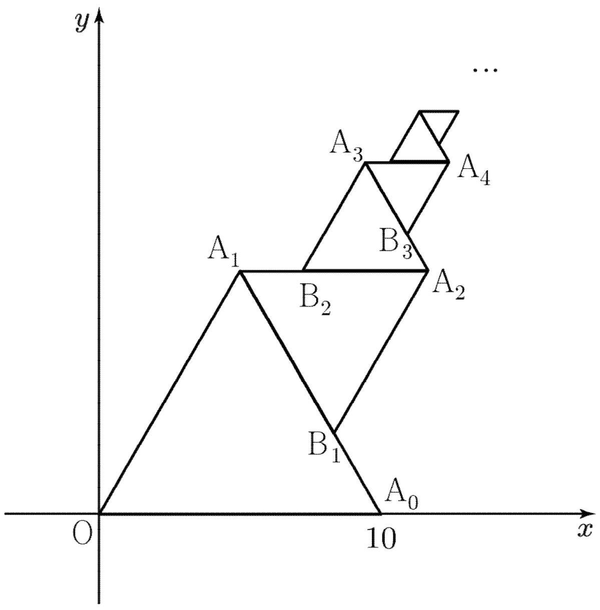
프로젝트 02

무등비도형 다 모아봄1

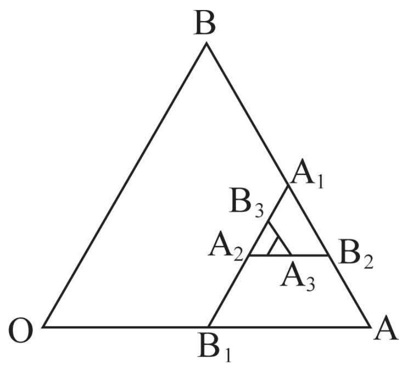
[출처] 2004 모의_공공 교육청 고3 03월 27

1. 아래 그림과 같이 원점 O와 점$A_0(10, 0)$에 대하여 제 1사분면 위에 $\overline{OA_0}$를 한 변으로 하는 정삼각형 OA_0A_1을 만들고 $\overline{A_0A_1}$을 $1:2$로 내분하는 점을 B_1이라 한다. 또 $\triangle OA_0A_1$ 밖에 $\overline{A_1B_1}$을 한 변으로 하는 정삼각형 $A_1B_1A_2$를 만들고 $\overline{A_1A_2}$를 $1:2$로 내분하는 점을 B_2라고 한다. 이와 같은 과정을 한없이 반복하면 점 A_n은 점(a, b)에 한없이 가까워진다. 이 때, a의 값을 구하시오.



[출처] 2004 모의_공공 사관학교 고3 07월 22

2. 그림과 같이 한 변의 길이가 12인 정삼각형 OAB 에서 $\overline{AB}$, $\overline{OA}$의 중점을 각각 A_1, B_1이라 한다. 또 $\overline{A_1B_1}$, $\overline{AA_1}$의 중점을 각각 A_2, B_2라 하고, $\overline{A_2B_2}$, $\overline{A_1A_2}$의 중점을 각각 A_3, B_3이라 한다. 이와 같이 $\overline{A_nB_n}$, $\overline{A_{n-1}A_n}$의 중점을 각각 A_{n+1}, B_{n+1}로 정하는 과정을 한없이 계속할 때, $\lim_{n\to\infty} \tan(\angle AOA_n)$ 의 값은?



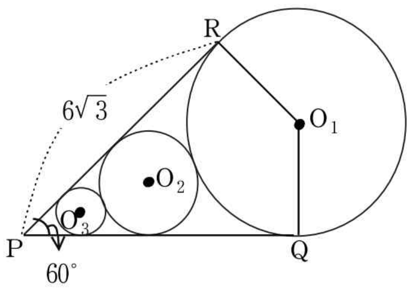
① $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{5}$

④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

[출처] 2003 모의_공공 사관학교 고3 07월 10

[출처] 2003 모의_공공 사관학교 고3 07월 10

3. 다음 그림과 같이 원 O_1밖의 한 점 P에서 원 O_1에 그은 두 접선의 접점을 각각 Q, R이라고 하자. 이때, $\overline{\mathrm{PR}}=6\sqrt{3}$, $\angle\mathrm{RPQ}=60^\circ$이다. 선분 PQ와 선분 PR에 접하고 원 O_1에 외접하는 원 O_2를 그린다. 이와 같은 방법으로 원 O_3, O_4, $\cdots$를 계속 그려나갈 때, 원 O_1, O_2, O_3, O_4, $\cdots$의 반지름 길이의 총합은?

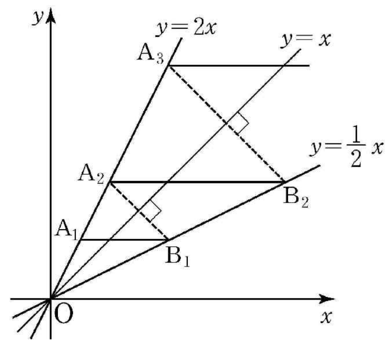


① $5\sqrt{3}$ ② 9 ③ 10
④ $6\sqrt{3}$ ⑤ 12

[출처] 2004 모의_공공 평가원 고3 예비 공통범위 12

[출처] 2004 모의_공공 평가원 고3 예비 12

4. 그림과 같이 두 직선 $y=2x$와 $y=\frac{1}{2}x$가 있다.
$y=2x$ 위의 점 $\mathrm{A}_1(1,\ 2)$를 지나고 x축에 평행한 직선이 $y=\frac{1}{2}x$와 만나는 점을 B_1이라 하자. B_1을 지나고 직선 $y=x$와 수직인 직선이 $y=2x$와 만나는 점을 A_2라 하자. A_2를 지나고 x축에 평행한 직선이 $y=\frac{1}{2}x$와 만나는 점을 B_2라 하자. 이와 같은 방법으로 점 A_3, B_3, A_4, B_4, $\cdots$, A_n, B_n, $\cdots$을 정할 때, 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}}$의 합은?

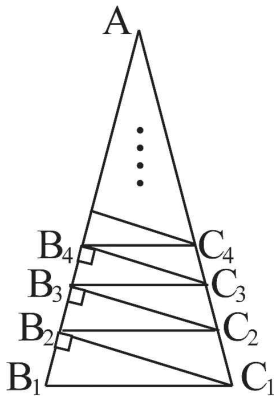


① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ 1 ⑤ 2

[출처] 2004 모의_공공 사관학교 고3 07월 14

[출처] 2004 모의_공공 사관학교 고3 07월 14

5. $\overline{AB_1} = \overline{AC_1} = 10$ 인 이등변삼각형 AB_1C_1 이 있다. 그림과 같이 점 C_1 에서 변 AB_1 에 내린 수선의 발을 B_2, 점 B_2 에서 변 B_1C_1 과 평행한 선분을 그어 변 AC_1 과 만나는 점을 C_2 라 한다. 이와 같은 방법으로 변 AB_1 과 변 AC_1 위에 점을 잡아서 각 점을 B_3, C_3, B_4, C_4, $\cdots$ 라 하자. $\overline{B_1B_2}$ 의 길이가 $\overline{B_1C_1}$ 의 길이의 $\frac{1}{4}$ 일 때, $\sum_{k=1}^{\infty} \overline{B_kC_k}$ 의 값은?



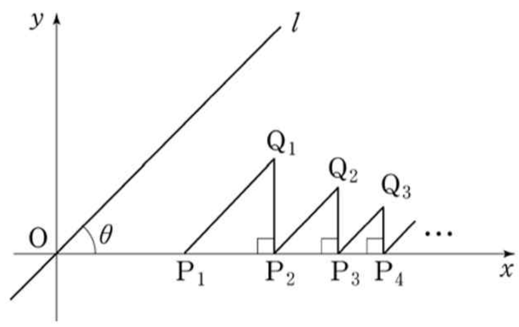
① 40 ② 35 ③ 30
④ 25 ⑤ 20

[출처] 2005 모의_공공 평가원 고3 09월 17

[출처] 2005 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 17

6. 그림과 같이 원점을 지나고 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ 인 직선 l 이 있다. 점 $P_1(1, 0)$ 을 지나고 직선 l 과 평행한 직선 위에 선분의 길이가 $\overline{OP_1} = \overline{P_1Q_1}$ 이 되는 점 Q_1 을 선택하자. 점 Q_1 에서 x 축에 내린 수선의 발을 P_2 라 하고, 점 P_2 를 지나고 직선 l 에 평행한 직선 위에 선분의 길이가 $\overline{P_1P_2} = \overline{P_2Q_2}$ 가 되는 점 Q_2 를 선택하자. 점 Q_2 에서 x 축에 내린 수선의 발을 P_3 이라 하고, 점 P_3 을 지나고 직선 l 에 평행한 직선 위에 선분의 길이가 $\overline{P_2P_3} = \overline{P_3Q_3}$ 이 되는 점을 Q_3 선택하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 두 점 P_n, Q_n 에 대하여 선분 P_nQ_n 의 길이를 a_n 이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4$ 일 때, $\cos\theta$ 의 값은?

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)



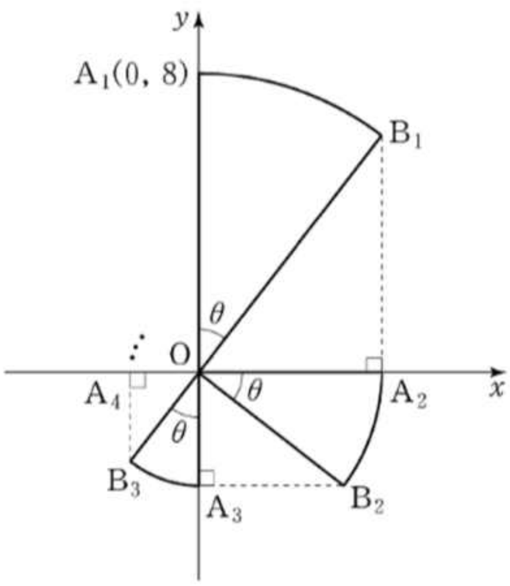
① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

[출처] 2005 모의_공공 평가원 고3 11월 공통범위 15

[출처] 2005 모의_공공 평가원 고3 11월 15

7. 그림과 같이 원점 O와 점 $A_1(0,\ 8)$을 이은 선분 OA_1을 반지름으로 하고, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OA_1B_1을 그린다. 점 B_1에서 x축에 내린 수선의 발을 A_2라 하고, 반지름이 선분 OA_2이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OA_2B_2를 그린다. 점 B_2에서 y축에 내린 수선의 발을 A_3이라 하고, 반지름이 선분 OA_3이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OA_3B_3을 그린다. 이와 같이 시계 방향으로 x축과 y축에 번갈아 수선의 발을 내리는 과정을 계속하여 얻은 부채꼴 OA_nB_n의 호 A_nB_n의 길이를 l_n이라 하자.

$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = 12\theta$일 때, $\sin\theta$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 이다.)



① $\frac{1}{7}$　② $\frac{1}{6}$　③ $\frac{1}{5}$

④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{3}$

[출처] 2005 모의_공공 교육청 고2 11월 18

8. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=8$, $\overline{CA}=6$인 $\triangle ABC$가 있다.

선분 BC의 중점을 M_1, 선분 AC의 중점을 M_2,

선분 AM_1의 중점을 M_3, 선분 AM_2의 중점을 M_4,

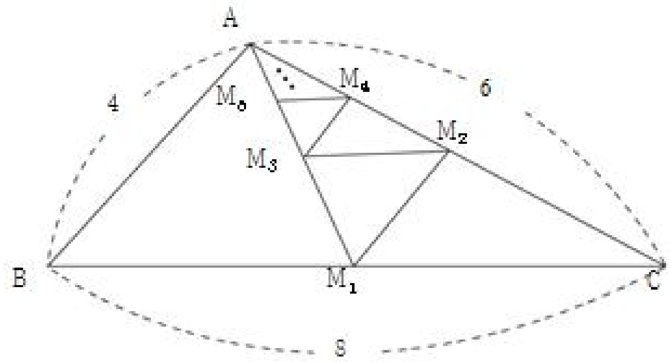
선분 AM_3의 중점을 M_5,

⋮

선분 AM_n의 중점을 M_{n+2},

⋮

이라 할 때, $\overline{AM_1}+\overline{M_1M_2}+\overline{M_2M_3}+\overline{M_3M_4}+\cdots$ 의 값은?



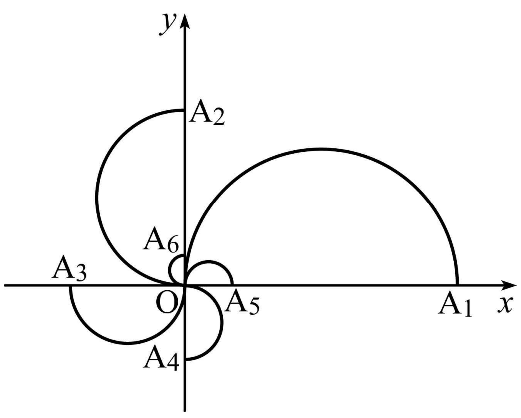
① $4+2\sqrt{3}$　② $6+2\sqrt{2}$　③ $6+\sqrt{10}$

④ $8+2\sqrt{2}$　⑤ $8+\sqrt{10}$

[출처] 2006 모의_공공 교육청 고3 03월 29

9. 그림과 같이 x축 위의 점 $A_1(6\pi-12,\ 0)$에 대하여 $\overline{OA_1}$을 지름으로 하는 반원을 제 1사분면에 그리고, $\overline{OA_1}=\overset{\frown}{OA_2}$인 점 A_2를 y축 위에 잡아 $\overline{OA_2}$를 지름으로 하는 반원을 제 2사분면에 그린다. 또, $\overline{OA_2}=\overset{\frown}{OA_3}$인 점 A_3를 x축 위에 잡아 $\overline{OA_3}$를 지름으로 하는 반원을 제 3사분면에 그리고, $\overline{OA_3}=\overset{\frown}{OA_4}$인 점 A_4를 y축 위에 잡아 $\overline{OA_4}$ 를 지름으로 하는 반원을 제 4사분면에 그린다. 같은 방법으로 제 1사분면, 제 2사분면, $\cdots$ 에 반원을 계속하여 그려나갈 때, 반원들의 호의 길이의 합 $\sum_{n=1}^{\infty}\overset{\frown}{OA_n}$ 의 값은?

