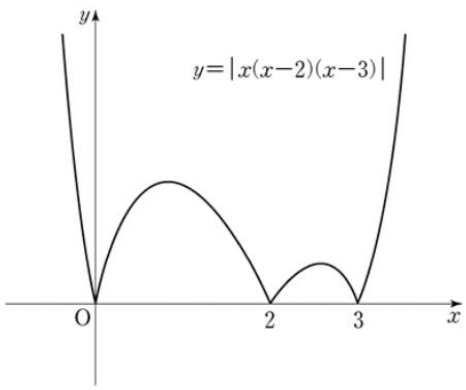
11

2017학년도 9월 평가원(나형) 21번

다음 조건을 만족시키며 최고차항의 계수가 음수인 모든 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은? [4점]

> (가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 0, 2, 3뿐이다.
> (나) 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$ 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 할 때, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

① $\dfrac{7}{6}$ ② $\dfrac{4}{3}$ ③ $\dfrac{3}{2}$ ④ $\dfrac{5}{3}$ ⑤ $\dfrac{11}{6}$



sol.)

조건 (가)를 만족시키는 사차함수 f:

$$f(x)=ax^2(x-2)(x-3) \quad (a<0)$$

or $f(x)=ax(x-2)^2(x-3) \quad (a<0)$

or $f(x)=ax(x-2)(x-3)^2 \quad (a<0)$

$h(x)=x(x-2)(x-3)$ 라 하자.

$$h'(x)=(x-2)(x-3)+x(x-3)+x(x-2)$$

$\therefore h'(0)=6,\ h'(2)=-2,\ h'(3)=3$

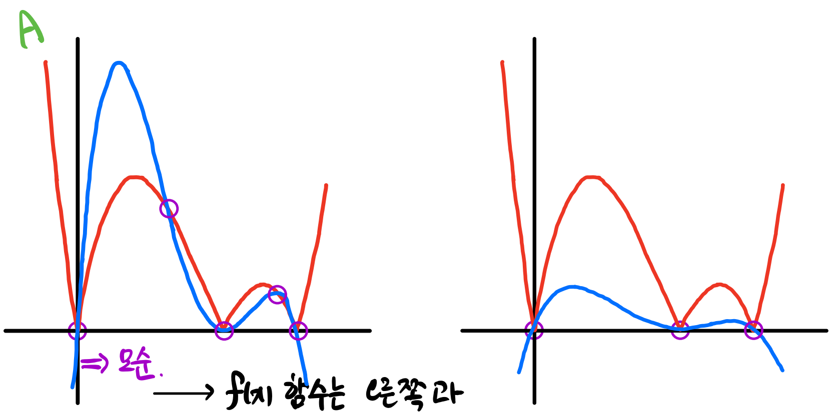
11

2017학년도 9월 평가원(나형) 21번

i) $f(x) = ax^2(x-2)(x-3)$ 라면

$f(1) = 2a < 0$

ii) $f(x) = ax(x-2)^2(x-3)$ 라면



⟶ $f(x)$ 함수는 오른쪽과 같은 형태여야 함.

$f'(x) = a(x-2)^2(x-3) + 2ax(x-2)(x-3) + ax(x-2)^2$

$|h'(0)| \geq f'(0)$, $|h'(3)| \geq f'(3)$ 이 동시 성립해야함.

↳ a의 값에 관계 없이 $x=2$ 에서는 $g(x) = f(x)$ ⟶ $x=2$ 에서 미·가·

$0 < -12a \leq 6$, $-3 \leq 3a < 0$

↳ $a \geq -\frac{1}{2}$

$f(1) = -2a$ ⟶ $0 < f(1) \leq 1$

iii) $f(x) = ax(x-2)(x-3)^2$

A 참고.

$f'(x) = a(x-2)(x-3)^2 + ax(x-3)^2 + 2ax(x-2)(x-3)$

$|h'(0)| \geq f'(0)$, $|h'(2)| \geq f'(2)$ 이 동시 성립해야함.

