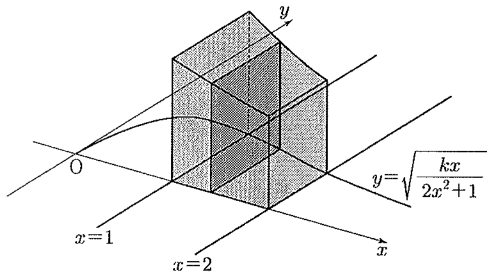
① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3\pi}{2}$ ④ 2π ⑤ $\frac{5\pi}{2}$

25. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2}{2}=6$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+1}{a_n+2n}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

26. 그림과 같이 양수 k에 대하여 곡선 $y=\sqrt{\frac{kx}{2x^2+1}}$와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피가 $2\ln 3$일 때, k의 값은? [3점]

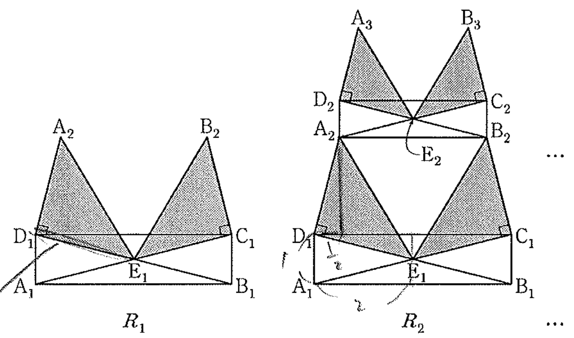


① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

27. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=4$, $\overline{A_1D_1}=1$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 두 대각선의 교점을 E_1이라 하자. $\overline{A_2D_1}=\overline{D_1E_1}$, $\angle A_2D_1E_1=\frac{\pi}{2}$이고 선분 D_1C_1과 선분 A_2E_1이 만나도록 점 A_2를 잡고, $\overline{B_2C_1}=\overline{C_1E_1}$, $\angle B_2C_1E_1=\frac{\pi}{2}$이고 선분 D_1C_1과 선분 B_2E_1이 만나도록 점 B_2를 잡는다. 두 삼각형 $A_2D_1E_1$, $B_2C_1E_1$을 그린 후 ◺◿ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 $\overline{A_2B_2}:\overline{A_2D_2}=4:1$이고 선분 D_2C_2가 두 선분 A_2E_1, B_2E_1과 만나지 않도록 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 세 점 E_2, A_3, B_3을 잡고 두 삼각형 $A_3D_2E_2$, $B_3C_2E_2$를 그린 후 ◺◿ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [3점]

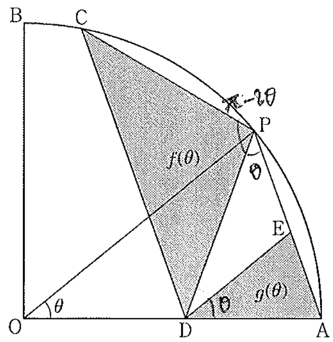


① $\frac{68}{5}$　② $\frac{34}{3}$　③ $\frac{68}{7}$　④ $\frac{17}{2}$　⑤ $\frac{68}{9}$

$S_1=\frac{17}{4}$　닮음비 $\frac{\frac{3}{2}}{2}=\frac{3}{4}$

$\frac{\frac{17}{4}}{1-\frac{9}{16}}=\frac{17}{4}\cdot\frac{16}{7}=\frac{68}{7}$

28. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 $\overline{PA}=\overline{PC}=\overline{PD}$가 되도록 호 PB 위에 점 C와 선분 OA 위에 점 D를 잡는다. 점 D를 지나고 선분 OP와 평행한 직선이 선분 PA와 만나는 점을 E라 하자. $\angle POA=\theta$일 때, 삼각형 CDP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 EDA의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



① $\frac{1}{8}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{3}{8}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{5}{8}$

△OOP, △APD, △ADE 모두 닮음

$AP=2\sin\frac{\theta}{2}$　$AD=4\sin^2\frac{\theta}{2}$

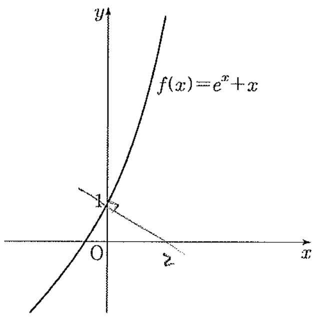
$g(\theta)=\frac{1}{2}\cdot(4\sin^2\frac{\theta}{2})^2\sin\theta$

$f(\theta)=\frac{1}{2}\cdot(2\sin\frac{\theta}{2})^2\sin(\pi-2\theta)$

$\frac{1^2}{1\cdot2}=\frac{1}{2}$

단답형

29. 함수 $f(x)=e^x+x$가 있다. 양수 t에 대하여 점 $(t, 0)$과 점 $(x, f(x))$ 사이의 거리가 $x=s$에서 최소일 때, 실수 $f(s)$의 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$의 역함수를 $h(t)$라 할 때, $h'(1)$의 값을 구하시오. [4점] 3



거리 $d = \sqrt{(x-t)^2+(e^x+x)^2}$

let $i(x) = (x-t)^2+(e^x+x)^2$

$i'(x) = 2(x-t)+2(e^x+x)(e^x+1)$

$x=s$에서 최소 ⇒ $2(s-t)+2(e^s+s)(e^s+1)=0$

∴ $t = s+e^{2s}+(1+s)e^s+e^s$

$\frac{dt}{ds} = 1+2e^{2s}+e^s+(1+s)e^s+e^s$

$f'(x)=e^x+1$

$h(1)=a$라 하면 $g(a)=1$ $h'(1)=\frac{1}{g'(a)}$

$g(a)=1$ 때 $e^s+s=1$ ∴ $s=0$

$s=0$ 때 $(0,1)$과 최소 거리 $(t,0) \Rightarrow (2,0)$

∴ $a=2$

$g'(t) = f'(s)\frac{ds}{dt}$ $\left.\frac{dt}{ds}\right|_{s=0} = 6$

$g'(2) = f'(0)\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

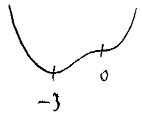
∴ $h'(1) = \frac{1}{g'(2)} = 3$

30. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 구간 $(0, \infty)$에서 $g(x) \geq 0$인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $x \leq -3$인 모든 실수 x에 대하여
> $f(x) \geq f(-3)$이다.
>
> (나) $x > -3$인 모든 실수 x에 대하여
> $g(x+3)\{f(x)-f(0)\}^2 = f'(x)$이다.

$\int_4^5 g(x)dx = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 283

let $f'(x) = 4(x+3)x^2 = 4x^3+12x^2$



$f(x) = x^4+4x^3+k$

$g(x+3) = \frac{f'(x)}{\{f(x)-f(0)\}^2}$ $(x \neq 0)$, $f'(0)=0$

$\int_4^5 g(x)dx = \int_1^2 g(x+3)dx = \int_1^2 \frac{f'(x)}{\{f(x)-f(0)\}^2}dx$ let $t=f(x)-f(0)$ $=x^4+4x^3$

$= \int_5^{48} \frac{1}{t^2}dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_5^{48} = -\frac{1}{48}+\frac{1}{5} = \frac{43}{240}$

∗ 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.