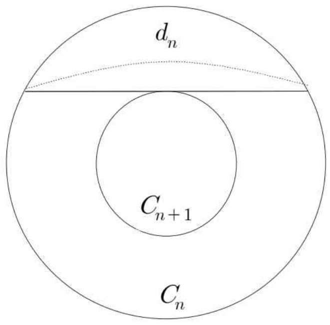
(단, $\overset{\frown}{OA_n}$은 $\overline{OA_n}$을 지름으로 하는 반원의 호이고 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ 이다.)



① 9π ② $8\pi+1$ ③ π^2+10
④ $2\pi^2+3$ ⑤ $3\pi^2$

[출처] 2006 모의_공공 경찰대 고3 07월 10

10. 자연수 n에 대하여 원 $x^2+y^2=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$을 C_n이라 하자. 원 C_{n+1}의 한 접선에서 원 C_n의 현에 해당되는 선분의 길이를 d_n이라고 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}d_n$의 값은?

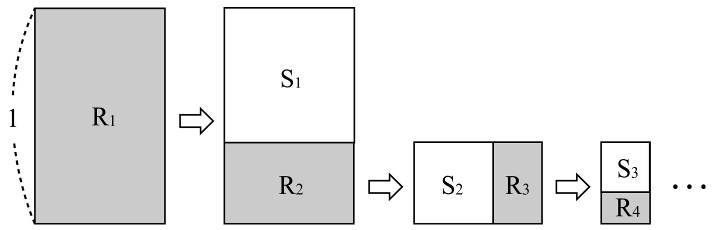


① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{3}$
④ 4 ⑤ $2\sqrt{6}$

[출처] 2006 모의_공공 교육청 고3 10월 27

11. 직사각형 중에서 짧은 변을 한 변으로 하는 정사각형을 잘라내고 남은 직사각형이 처음의 직사각형과 서로 닮음이 되는 것을 황금직사각형이라고 한다. 그림과 같이 긴 변의 길이가 1인 황금직사각형 R_1에서 짧은 변을 한 변으로 하는 정사각형 S_1을 잘라내고 남은 직사각형을 R_2, 직사각형 R_2에서 정사각형 S_2를 잘라내고 남은 직사각형을 R_3이라고 하자. 이와 같은 방법으로 직사각형 R_4, R_5, R_6, $\cdots$ 을 한없이 만들어 간다. 직사각형 R_n $(n=1, 2, 3, \cdots)$의 둘레의 길이 l_n에 대하여

$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = kl_1$일 때, 상수 k의 값은?



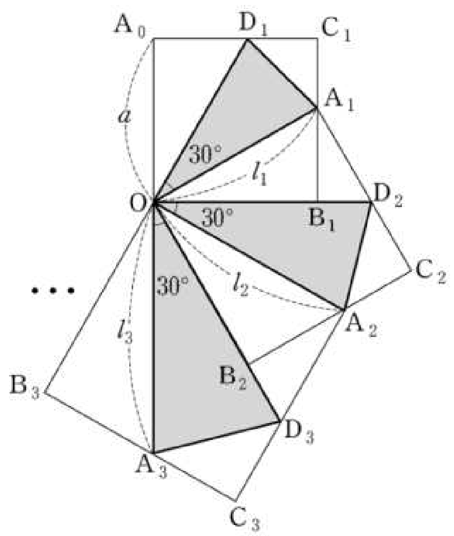
① $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ② $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ③ $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$

④ $3-\sqrt{5}$ ⑤ $3+\sqrt{5}$

[출처] 2006 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 16

[출처] 2006 모의_공공 평가원 고3 06월 16

12. 그림과 같이 한 변의 길이가 a인 정사각형 $OB_1C_1A_0$이 있다. 삼각형 OA_1D_1이 $\angle D_1OA_1 = 30°$인 이등변삼각형이 되도록 변 B_1C_1, A_0C_1 위에 각각 점 A_1, D_1을 잡고 변 OA_1의 길이를 l_1이라 하자. 선분 OA_1을 한 변으로 하는 정사각형 $OB_2C_2A_1$에서 삼각형 OA_2D_2가 $\angle D_2OA_2 = 30°$인 이등변삼각형이 되도록 변 B_2C_2, A_1C_2 위에 각각 점 A_2, D_2를 잡고 변 OA_2의 길이를 l_2라 하자. 선분 OA_2를 한 변으로 하는 정사각형 $OB_3C_3A_2$에서 삼각형 OA_3D_3이 $\angle D_3OA_3 = 30°$인 이등변삼각형이 되도록 변 B_3C_3, A_2C_3 위에 각각 점 A_3, D_3을 잡고 변 OA_3의 길이를 l_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 얻은 이등변삼각형 OA_nD_n에서 변 OA_n의 길이를 l_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l_n} = \sqrt{3}$일 때, a의 값은?



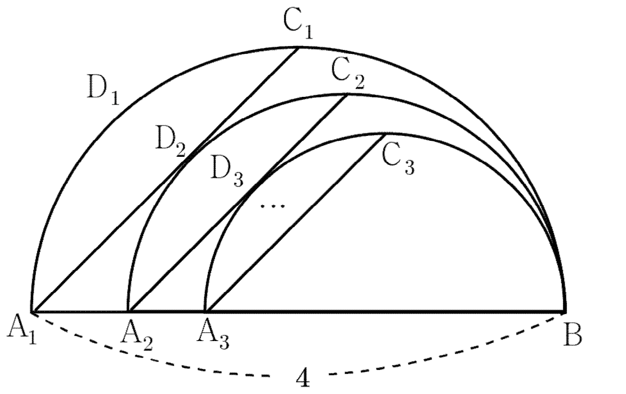
① $\sqrt{3}$ ② $1+\sqrt{3}$ ③ $2+\sqrt{3}$

④ $3+\sqrt{3}$ ⑤ $6+\sqrt{3}$

[출처] 2006 모의_공공 교육청 고3 04월 11

[출처] 2006 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 11

13. 그림과 같이 길이가 4인 선분 A_1B를 지름으로 하는 반원 D_1이 있다. 호 A_1B를 이등분하는 점을 C_1, 점 B를 지나면서 선분 A_1C_1과 접하고 중심이 선분 A_1B 위에 있는 반원을 D_2, 반원 D_2가 선분 A_1B와 만나는 점을 A_2라 하자. 호 A_2B를 이등분하는 점을 C_2, 점 B를 지나면서 선분 A_2C_2와 접하고 중심이 선분 A_1B 위에 있는 반원을 D_3, 반원 D_3이 선분 A_1B와 만나는 점을 A_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 얻은 반원 D_n의 호의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은?



① $2(1+\sqrt{2})\pi$ ② $2(1+\sqrt{2})\pi$ ③ $2(3+\sqrt{2})\pi$

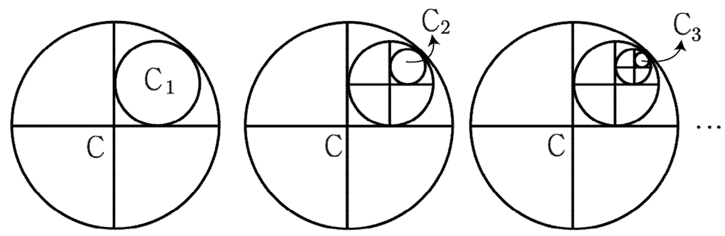
④ $2(2+2\sqrt{2})\pi$ ⑤ $2(3+2\sqrt{2})\pi$

[출처] 2007 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 17

[출처] 2007 모의_공공 교육청 고3 04월 17

14. 반지름의 길이가 1인 원 C가 있다.

원 C를 사분원으로 나누어 한 사분원에 내접하는 원을 C_1, 원 C_1을 사분원으로 나누어 한 사분원에 내접하는 원을 C_2, 원 C_2를 사분원으로 나누어 한 사분원에 내접하는 원을 C_3, … 이와 같은 과정을 계속하여 얻어진 원 C_n의 반지름의 길이를 r_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} r_k$의 값은?



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1+\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

④ $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$ ⑤ 1

[출처] 2008 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 14

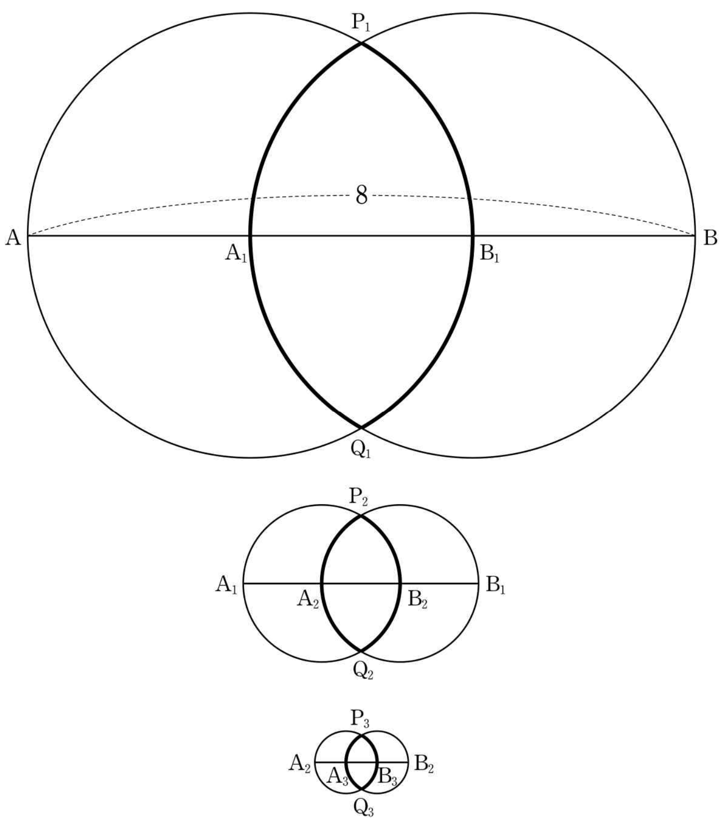
[출처] 2008 모의_공공 평가원 고3 06월 14

15. 그림과 같이 길이가 8인 선분 AB가 있다. 선분 AB의 삼등분점 A_1, B_1을 중심으로 하고 선분 A_1B_1을 반지름으로 하는 두 원이 서로 만나는 두 점을 각각 P_1, Q_1이라고 하자.

선분 A_1B_1의 삼등분점 A_2, B_2를 중심으로 하고 선분 A_2B_2를 반지름으로 하는 두 원이 서로 만나는 두 점을 각각 P_2, Q_2라고 하자.

선분 A_2B_2의 삼등분점 A_3, B_3을 중심으로 하고 선분 A_3B_3을 반지름으로 하는 두 원이 서로 만나는 두 점을 각각 P_3, Q_3이라고 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 호 $P_nA_nQ_n$, $P_nB_nQ_n$의 길이의 합을 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은?

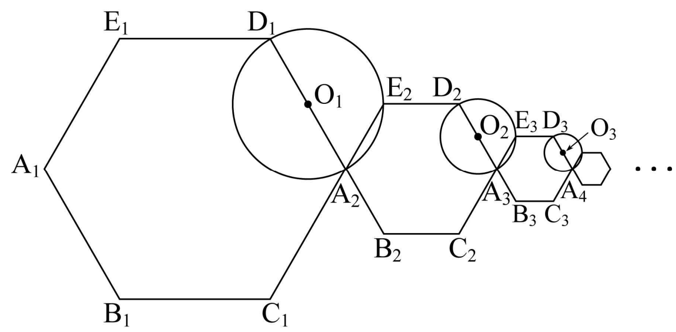


① $\frac{10}{3}\pi$　② 4π　③ $\frac{14}{3}\pi$

④ $\frac{16}{3}\pi$　⑤ 6π

[출처] 2008 모의_공공 교육청 고2 09월 8

16. 그림과 같이 한 변의 길이가 8인 정육각형 $A_1B_1C_1A_2D_1E_1$의 변 A_2D_1을 지름으로 하는 원 O_1을 그린다. 원 O_1과 선분 C_1A_2의 연장선의 교점을 E_2라 할 때, 선분 A_2E_2를 한 변으로 하는 정육각형 $A_2B_2C_2A_3D_2E_2$를 그리고 변 A_3D_2를 지름으로 하는 원 O_2를 그린다. 원 O_2와 선분 C_2A_3의 연장선의 교점을 E_3이라 할 때, 선분 A_3E_3을 한 변으로 하는 정육각형 $A_3B_3C_3A_4D_3E_3$을 그리고 변 A_4D_3을 지름으로 하는 원 O_3을 그린다. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 원 O_n의 둘레의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은?