↳ a의 값에 관계 없이 $x=3$ 에서는 $g(x) = f(x)$ ⟶ $x=3$ 에서 미·가·

$0 < -18a < 6$, $-2 \le 2a < 0$

$\hookrightarrow -\frac{1}{3} \le a < 0$

$f(1) = 4c \longrightarrow 0 < f(1) \le \frac{4}{3}$

$\therefore f(1)$의 최댓값 $= \frac{4}{3}$

sol2)

⋮

$f(x)$는 $h(x)$를 인수로 가짐.

$f(x) = |h(x)| \rightarrow$ 미·불· 의심점

$f(x) - |h(x)| = 0$

$a(x-b)\cdot h(x) = 0$ $\quad \because f-|h|$는 $h(x)$의 근을 인수로 가짐

but, 사차함수

$\longrightarrow$ h를 인수로 묶은 후 나머지 식 $(a(x-b))$

$\longrightarrow$ b는 0, 2, 3 중 하나여야 함.

$$\longrightarrow \quad g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \le 0,\ x \ge 3) \\ |h(x)| & (0 < x < 3) \end{cases}$$

$$\text{or} \quad g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \le 2,\ x \ge 3) \\ -h(x) & (2 < x < 3) \end{cases}$$

$$\text{or} \quad g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \le 0,\ x \ge 0) \\ h(x) & (0 < x < 2) \end{cases}$$

or $g(x) = f(x)$

i) $g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \le 0,\ x \ge 3) \\ |h(x)| & (0 < x < 3) \end{cases}$

$|h(x)|$가 $x=2$에서 미·불· : 모순

11

2017학년도 9월 평가원(나형) 21번

ii) $g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \le 2,\ x \ge 3) \\ -h(x) & (2 < x < 3) \end{cases}$

$y=f(x)$ 와 $y=-h(x)$ 는 $x=2$, $x=3$ 에서 접해야 함.

$f(x)+h(x) = ax(x-2)^2(x-3)^2$

$\longrightarrow$ 5차함수 : 모순

iii) $g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \le 0,\ x \ge 2) \\ h(x) & (0 < x < 2) \end{cases}$

$y=f(x)$ 와 $y=-h(x)$ 는 $x=0$, $x=2$ 에서 접해야 함.

$f(x)+h(x) = ax^2(x-2)^2(x-3)$

$\longrightarrow$ 5차함수 : 모순

iv) $g(x)=f(x)$

I) $f(x)=ax(x-2)^2(x-3)$ $(a<0)$

$f(x)=a(x-2)h(x)$

A) $0<x<2$

$f(x) < |h(x)| \rightarrow f(x) < h(x)$ $(\because h(x)>0)$

$a(x-2) < 1$

B) $2<x<3$

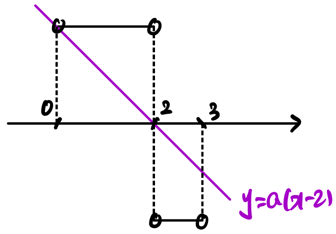
$f(x) < |h(x)| \rightarrow f(x) < -h(x)$ $(\because h(x)<0)$

$a(x-2) > -1$

11

2017학년도 9월 평가원(나형) 21번

$\longrightarrow -1 < a(x-2) < 1$



$\longrightarrow a \geq -\frac{1}{2}$

$\therefore f(1) = -2a$

$\therefore 0 < f(1) < 1$

II) $f(x) = ax(x-2)(x-3)^2 \quad (a<0)$

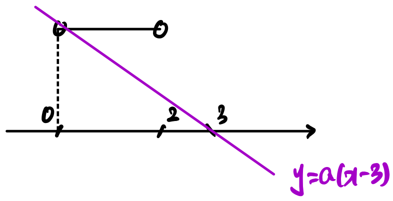
$f(x) = a(x-3)h(x)$

A) $0 < x < 2$

$f(x) < |h(x)| \rightarrow f(x) < h(x) \quad (\because h(x) > 0)$

$a(x-3) \leq 1$

$\longrightarrow a(x-3) < 1$



$\longrightarrow a \geq -\frac{1}{3}$

$\therefore f(1) = -4a$

$\therefore 0 < f(1) < \frac{4}{3}$

$\therefore Max(f(1)) = \frac{4}{3}$