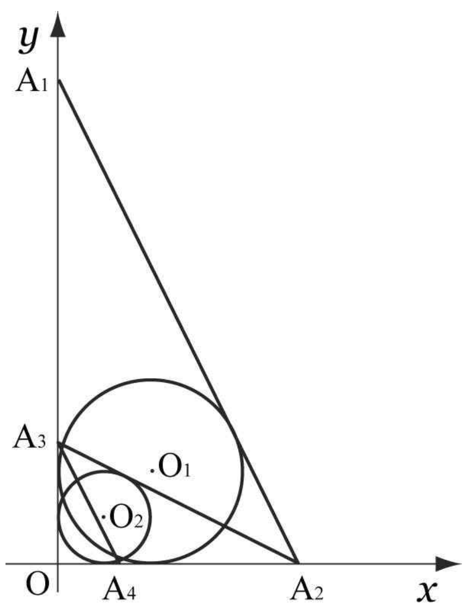
① 16π　② 18π　③ 20π

④ 22π　⑤ 24π

[출처] 2009 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 24

[출처] 2009 모의_공공 교육청 고3 07월 24

17. 그림과 같이 세 점 $O(0, 0)$, $A_1(0, 4)$, $A_2(2, 0)$으로 이루어진 $\triangle OA_1A_2$에 내접하는 원을 O_1이라 하자. y축 위의 점 A_3이 선분 A_1A_2의 기울기와 선분 A_2A_3의 기울기의 곱이 1이 되도록 하는 점일 때, $\triangle OA_2A_3$에 내접하는 원을 O_2라 하자. x축 위의 점 A_4가 선분 A_2A_3의 기울기와 선분 A_3A_4의 기울기의 곱이 1이 되도록 하는 점일 때, $\triangle OA_3A_4$에 내접하는 원을 O_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 생기는 $\triangle OA_nA_{n+1}$에 내접하는 원을 O_n이라 하고, O_n의 반지름의 길이를 r_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} r_n = a - 2\sqrt{b}$ (a, b는 자연수)이다. $a+b$의 값을 구하시오.

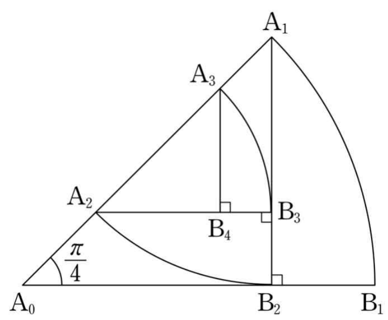


[출처] 2010 모의_공공 평가원 고3 09월 12

18. 그림과 같이 반지름의 길이가 4이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 부채꼴 $A_0A_1B_1$이 있다. 점 A_1에서 선분 A_0B_1에 내린 수선의 발을 B_2라 하고, 선분 A_0A_1 위의 $\overline{A_1B_2} = \overline{A_1A_2}$인 점 A_2에 대하여 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 부채꼴 $A_1A_2B_2$를 그린다. 점 A_2에서 선분 A_1B_2에 내린 수선의 발을 B_3이라 하고, 선분 A_1A_2 위의 $\overline{A_2B_3} = \overline{A_2A_3}$인 점 A_3에 대하여 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 부채꼴 $A_2A_3B_3$을 그린다.

이와 같은 과정을 계속하여 점 A_n에서 선분 $A_{n-1}B_n$에 내린 수선의 발을 B_{n+1}이라 하고, 선분 $A_{n-1}A_n$ 위의 $\overline{A_nB_{n+1}} = \overline{A_nA_{n+1}}$인 점 A_{n+1}에 대하여 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 부채꼴 $A_nA_{n+1}B_{n+1}$을 그린다.

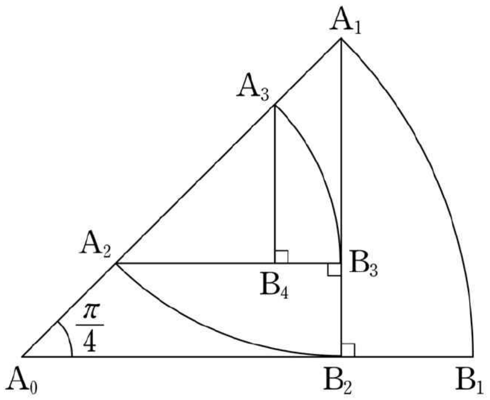
부채꼴 $A_{n-1}A_nB_n$의 호 A_nB_n의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은?



① $(4-\sqrt{2})\pi$ ② $(2+\sqrt{2})\pi$ ③ $(2+2\sqrt{2})\pi$
④ $(4+\sqrt{2})\pi$ ⑤ $(4+2\sqrt{2})\pi$

[출처] 2010 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 12

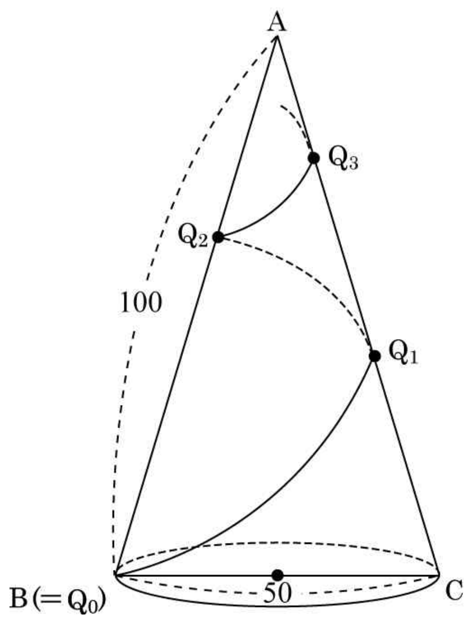
19. 그림과 같이 반지름의 길이가 4 이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 인 부채꼴 $\mathrm{A_0A_1B_1}$ 이 있다. 점 $\mathrm{A_1}$ 에서 선분 $\mathrm{A_0B_1}$ 에 내린 수선의 발을 $\mathrm{B_2}$ 라 하고, 선분 $\mathrm{A_0A_1}$ 위의 $\overline{\mathrm{A_1B_2}}=\overline{\mathrm{A_1A_2}}$ 인 점 $\mathrm{A_2}$ 에 대하여 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 인 부채꼴 $\mathrm{A_1A_2B_2}$ 을 그린다. 점 $\mathrm{A_2}$ 에서 선분 $\mathrm{A_1A_2}$ 위의 $\overline{\mathrm{A_2B_3}}=\overline{\mathrm{A_2A_3}}$ 인 점 $\mathrm{A_3}$ 에 대하여 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 인 부채꼴 $\mathrm{A_2A_3B_3}$ 을 그린다. 이와 같은 과정을 계속하여 점 A_n 에서 선분 $\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n$ 위의 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_{n+1}}=\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}$ 인 점 A_{n+1} 에 대하여 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 인 부채꼴 $\mathrm{A}_nA_{n+1}B_{n+1}$ 을 그린다. 부채꼴 $\mathrm{A}_{n-1}A_nB_n$ 의 호 A_nB_n 의 길이를 l_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ 의 값은?



① $(4-\sqrt{2})\pi$ ② $(2+\sqrt{2})\pi$ ③ $(2+2\sqrt{2})\pi$
④ $(4+\sqrt{2})\pi$ ⑤ $(4+2\sqrt{2})\pi$

[출처] 2010 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 22
[출처] 2010 모의_공공 교육청 고3 07월 22

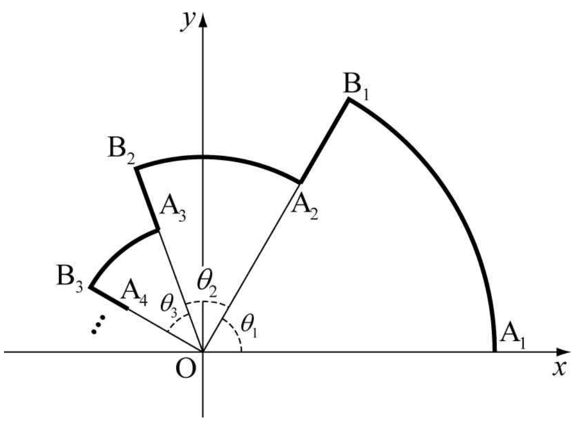
20. 그림과 같이 점 A를 꼭짓점으로 하고 선분 BC를 밑면의 지름으로 하며 $\overline{\mathrm{AB}}=100$, $\overline{\mathrm{BC}}=50$ 인 직원뿔이 있다. 모선 AC 위의 점 $\mathrm{Q_1}$ 은 점 B에서 원뿔의 옆면을 돌아 모선 AC에 최단 거리로 이르는 점이고, 모선 AB위의 점 $\mathrm{Q_2}$ 는 점 $\mathrm{Q_1}$ 에서 원뿔의 옆면을 돌아 모선 AB에 최단 거리로 이르는 점이다. 이와 같은 방법으로 점 Q_n 은 모선 AB 또는 AC위의 점 $\mathrm{Q_{n-1}}$ 에서 원뿔의 옆면을 돌아 다른 모선에 최단 거리로 이르는 점이라고 하자. 점 Q_{n-1} 에서 점 $\mathrm{Q_n}$ 에 이르는 최단 거리를 l_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ 의 값은 $a+b\sqrt{2}$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하시오.
(단, $\mathrm{B}=\mathrm{Q_0}$, a 와 b 는 유리수이다.)



[출처] 2011 모의_공공 교육청 고2 09월 21

21. 그림과 같이 원점 O와 점 $\mathrm{A_1}(1, 0)$을 이은 선분 $\mathrm{OA_1}$을 반지름으로 하고 중심각의 크기가 $\theta_1=\frac{\pi}{3}$인 부채꼴 $\mathrm{OA_1B_1}$을 그린다. 선분 $\mathrm{OB_1}$을 $2:1$로 내분하는 점을 $\mathrm{A_2}$라 하고, 선분 $\mathrm{OA_2}$를 반지름으로 하고 중심각의 크기가 $\theta_2=\frac{5}{6}\theta_1$인 부채꼴 $\mathrm{OA_2B_2}$를 그린다. 선분 $\mathrm{OB_2}$를 $2:1$로 내분하는 점을 $\mathrm{A_3}$이라 하고, 선분 $\mathrm{OA_3}$을 반지름으로 하고 중심각의 크기가 $\theta_3=\frac{5}{6}\theta_2$인 부채꼴 $\mathrm{OA_3B_3}$을 그린다. 이와 같은 과정을 계속하여 얻은 부채꼴 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$의 호 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 길이를 l_n, 선분 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_n$의 길이를 k_n이라 하자.

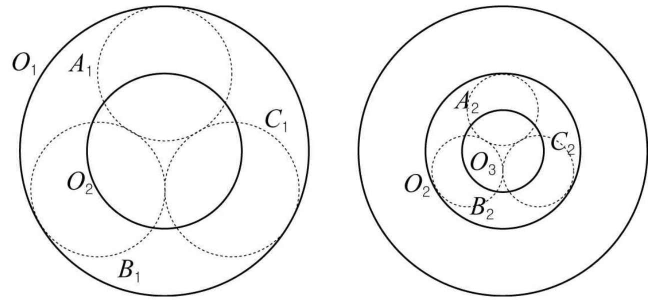
$\sum_{n=1}^{\infty}(l_n+k_n)=a\pi+b$일 때, $a+b$의 값은?
(단, a, b는 유리수)



① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{7}{4}$
④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{11}{4}$

[출처] 2011 모의_공공 교육청 고3 07월 21
[출처] 2011 모의_공공 교육청 고3 07월 21

22. 반지름의 길이가 3인 원 O_1이 있다. 그림과 같이 원 O_1에 내접하고 서로 외접하게 그린 반지름의 길이가 같은 세 원 A_1, B_1, C_1의 중심을 지나는 원을 O_2라 하자. 원 O_2에 내접하고 서로 외접하게 그린 반지름의 길이가 같은 세 원 A_2, B_2, C_2의 중심을 지나는 원을 O_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 그린 원 O_n의 둘레의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}l_n$의 값은?

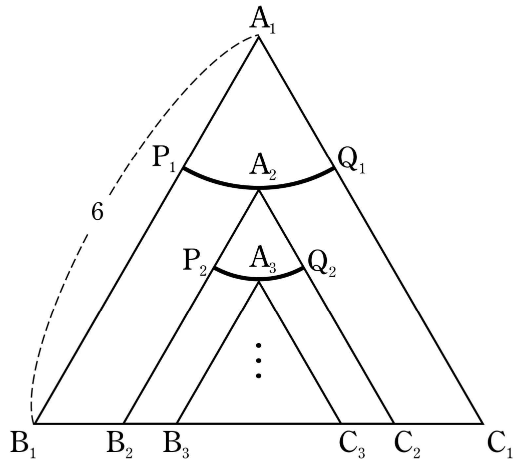


① $(5+4\sqrt{3})\pi$ ② $(6+4\sqrt{3})\pi$ ③ $(7+4\sqrt{3})\pi$
④ $(8+4\sqrt{3})\pi$ ⑤ $(9+4\sqrt{3})\pi$

[출처] 2011 모의_공공 교육청 고3 10월 21

[출처] 2011 모의_공공 교육청 고3 10월 21

23. 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다. 꼭짓점 A_1을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{3}\overline{A_1B_1}$인 원이 삼각형 $A_1B_1C_1$과 만나는 점을 각각 P_1, Q_1이라 하고 삼각형 $A_1B_1C_1$의 내부에 있는 호 P_1Q_1을 이등분하는 점을 A_2라 하자. 점 A_2를 꼭짓점으로 하고 나머지 두 꼭짓점 B_2, C_2가 변 B_1C_1 위에 있는 정삼각형 $A_2B_2C_2$를 그린다. 꼭짓점 A_2를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{3}\overline{A_2B_2}$인 원이 삼각형 $A_2B_2C_2$와 만나는 점을 각각 P_2, Q_2라 하고 삼각형 $A_2B_2C_2$의 내부에 있는 호 P_2Q_2를 이등분하는 점을 A_3이라 하자. 점 A_3을 꼭짓점으로 하고 나머지 두 꼭짓점 B_3, C_3이 변 B_1C_1 위에 있는 정삼각형 $A_3B_3C_3$을 그린다. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 호 P_nQ_n의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은?



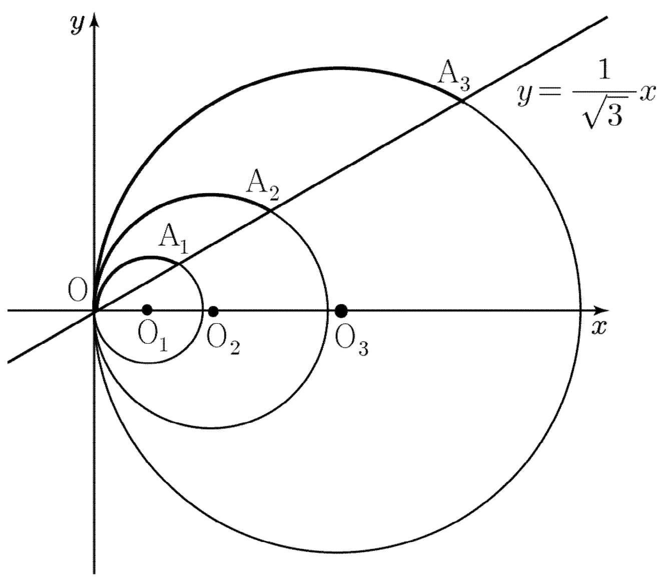
① $\sqrt{3}\pi$ ② $\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$ ③ $2\sqrt{3}\pi$

④ $\frac{5\sqrt{3}}{2}\pi$ ⑤ $3\sqrt{3}\pi$

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고3 10월 21

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고3 10월 21

24. 그림과 같이 중심이 $(1, 0)$이고 반지름의 길이가 1인 원 O_1이 있다. 원 O_1이 직선 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$와 만나는 점 중에서 원점이 아닌 점을 A_1이라 하고 직선 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$의 윗 쪽에 있는 호 OA_1의 길이를 l_1이라 하자. 중심이 $(l_1, 0)$이고 반지름의 길이가 l_1인 원 O_2를 그린다. 원 O_2가 직선 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$와 만나는 점 중에서 원점이 아닌 점을 A_2라 하고 직선 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$의 윗 쪽에 있는 호 OA_2의 길이를 l_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 호의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l_n}$의 값은?



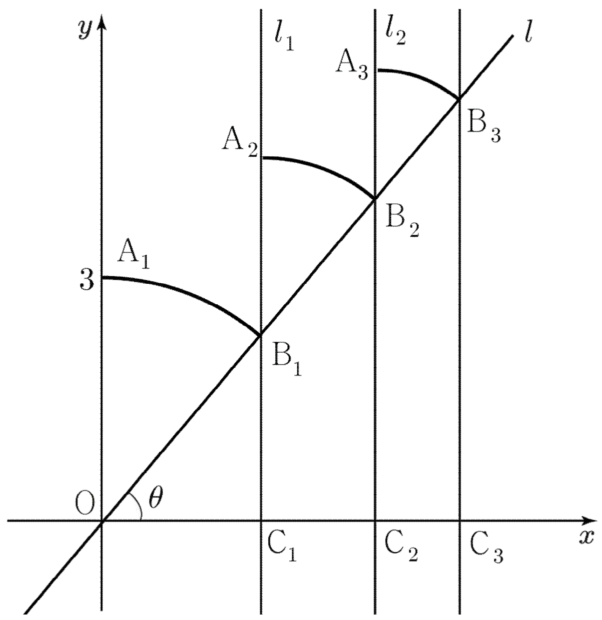
① $\frac{1}{\pi-3}$ ② $\frac{2}{\pi-3}$ ③ $\frac{1}{2\pi-3}$

④ $\frac{2}{2\pi-3}$ ⑤ $\frac{3}{2\pi-3}$

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고3 07월 14

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고3 07월 14

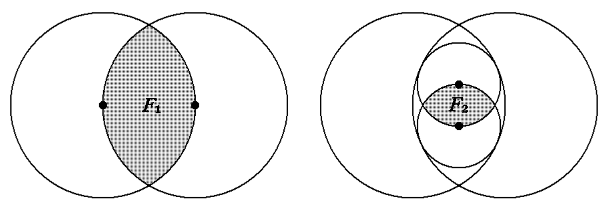
25. 그림과 같이 원점 O를 지나고 기울기가 $\tan\theta$인 직선 l과 점 $\mathrm{A_1}(0,\ 3)$이 있다. 점 O를 중심으로 하고 $\overline{\mathrm{OA_1}}$을 반지름으로 하는 원과 직선 l이 만나는 점을 $\mathrm{B_1}$이라 하자. $\mathrm{B_1}$을 지나고 y축에 평행한 직선 l_1이 x축과 만나는 점을 $\mathrm{C_1}$이라 하고, 직선 l_1 위에 $\overline{\mathrm{OC_1}}=\overline{\mathrm{B_1A_2}}$가 되는 점 $\mathrm{A_2}$를 잡는다. 점 $\mathrm{B_1}$을 중심으로 하고 $\overline{\mathrm{B_1A_2}}$를 반지름으로 하는 원과 직선 l이 만나는 점을 $\mathrm{B_2}$라 하자. $\mathrm{B_2}$를 지나고 y축에 평행한 직선 l_2가 x축과 만나는 점을 $\mathrm{C_2}$라 하고, 직선 l_2 위에 $\overline{\mathrm{C_1C_2}}=\overline{\mathrm{B_2A_3}}$이 되는 점 $\mathrm{A_3}$을 잡는다. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 부채꼴 $\mathrm{B}_{n-1}B_nA_n$의 호의 길이를 $\widehat{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}$이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=9\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$이다. $\overline{\mathrm{B_1C_1}}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이고 $\mathrm{B_0}$은 원점이다.)

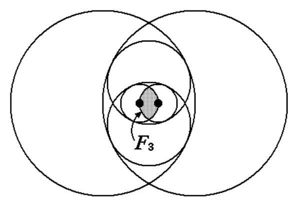


① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$
④ $\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{7}$

[출처] 2012 모의_공공 사관학교 고3 07월 24

26. 그림과 같이 반지름의 길이가 3인 두 원을 서로의 중심을 지나도록 그렸을 때, 두 원의 내부에서 겹친 부분이 나타내는 도형을 F_1이라 하자. F_1의 내부에 반지름의 길이가 같고 서로의 중심을 지나는 두 원을 F_1과 접하면서 반지름의 길이가 최대가 되도록 그렸을 때, 그려진 두 원의 내부에서 겹친 부분이 나타내는 도형을 F_2라 하자. F_2의 내부에 반지름의 길이가 같고 서로의 중심을 지나는 두 원을 F_2와 접하면서 반지름의 길이가 최대가 되도록 그렸을 때, 그려진 두 원의 내부에서 겹친 부분이 나타내는 도형을 F_3이라 하자.



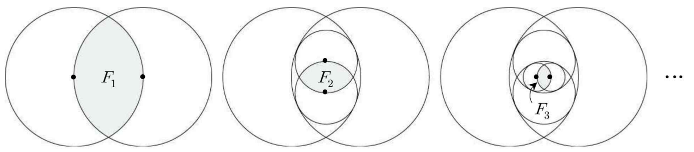


이와 같은 방법으로 계속하여 도형 F_n을 그려 나갈 때, F_n의 둘레의 길이를 l_n이라 하자. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}l_n$의 값은?

① $2\pi(1+\sqrt{7})$ ② $\frac{8\pi}{3}(1+\sqrt{7})$
③ $\frac{4\pi}{3}(2+\sqrt{7})$ ④ $2\pi(2+\sqrt{7})$
⑤ $\frac{5\pi}{3}(2+\sqrt{7})$

[출처] 2012 모의_공공 사관학교 고3 07월 24

27. 그림과 같이 반지름의 길이가 3인 두 원을 서로의 중심을 지나도록 그렸을 때, 두 원의 내부에서 겹친 부분이 나타내는 도형을 F_1이라 하자. F_1의 내부에 반지름의 길이가 같고 서로의 중심을 지나는 두 원을 F_1과 접하면서 반지름의 길이가 최대가 되도록 그렸을 때, 그려진 두 원의 내부에서 겹친 부분이 나타내는 도형을 F_2라 하자. F_2의 내부에 반지름의 길이가 같고 서로의 중심을 지나는 두 원을 F_2와 접하면서 반지름의 길이가 최대가 되도록 그렸을 때, 그려진 두 원의 내부에서 겹친 부분이 나타내는 도형을 F_3이라 하자.

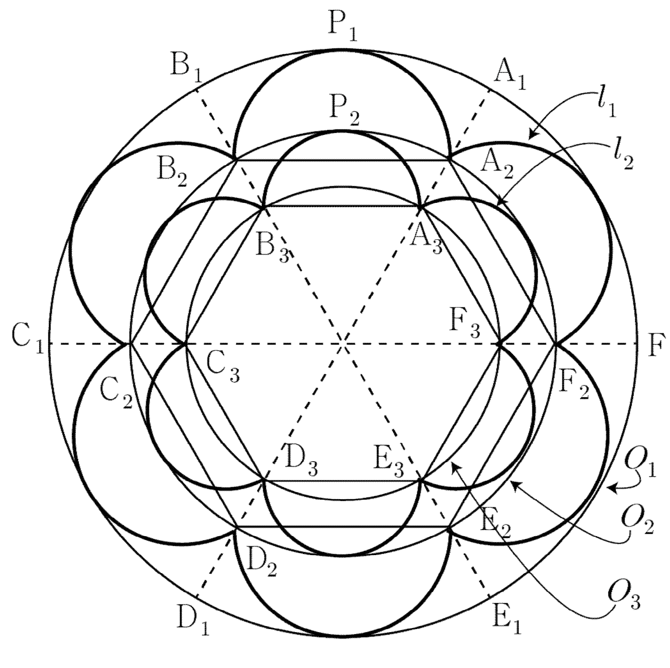


이와 같은 방법으로 계속하여 도형 F_n을 그려 나갈 때, F_n의 둘레의 길이를 l_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은?

① $2\pi(1+\sqrt{7})$ ② $\frac{8\pi}{3}(1+\sqrt{7})$
③ $\frac{4\pi}{3}(2+\sqrt{7})$ ④ $2\pi(2+\sqrt{7})$
⑤ $\frac{5\pi}{3}(2+\sqrt{7})$

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고2 11월 20

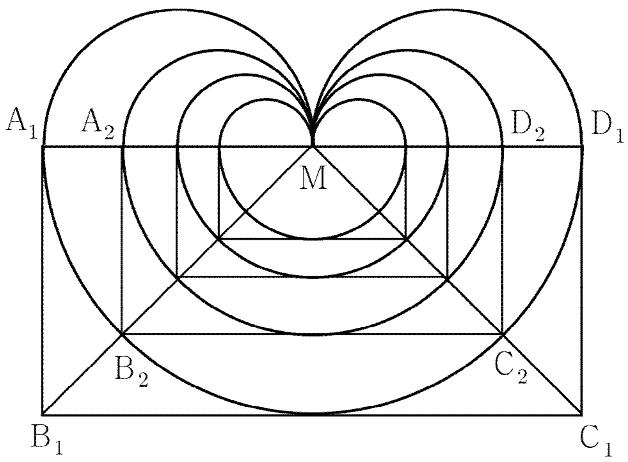
28. 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 2인 원 O_1의 6등분점을 각각 A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1이라 하자. 중심각의 크기가 60°인 부채꼴 OA_1B_1의 호 A_1B_1의 이등분점을 P_1이라 하고, 선분 OA_1 위에 $\angle OP_1A_2 = 45^\circ$가 되도록 점 A_2를 정한다. 중심이 O이고 선분 OA_2를 반지름으로 하는 원 O_2가 5개의 선분 OB_1, OC_1, OD_1, OE_1, OF_1과 만나는 점을 각각 B_2, C_2, D_2, E_2, F_2라 하고, 원 O_2의 외부에 정육각형 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$의 각 변을 지름으로 하는 6개의 반원을 그리고, 이 6개의 반원의 호의 길이의 합을 l_1이라 하자. 중심각의 크기가 60°인 부채꼴 OA_2B_2의 호 A_2B_2의 이등분점을 P_2라 하고, 선분 OA_2 위에 $\angle OP_2A_3 = 45^\circ$가 되도록 점 A_3을 정한다. 중심이 O이고 선분 OA_3을 반지름으로 하는 원 O_3이 5개의 선분 OB_2, OC_2, OD_2, OE_2, OF_2와 만나는 점을 각각 B_3, C_3, D_3, E_3, F_3이라 하고, 원 O_3의 외부에 정육각형 $A_3B_3C_3D_3E_3F_3$의 각 변을 지름으로 하는 6개의 반원을 그리고, 이 6개의 반원의 호의 길이의 합을 l_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 6개의 반원의 호의 길이의 합을 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은?



① $6(1+\sqrt{3})\pi$ ② $6(2+\sqrt{3})\pi$ ③ $12(1+\sqrt{3})\pi$
④ $12(2+\sqrt{3})\pi$ ⑤ $12(1+2\sqrt{3})\pi$

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고2 11월 15

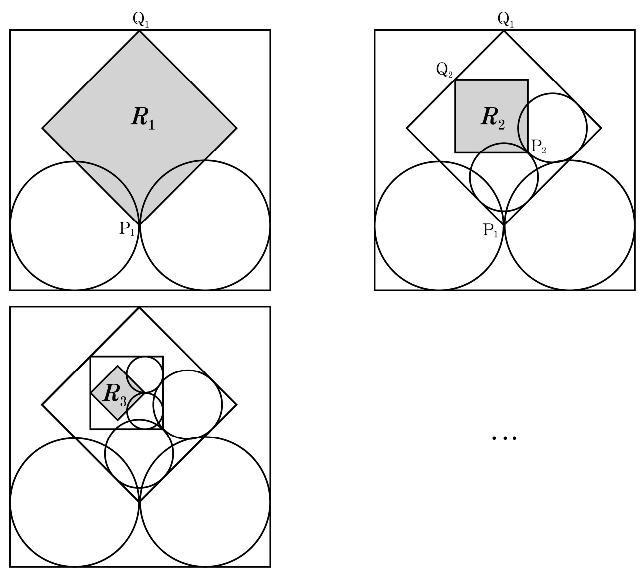
29. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{A_1D_1}=2$ 인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 에 대하여 선분 A_1D_1 의 중점을 M 이라 하자. 선분 A_1D_1 을 지름으로 하는 반원과 선분 A_1M 과 선분 MD_1 을 각각 지름으로 하는 두 반원을 그려서 얻은 모양의 도형의 둘레의 길이를 l_1 이라 하자. 선분 MB_1 과 선분 MC_1 이 선분 A_1D_1 을 지름으로 하는 반원과 만나는 점을 각각 B_2, C_2 라 하고, 점 B_2 와 점 C_2 에서 선분 A_1D_1 에 내린 수선의 발을 각각 A_2, D_2 라 하자. 선분 A_2D_2 를 지름으로 하는 반원과 선분 A_2M 과 선분 MD_2 를 각각 지름으로 하는 두 반원을 그려서 새로 얻은 모양의 도형의 둘레의 길이를 l_2 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 모양의 도형의 둘레의 길이를 l_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ 의 값은?



① $(1+\sqrt{2})\pi$ ② $(2+\sqrt{2})\pi$ ③ $(3+2\sqrt{2})\pi$
④ $(4+2\sqrt{2})\pi$ ⑤ $(5+3\sqrt{2})\pi$

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 03월 18

30. 한 변의 길이가 4 인 정사각형이 있다. 그림과 같이 지름이 2 인 두 원이 서로 한 점 P_1 에서 만나고 정사각형의 두 변에 각각 접하도록 그린다. 정사각형의 네 변 중 원과 접하지 않는 변의 중점을 Q_1 이라 하고, 선분 P_1Q_1 을 대각선으로 하는 정사각형 R_1 을 그린다. 이때, R_1 의 한 변의 길이를 l_1 이라 하자. 지름이 $\frac{l_1}{2}$ 인 두 원이 서로 한 점 P_2 에서 만나고 정사각형 R_1 의 두 변에 각각 접하도록 그린다. 정사각형 R_1 의 네 변 중 원과 접하지 않는 변의 중점을 Q_2 라 하고, 선분 P_2Q_2 를 대각선으로 하는 정사각형 R_2 를 그린다. 이때, R_2 의 한 변의 길이를 l_2 라 하자. 지름이 $\frac{l_2}{2}$ 인 두 원이 서로 한 점 P_3 에서 만나고 정사각형 R_2 의 두 변에 각각 접하도록 그린다. 정사각형 R_2 의 네 변 중 원과 접하지 않는 변의 중점을 Q_3 이라 하고, 선분 P_3Q_3 을 대각선으로 하는 정사각형 R_3 을 그린다. 이때, R_3 의 한 변의 길이를 l_3 이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 그린 정사각형 R_n 의 한 변의 길이를 l_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ 의 값은?

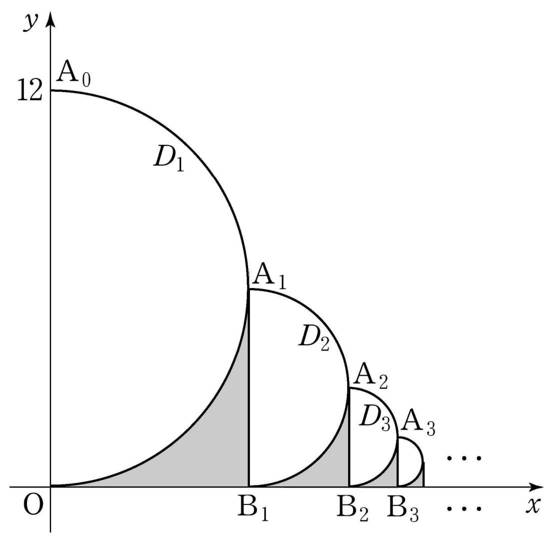


① $\frac{12(3+4\sqrt{2})}{23}$ ② $\frac{24(2+\sqrt{2})}{23}$ ③ $\frac{12(1+4\sqrt{2})}{23}$
④ $\frac{3(3+2\sqrt{2})}{7}$ ⑤ $\frac{3(3+\sqrt{2})}{7}$

[출처] 2005 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 17

[출처] 2005 모의_공공 평가원 고3 06월 17

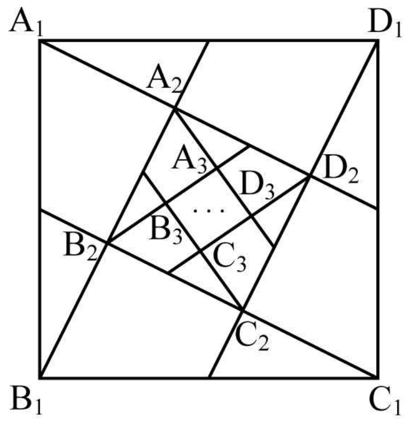
31. 그림과 같이 원점과 점 $\mathrm{A}_0(0,\ 12)$를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 아래 반원을 D_1이라 하자. 원점을 지나고 기울기가 1인 직선이 D_1과 제 1사분면에서 만나는 점을 A_1, 점 A_1에서 x축에 내린 수선의 발을 B_1이라 하고, 반원 D_1, x축, 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하자. 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$을 지름으로 하는 원의 아래 반원을 D_2라 하자. 점 B_1을 지나고 기울기가 1인 직선이 D_2와 제 1사분면에서 만나는 점을 A_2, 점 A_2에서 x축에 내린 수선의 발을 B_2라 하고, 반원 D_2, x축, 선분 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?



① $9(4-\pi)$ ② $12(4-\pi)$ ③ $15(4-\pi)$
④ $4(8-\pi)$ ⑤ $6(8-\pi)$

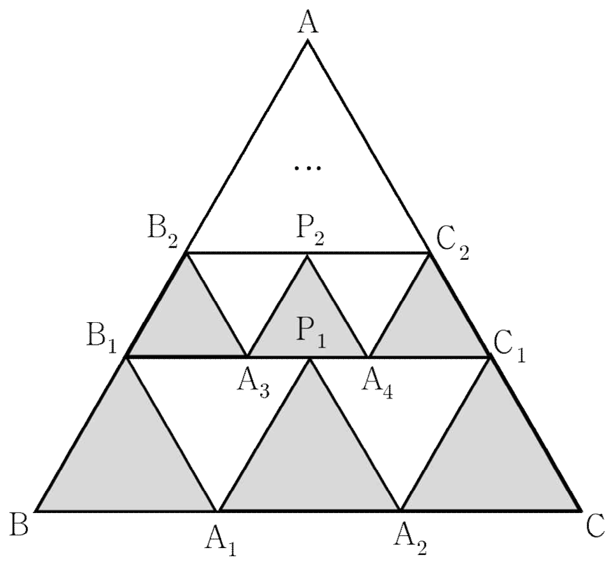
[출처] 2005 모의_공공 교육청 고2 09월 30

32. 그림과 같이 넓이가 1인 정사각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1\mathrm{D}_1$의 각 변의 중점과 꼭짓점을 이은 선분으로 둘러싸인 정사각형을 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2\mathrm{D}_2$라 하고, 다시 정사각형 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2\mathrm{D}_2$의 각 변의 중점과 꼭짓점을 이은 선분으로 둘러싸인 정사각형을 $\mathrm{A}_3\mathrm{B}_3\mathrm{C}_3\mathrm{D}_3$이라 하자. 이와 같은 방법으로 계속하여 만든 정사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$의 넓이를 S_n이라 할 때, $100\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값을 구하시오.



[출처] 2005 모의_공공 교육청 고3 07월 29

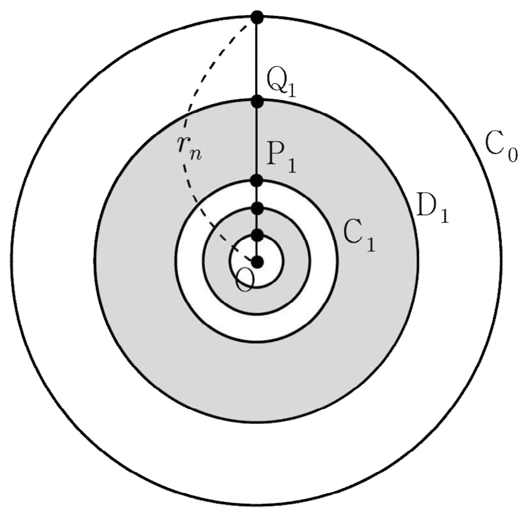
33. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC가 있다. 선분 BC의 삼등분 점을 A_1, A_2라 하고 선분 BA_1, A_1A_2, A_2C를 각각 한 변으로 하는 정삼각형 B_1BA_1, $P_1A_1A_2$, C_1A_2C를 만든다. 다시 삼각형 AB_1C_1에서 선분 B_1C_1의 삼등분 점을 A_3, A_4라 하고 같은 방법으로 세 정삼각형 $B_2B_1A_3$, $P_2A_3A_4$, $C_2A_4C_1$을 만든다. 이와 같은 방법으로 계속하여 삼각형을 만들어 나갈 때, 어두운 부분의 넓이의 합은?



① $\dfrac{\sqrt{3}}{10}$ ② $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$ ③ $\dfrac{3\sqrt{3}}{20}$
④ $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ ⑤ $\dfrac{3\sqrt{3}}{16}$

[출처] 2005 모의_공공 사관학교 고3 07월 24

34. 다음 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 r_0인 원 C_0가 있다. 원 C_0의 반지름을 3등분하여 원점 O에서부터 가까운 점을 차례로 P_1, Q_1이라 하고, 중심이 O이고 반지름을 $\overline{OP_1}$, $\overline{OQ_1}$으로 하는 원을 각각 C_1, D_1이라 하자. 같은 방법으로 원 C_1의 반지름 $\overline{OP_1}$을 3등분하여 원점 O에서부터 가까운 점을 차례로 P_2, Q_2이라 하고, 중심이 O이고 반지름을 $\overline{OP_2}$, $\overline{OQ_2}$으로 하는 원을 각각 C_2, D_2이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 원 C_n, D_n (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)을 만든다. 이 때, 원 D_n의 넓이에서 원 C_n의 넓이를 뺀 값을 s_n이라 하면 $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$의 값은?



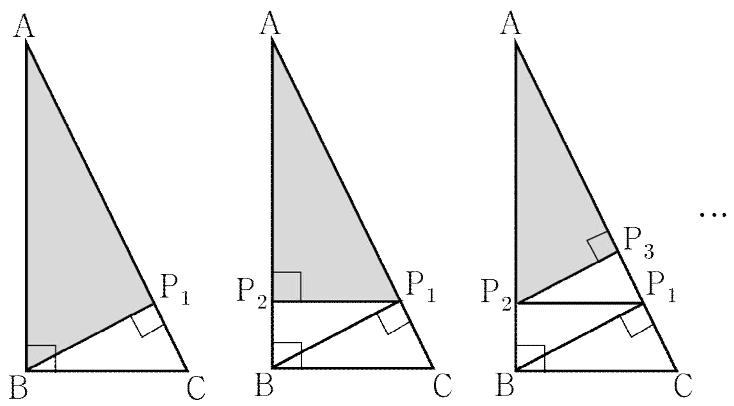
① $\dfrac{3}{4}\pi r_0^2$ ② $\dfrac{3}{8}\pi r_0^2$ ③ $\dfrac{5}{8}\pi r_0^2$
④ $\dfrac{9}{16}\pi r_0^2$ ⑤ $\dfrac{9}{64}\pi r_0^2$

[출처] 2006 모의_공공 교육청 고2 11월

35. [그림 1]과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=1$인 직각삼각형 ABC의 꼭짓점 B에서 대변 AC에 내린 수선의 발을 P_1, $\triangle ABP_1$의 넓이를 S_1이라 하자. [그림 2]와 같이 직각삼각형 $\triangle ABP_1$의 꼭짓점 P_1에서 대변 AB에 내린 수선의 발을 P_2, $\triangle AP_1P_2$의 넓이를 S_2라 하자. [그림 3]과 같이 직각삼각형 $\triangle AP_1P_2$의 꼭짓점 P_2에서 대변 AP_1에 내린 수선의 발을 P_3, $\triangle AP_2P_3$의 넓이를 S_3이라 하자.

⋮

이와 같은 과정을 계속하여 얻은 $\triangle AP_{n-1}P_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 합은? (단, $B=P_0$)

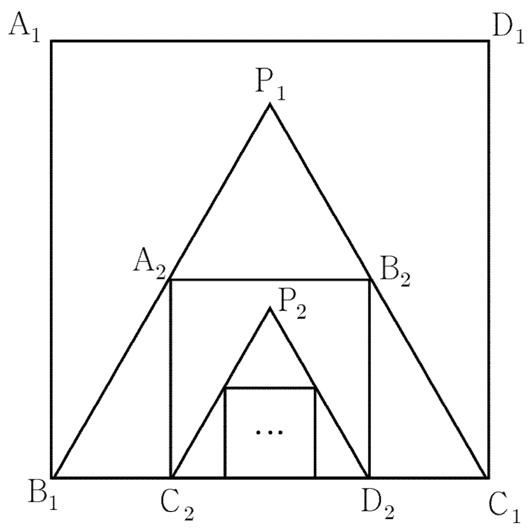


[그림 1] [그림 2] [그림 3]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

[출처] 2007 모의_공공 교육청 고3 07월 17

36. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 내부에 선분 B_1C_1을 한 변으로 하는 정삼각형 $P_1B_1C_1$을 만든다. 다시 선분 B_1C_1 위에 정삼각형 $P_1B_1C_1$에 내접하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 만든다. 이와 같은 방법으로 만들어지는 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

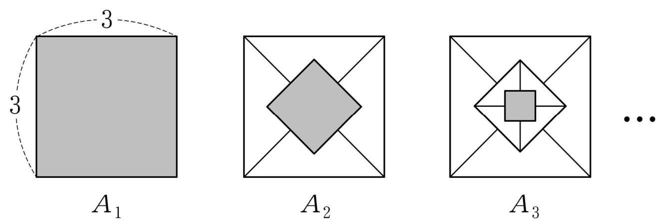


① $4\sqrt{3}+15$ ② $5\sqrt{3}+10$ ③ $5\sqrt{3}+25$
④ $6\sqrt{3}+5$ ⑤ $6\sqrt{3}+10$

[출처] 2007 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 13

[출처] 2007 모의_공공 평가원 고3 09월 13

37. 그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정사각형을 A_1, 그 넓이를 S_1이라 하자. 정사각형 A_1에 대각선을 그어 만들어진 4개의 삼각형의 무게중심을 연결한 정사각형을 A_2, 그 넓이를 S_2라 하자. 같은 방법으로 정사각형 A_2에 대각선을 그어 만들어진 4개의 삼각형의 무게중심을 연결한 정사각형을 A_3, 그 넓이를 S_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 $(n-1)$번째 얻은 정사각형을 A_n, 그 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

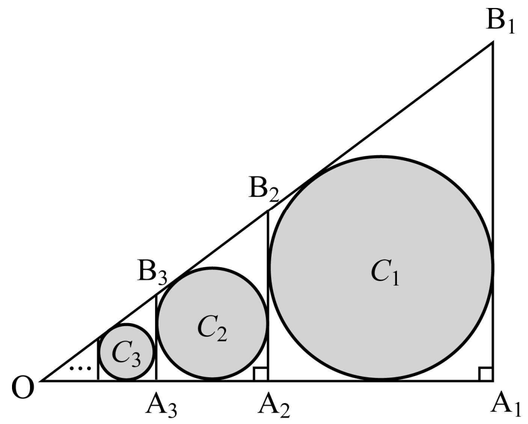


① $\frac{64}{7}$ ② $\frac{21}{2}$ ③ $\frac{72}{7}$

④ $\frac{27}{2}$ ⑤ $\frac{81}{7}$

[출처] 2007 모의_공공 교육청 고2 09월 16

38. 그림과 같이 세 변의 길이가 $\overline{\mathrm{OA_1}}=8$, $\overline{\mathrm{A_1B_1}}=6$, $\overline{\mathrm{OB_1}}=10$인 직각삼각형 $\mathrm{OA_1B_1}$에 내접하는 원 C_1을 만든다. 원 C_1에 접하면서 변 $\mathrm{OA_1}$에 수직인 직선이 두 변 $\mathrm{OA_1}$, $\mathrm{OB_1}$과 만나는 점을 각각 $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{B_2}$라 하고, $\triangle \mathrm{OA_2B_2}$에 내접하는 원 C_2를 만든다. 원 C_2에 접하면서 변 $\mathrm{OA_1}$에 수직인 직선이 두 변 $\mathrm{OA_1}$, $\mathrm{OB_1}$과 만나는 점을 각각 $\mathrm{A_3}$, $\mathrm{B_3}$이라 하고, $\triangle \mathrm{OA_3B_3}$에 내접하는 원 C_3을 만든다.



이와 같은 과정을 한없이 계속하여 만든 원 C_1, C_2, C_3, $\cdots$의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3, $\cdots$이라 할 때, 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 합은?

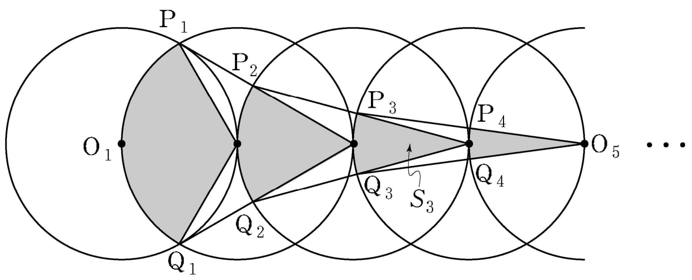
① $\frac{16}{3}\pi$ ② 6π ③ $\frac{20}{3}\pi$

④ 7π ⑤ $\frac{22}{3}\pi$

[출처] 2007 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 15

[출처] 2007 모의_공공 평가원 고3 06월 15

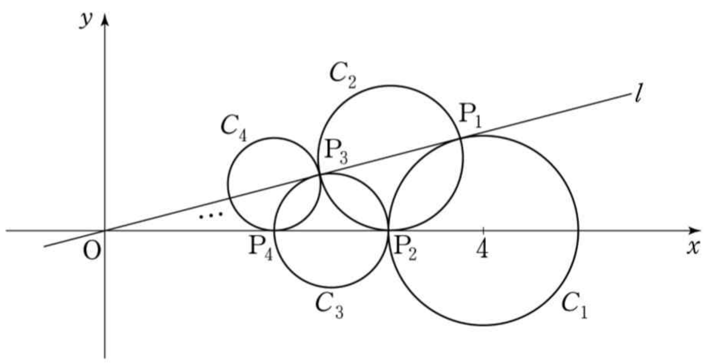
39. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심이 O_1, O_2, O_3, $\cdots$ 인 원들이 있다. 모든 원들의 중심은 한 직선 위에 있고, $\overline{\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}}=1\,(n=1,2,3,\cdots)$이다. 두 원 O_1, O_2가 만나는 두 점을 각각 P_1, Q_1이라 하고, 부채꼴 $\mathrm{O}_2\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$의 넓이를 S_1이라 하자. 두 점 P_1, Q_1에서 원 O_3의 중심과 연결한 선분이 원 O_3과 만나는 두 점을 각각 P_2, Q_2라 하고, 부채꼴 $\mathrm{O}_3\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2$의 넓이를 S_2라 하자. 두 점 P_2, Q_2에서 원 O_4의 중심과 연결한 선분이 원 O_4와 만나는 두 점을 각각 P_3, Q_3이라 하고, 부채꼴 $\mathrm{O}_4\mathrm{P}_3\mathrm{Q}_3$의 넓이를 S_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 부채꼴 $\mathrm{O}_{n+1}P_nQ_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?



① $\frac{\pi}{2}$　② $\frac{2}{3}\pi$　③ $\frac{5}{6}\pi$　④ π　⑤ $\frac{7}{6}\pi$

[출처] 2008 모의_공공 평가원 고3 11월 14

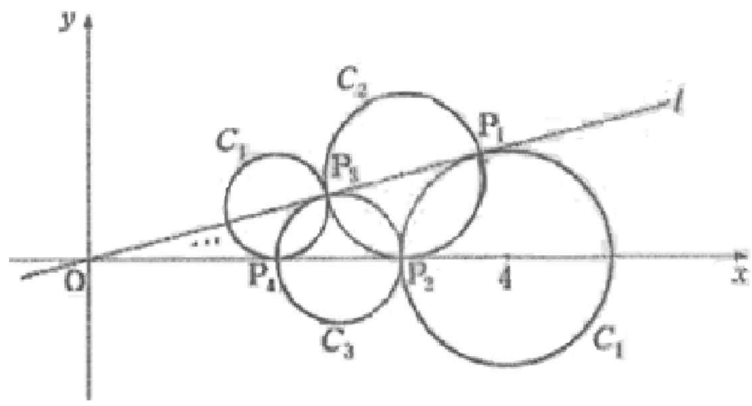
40. 좌표평면에 원 $C_1 : (x-4)^2+y^2=1$이 있다. 그림과 같이 원점에서 원 C_1에 기울기가 양수인 접선 l을 그었을 때 생기는 접점을 P_1이라 하자. 중심이 직선 l 위에 있고 점 P_1을 지나며 x축에 접하는 원을 C_2라 하고 이 원과 x축의 접점을 P_2라 하자. 중심이 x축 위에 있고 점 P_2를 지나며 직선 l에 접하는 원을 C_3이라 하고 이 원과 직선 l의 접점을 P_3이라 하자. 중심이 직선 l 위에 있고 점 P_3을 지나며 x축에 접하는 원을 C_4라 하고 이 원과 x축의 접점을 P_4라 하자. 이와 같은 과정을 계속할 때, 원 C_n의 넓이를 S_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? (단, 원 C_{n+1}의 반지름의 길이는 원 C_n의 반지름의 길이보다 작다.)



① $\frac{3}{2}\pi$　② 2π　③ $\frac{5}{2}\pi$　④ 3π　⑤ $\frac{7}{2}\pi$

[출처] 2008 모의_공공 평가원 고3 11월 공통범위 14

41. 좌표평면에 원 $C_1:(x-4)^2+y^2=1$이 있다. 아래 그림과 같이 원점에서 원 C_1에 기울기가 양수인 접선 l을 그었을 때, 생기는 접점을 P_1이라 하자. 중심이 직선 l 위에 있고 점 P_1을 지나며 x축에 접하는 원을 C_2라 하고 이 원과 x축의 접점을 P_2라 하자. 중심이 x축 위에 있고 점 P_2를 지나며 직선 l에 접하는 원을 C_3이라 하고 이 원과 직선 l의 접점을 P_3이라 하자. 중심이 직선 l위에 있고 점 P_3을 지나며 x축에 접하는 원을 C_4라 하고 이 원과 x축의 접점을 P_4라 하자. 이와 같은 과정을 계속할 때, 원 C_n의 넓이를 S_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? (단, 원 C_{n+1}의 반지름의 길이는 원 C_n의 반지름의 길이보다 작다.)

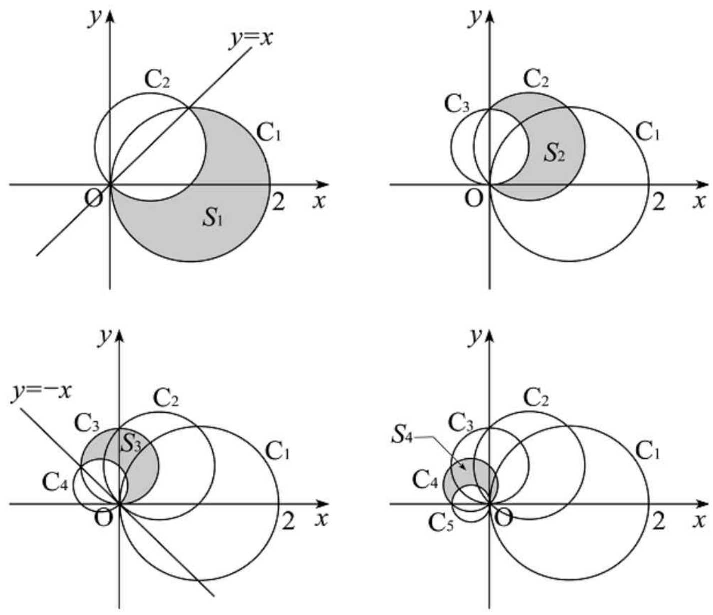


① $\frac{\sqrt{15}}{2}\pi$ ② $\frac{5}{2}\pi$ ③ $\frac{5+\sqrt{3}}{2}\pi$

④ $2\sqrt{3}\pi$ ⑤ $\frac{5+\sqrt{15}}{2}\pi$

[출처] 2008 모의_공공 교육청 고3 03월 17

42. 그림과 같이 원점 O와 점 $(2, 0)$을 지름의 양 끝으로 하는 원을 C_1이라 하자. 또, 원 C_1과 직선 $y=x$가 만나는 두 점을 지름의 양 끝으로 하는 원을 C_2, 원 C_2와 y축이 만나는 두 점을 지름의 양 끝으로 하는 원을 C_3이라 하자. 또, 원 C_3과 직선 $y=-x$가 만나는 두 점을 지름의 양 끝으로 하는 원을 C_4, 원 C_4와 x축이 만나는 두 점을 지름의 양 끝으로 하는 원을 C_5라 하자.



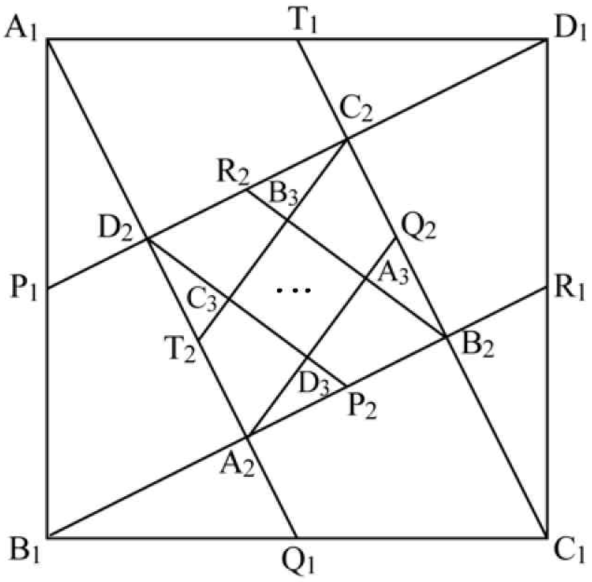
이와 같은 방법으로 중심이 차례로 직선 $y=x$, y축, 직선 $y=-x$, x축, $\cdots$ 위에 있는 원 C_6, C_7, C_8, C_9, $\cdots$ 를 한없이 만들어 갈 때, 원 C_n의 내부와 원 C_{n+1}의 외부의 공통부분(어두운 부분)의 넓이를 $S_n(n=1, 2, 3, \cdots)$이라 하자. 이때 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

① $\pi+1$ ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ $\frac{5}{4}(\pi+1)$

④ $\frac{3}{2}(\pi+1)$ ⑤ 2π

[출처] 2008 모의_공공 교육청 고2 09월 24

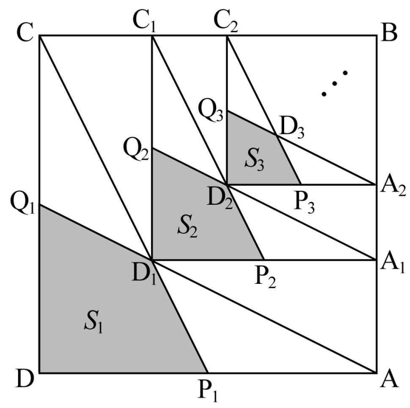
43. 그림과 같이 한 변의 길이가 10인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 넓이를 S_1이라 하자. 변 A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1의 중점을 각각 P_1, Q_1, R_1, T_1이라 하고, 선분 A_1Q_1, B_1R_1의 교점을 A_2, 선분 B_1R_1, C_1T_1의 교점을 B_2, 선분 C_1T_1, D_1P_1의 교점을 C_2, 선분 D_1P_1, A_1Q_1의 교점을 D_2라 할 때, 사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 넓이를 S_2라 하자. 변 A_2B_2, B_2C_2, C_2D_2, D_2A_2의 중점을 각각 P_2, Q_2, R_2, T_2라 하고, 선분 A_2Q_2, B_2R_2의 교점을 A_3, 선분 B_2R_2, C_2T_2의 교점을 B_3, 선분 C_2T_2, D_2P_2의 교점을 C_3, 선분 D_2P_2, A_2Q_2의 교점을 D_3이라 할 때, 사각형 $A_3B_3C_3D_3$의 넓이를 S_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 얻은 사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 넓이를 S_n이라 하자. 이때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값을 구하시오.



[출처] 2008 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 15

[출처] 2008 모의_공공 교육청 고3 10월 15

44. 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD가 있다. 그림과 같이 두 선분 AD, DC의 중점을 각각 P_1, Q_1이라 하고, 두 선분 AQ_1, CP_1의 교점을 D_1이라 하자. 이 때, 사각형 $DP_1D_1Q_1$의 넓이를 S_1이라 하자. 선분 BD_1을 대각선으로 하는 정사각형을 $BC_1D_1A_1$이라 하자. 두 선분 A_1D_1, D_1C_1의 중점을 각각 P_2, Q_2라 하고, 두 선분 A_1Q_2, C_1P_2의 교점을 D_2라 하자. 이 때, 사각형 $D_1P_2D_2Q_2$의 넓이를 S_2라 하자. 선분 BD_2를 대각선으로 하는 정사각형을 $BC_2D_2A_2$라 하자. 두 선분 A_2D_2, D_2C_2의 중점을 각각 P_3, Q_3이라 하고, 두 선분 A_2Q_3, C_2P_3의 교점을 D_3이라 하자. 이 때, 사각형 $D_2P_3D_3Q_3$의 넓이를 S_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 얻은 n번째 사각형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?



① $\frac{24}{5}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{27}{5}$

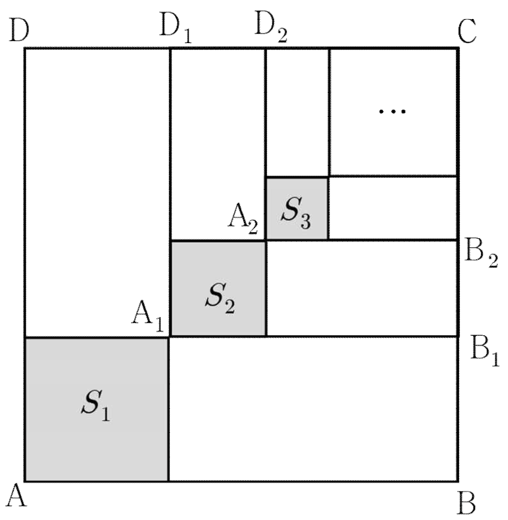
④ $\frac{20}{3}$ ⑤ $\frac{36}{5}$

[출처] 2008 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 23

[출처] 2008 모의_공공 교육청 고3 07월 23

45. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD에서 선분 AB와 선분 AD를 각각 $m:n$으로 내분하는 점을 지나는 두 직선을 그어 만들어지는 4개의 사각형 중 아랫부분 정사각형의 넓이를 S_1, 윗부분의 정사각형을 $A_1B_1CD_1$이라 하자. 다시 정사각형 $A_1B_1CD_1$에서 선분 A_1B_1과 선분 A_1D_1을 각각 $m:n$으로 내분하는 점을 지나는 두 직선을 그어 만들어지는 4개의 사각형 중 아랫부분 정사각형의 넓이를 S_2, 윗부분의 정사각형을 $A_2B_2CD_2$라 하자. 이와 같은 시행을 무한히 반복할 때, $\sum_{k=1}^{\infty} S_k = \frac{1}{7}$이다. m^2+n^2의 값을 구하시오.

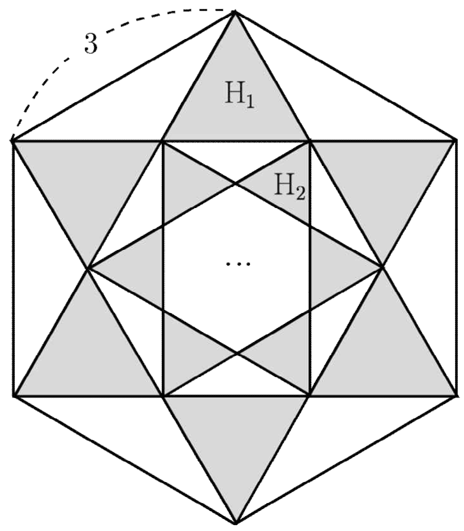
(단, m, n 은 서로소인 자연수)



[출처] 2008 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 17

[출처] 2008 모의_공공 교육청 고3 04월 17

46. 그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정육각형의 각 꼭짓점에서 짧은 대각선을 그려서 만들어진 정육각형을 H_1이라 하고, H_1의 외부에 새로 만들어진 정삼각형을 어둡게 칠한다. H_1의 각 꼭짓점에서 짧은 대각선을 그려서 만들어진 정육각형을 H_2라 하고, H_2의 외부에 새로 만들어진 정삼각형을 어둡게 칠한다. 이와 같은 과정을 한없이 계속할 때, 어둡게 칠해진 모든 정삼각형의 넓이의 합은?

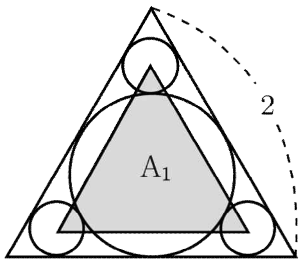


① $\frac{19}{4}\sqrt{3}$　② $\frac{21}{4}\sqrt{3}$　③ $\frac{23}{4}\sqrt{3}$

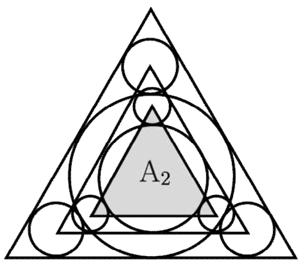
④ $\frac{25}{4}\sqrt{3}$　⑤ $\frac{27}{4}\sqrt{3}$

[출처] 2008 모의_공공 교육청 고2 11월 19

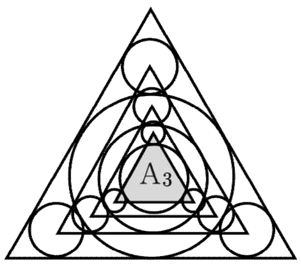
47. 한 변의 길이가 2인 정삼각형에 내접원을 그리고, 정삼각형의 두 변과 내접원에 접하는 세 원을 그린다. 이 세 원의 중심을 잇는 정삼각형을 그린다. 새로 얻은 정삼각형을 A_1, 그 넓이를 S_1이라 하자. ([그림 1] 참조) A_1에 밑줄 친 과정을 시행하여 두 번째 얻은 정삼각형을 A_2, 그 넓이를 S_2라 하자. ([그림 2] 참조) A_2에 밑줄 친 과정을 시행하여 세 번째 얻은 정삼각형을 A_3, 그 넓이를 S_3라 하자. ([그림 3] 참조) 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 정삼각형을 A_n, 그 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?



[그림 1]



[그림 2]



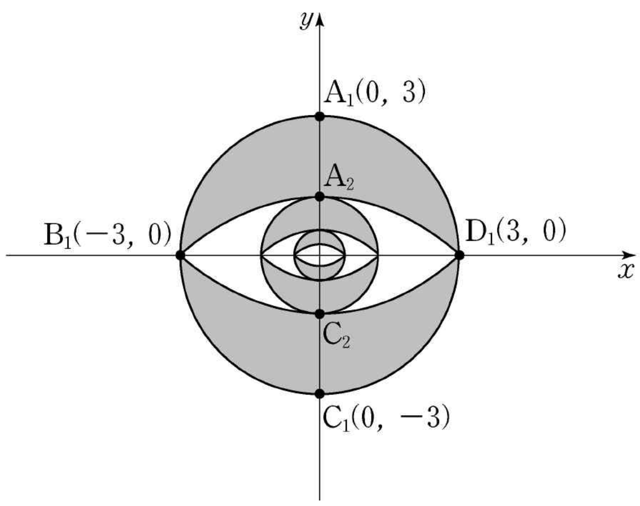
[그림 3]

① $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ ② $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ ③ $\frac{3}{4}\sqrt{3}$
④ $\frac{4}{5}\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}\sqrt{3}$

[출처] 2009 모의_공공 평가원 고3 11월 15

[출처] 2009 모의_공공 평가원 고3 11월 15

48. 그림과 같이 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원 O_1을 그리고, 원 O_1이 좌표축과 만나는 네 점을 각각 $A_1(0,3)$, $B_1(-3,0)$, $C_1(0,-3)$, $D_1(3,0)$이라 하자. 두 점 B_1, D_1 을 모두 지나고 두 점 A_1, C_1을 각각 중심으로 하는 두 원이 원 O_1의 내부에서 y축과 만나는 점을 각각 C_2, A_2라 하자. 호 $B_1A_1D_1$과 호 $B_1A_2D_1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1, 호 $B_1C_1D_1$과 호 $B_1C_2D_1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 T_1이라 하자. 선분 A_2C_2를 지름으로 하는 원 O_2를 그리고, 원 O_2가 x축과 만나는 두 점을 각각 B_2, D_2라 하자. 두 점 B_2, D_2을 모두 지나고 두 점 A_2, C_2을 각각 중심으로 하는 두 원이 원 O_2의 내부에서 y축과 만나는 점을 각각 C_3, A_3라 하자. 호 $B_2A_2D_2$와 호 $B_2A_3D_2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2, 호 $B_2C_2D_2$와 호 $B_2C_3D_2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 T_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 호 $B_nA_nD_n$과 호 $B_nA_{n+1}D_n$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n, 호 $B_nC_nD_n$과 호 $B_nC_{n+1}D_n$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 T_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(S_n+T_n)$의 값은?

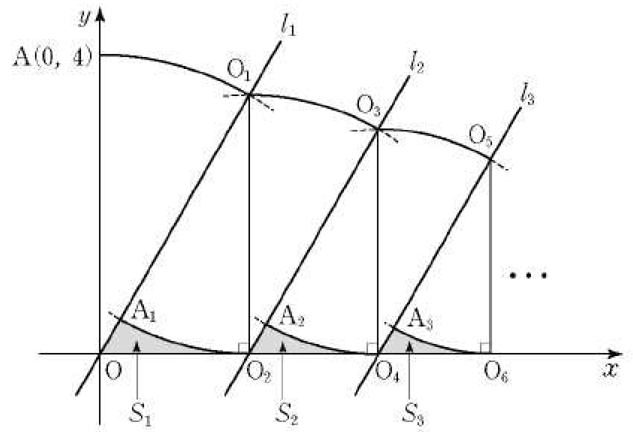


① $6(\sqrt{2}+1)$ ② $6(\sqrt{3}+1)$ ③ $6(\sqrt{5}+1)$
④ $9(\sqrt{2}+1)$ ⑤ $9(\sqrt{3}+1)$

[출처] 2009 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 9

[출처] 2009 모의_공공 평가원 고3 09월 9

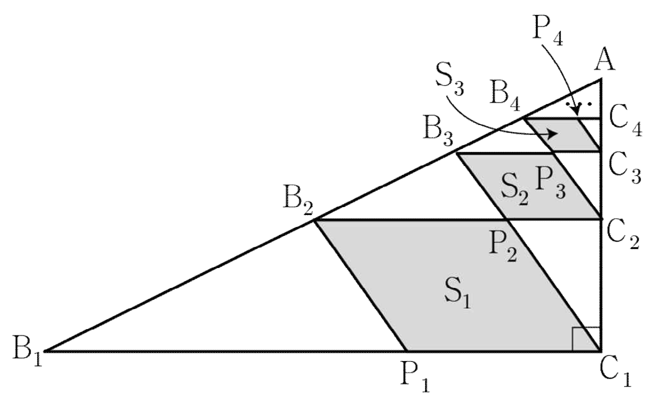
49. 그림과 같이 원점 O를 지나고 기울기가 $\sqrt{3}$ 인 직선 l_1과 점 $A(0, 4)$가 있다. 점 O를 중심으로 하고 선분 OA를 반지름으로 하는 원이 직선 l_1과 제 1사분면에서 만나는 점을 O_1이라 하자. 점 O_1에서 x축에 내린 수선의 발을 O_2라 하자. 점 O_1을 중심으로 하고 선분 O_1O_2를 반지름으로 하는 원이 선분 OO_1과 만나는 점을 A_1이라 하자. 선분 A_1O, 선분 OO_2, 호 O_2A_1로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하자. 점 O_2를 중심으로 하고 선분 O_1O_2를 반지름으로 하는 원이 점 O_2를 지나고 직선 l_1에 평행한 직선 l_2와 제 1사분면에서 만나는 점을 O_3이라 하자. 점 O_3에서 x축에 내린 수선의 발을 O_4라 하자. 점 O_3을 중심으로 하고 선분 O_3O_4를 반지름으로 하는 원이 선분 O_2O_3과 만나는 점을 A_2라 하자. 선분 A_2O_2, 선분 O_2O_4, 호 O_4A_2로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?



① $4\sqrt{3}-2\pi$ ② $8\sqrt{3}-4\pi$ ③ $4\sqrt{3}-\pi$
④ $8\sqrt{3}-2\pi$ ⑤ $16\sqrt{3}-4\pi$

[출처] 2009 모의_공공 교육청 고3 03월 11

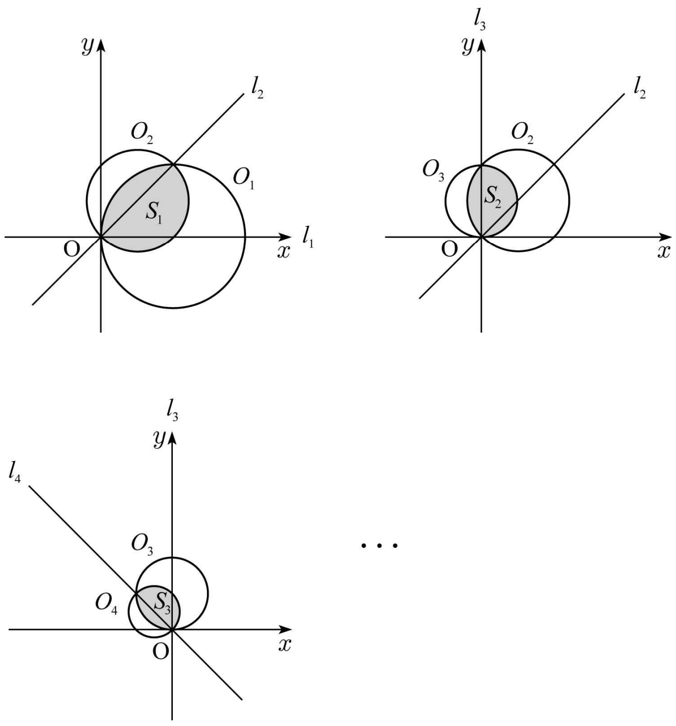
50. $\angle A=60°$, $\angle B_1=30°$, $\overline{AC_1}=6$인 직각삼각형 AB_1C_1이 있다. 선분 B_1C_1을 $2:1$로 내분하는 점을 P_1이라 하자. 두 선분 AB_1, AC_1의 중점을 각각 B_2, C_2라 하고, 선분 B_2C_2를 $2:1$로 내분하는 점을 P_2라 할 때, 네 점 B_2, P_1, C_1, P_2를 꼭짓점으로 하는 사각형 $B_2P_1C_1P_2$를 만든다. 두 선분 AB_2, AC_2의 중점을 각각 B_3, C_3이라 하고, 선분 B_3C_3을 $2:1$로 내분하는 점을 P_3이라 할 때, 네 점 B_3, P_2, C_2, P_3을 꼭짓점으로 하는 사각형 $B_3P_2C_2P_3$을 만든다. 두 선분 AB_3, AC_3의 중점을 각각 B_4, C_4라 하고, 선분 B_4C_4를 $2:1$로 내분하는 점을 P_4라 할 때, 네 점 B_4, P_3, C_3, P_4를 꼭짓점으로 하는 사각형 $B_4P_3C_3P_4$를 만든다. 이와 같은 과정을 계속할 때, 사각형 $B_{n+1}P_nC_nP_{n+1}$ 의 넓이를 $S_n\,(n=1, 2, 3, \cdots)$이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?



① $8\sqrt{3}$ ② $7\sqrt{3}$ ③ $6\sqrt{3}$
④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

[출처] 2010 모의_공공 교육청 고3 03월 14

51. 좌표평면에서 점 $(3, 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원을 O_1이라 하고, x축을 직선 l_1이라 하자. 직선 l_1을 원점을 중심으로 하여 45° 만큼 회전시킨 직선을 l_2라 하고, 직선 l_2와 원 O_1의 두 교점을 지름의 양 끝점으로 하는 원을 O_2라 할 때, 두 원 O_1, O_2의 공통부분의 넓이를 S_1이라 하자. 직선 l_2를 원점을 중심으로 하여 45° 만큼 회전시킨 직선을 l_3이라 하고, 직선 l_3과 원 O_2의 두 교점을 지름의 양 끝점으로 하는 원을 O_3이라 할 때, 두 원 O_2, O_3의 공통부분의 넓이를 S_2라 하자. 직선 l_3을 원점을 중심으로 하여 45° 만큼 회전시킨 직선을 l_4라 하고, 직선 l_4와 원 O_3의 두 교점을 지름의 양 끝점으로 하는 원을 O_4라 할 때, 두 원 O_3, O_4의 공통부분의 넓이를 S_3이라 하자.



이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

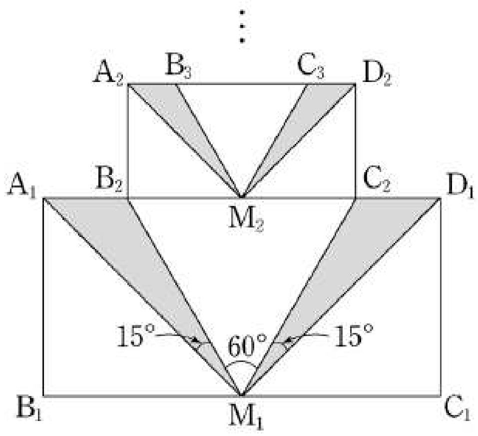
① $6(\pi-1)$ ② $7(\pi-1)$ ③ $8(\pi-1)$

④ $9(\pi-1)$ ⑤ $10(\pi-1)$

[출처] 2010 모의_공공 평가원 고3 11월 10

[출처] 2010 모의_공공 평가원 고3 11월 공통범위 10

52. $\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{B_1C_1}=2$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 그림과 같이 선분 B_1C_1의 중점을 M_1이라 하고, 선분 A_1D_1 위에 $\angle A_1M_1B_2=\angle C_2M_1D_1=15^\circ$, $\angle B_2M_1C_2=60^\circ$가 되도록 두 점 B_2, C_2를 정한다. 삼각형 $A_1M_1B_2$의 넓이와 삼각형 $C_2M_1D_1$의 넓이의 합을 S_1이라 하자. 사각형 $A_2B_2C_2D_2$가 $\overline{B_2C_2}=2\overline{A_2B_2}$인 직사각형이 되도록 그림과 같이 두 점 A_2, D_2를 정한다. 선분 B_2C_2의 중점을 M_2라 하고, 선분 A_2D_2 위에 $\angle A_2M_2B_3=\angle C_3M_2D_2=15^\circ$, $\angle B_3M_2C_3=60^\circ$가 되도록 두 점 B_3, C_3을 정한다. 삼각형 $A_2M_2B_3$의 넓이와 삼각형 $C_3M_2D_2$의 넓이의 합을 S_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 얻은 S_n에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

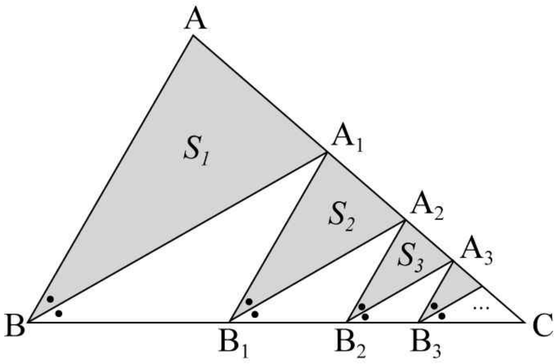


① $\frac{2+\sqrt{3}}{6}$ ② $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{4+\sqrt{3}}{9}$

④ $\frac{5-\sqrt{3}}{5}$ ⑤ $\frac{7-\sqrt{3}}{8}$

[출처] 2010 모의_공공 교육청 고2 09월 30

53. $\angle B=\frac{\pi}{3}$, $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=6$인 $\triangle ABC$에 대하여 $\angle B$의 이등분선이 $\overline{AC}$와 만나는 점을 A_1이라 할 때, $\triangle ABA_1$의 넓이를 S_1이라 하자. 점 A_1에서 $\overline{AB}$에 평행한 직선을 그어 $\overline{BC}$와 만나는 점을 B_1, $\angle A_1B_1C$의 이등분선이 $\overline{AC}$와 만나는 점을 A_2라 할 때, $\triangle A_1B_1A_2$의 넓이를 S_2라 하자.



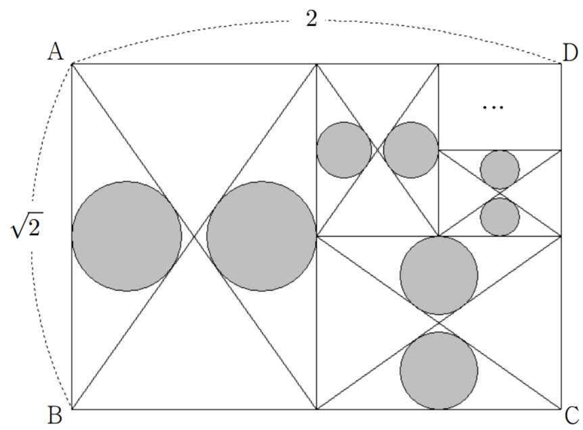
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 $\triangle A_{n-1}B_{n-1}A_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은 $\frac{q\sqrt{3}}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, $A_0=A$, $B_0=B$이고 p, q는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2010 모의_공공 사관학교 고3 07월 16

[출처] 2010 모의_공공 사관학교 고3 07월 16

54. 그림과 같이 $\overline{AB}=\sqrt{2}$, $\overline{AD}=2$인 직사각형 ABCD에서 다음 [단계]와 같은 순서로 도형을 만들어 나간다.

> [단계 1]
> 직사각형 ABCD의 긴 두 변의 중점을 잇는 선분을 그린 다음, 한 쪽 직사각형에 두 대각선을 그려 네 개의 이등변삼각형을 만든다. 이 중 꼭지각의 크기가 둔각인 두 이등변삼각형에 내접하는 원을 각각 그린 후 이 두 원의 넓이의 합을 S_1이라 하자.
> [단계 2]
> [단계 1]에서 대각선이 그려지지 않은 직사각형의 긴 두 변의 중점을 잇는 선분을 그린 다음, 한 쪽 직사각형에 두 대각선을 그려 네 개의 이등변삼각형을 만든다. 이 중 꼭지각의 크기가 둔각인 두 이등변삼각형에 내접하는 원을 각각 그린 후 이 두 원의 넓이의 합을 S_2라 하자.
> [단계 3]
> [단계 2]에서 대각선이 그려지지 않은 직사각형의 긴 두 변의 중점을 잇는 선분을 그린 다음, 한 쪽 직사각형에 두 대각선을 그려 네 개의 이등변삼각형을 만든다. 이 중 꼭지각의 크기가 둔각인 두 이등변삼각형에 내접하는 원을 각각 그린 후 이 두 원의 넓이의 합을 S_3이라 하자.
> ⋮



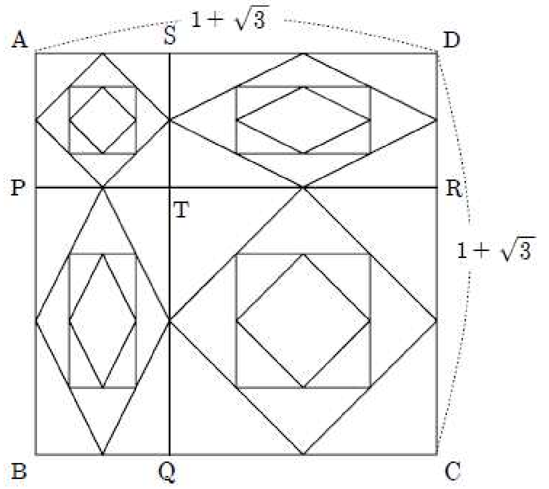
이와 같은 과정을 계속하여 [단계 n]에서 그려진 두 원의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

① $2\pi(5-2\sqrt{6})$　② $2\pi(3-\sqrt{6})$
③ $2\pi(5-\sqrt{6})$　④ $4\pi(3-\sqrt{6})$
⑤ $4\pi(5-\sqrt{6})$

[출처] 2011 모의_공공 사관학교 고3 07월 15

[출처] 2011 모의_공공 사관학교 고3 07월 15

55. 그림과 같이 한 변의 길이가 $1+\sqrt{3}$인 정사각형 ABCD가 있다. 두 변 AB와 BC를 $1:\sqrt{3}$으로 내분하는 점을 각각 P, Q라 하고, 두 변 CD와 DA를 $\sqrt{3}:1$로 내분하는 점을 각각 R, S라 하자. 이 때, 두 선분 PR, QS의 교점을 T라 하고, 네 사각형 APTS, PBQT, TQCR, STRD를 만든다. 먼저 사각형 APTS의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 A_1, 사각형 A_1의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 A_2, 사각형 A_2의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 A_3라 하자. 또, 사각형 PBQT의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 B_1, 사각형 B_1의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 B_2, 사각형 B_2의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 B_3라 하자. 또, 사각형 TQCR의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 C_1, 사각형 C_1의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 C_2, 사각형 C_2의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 C_3라 하자. 또, 사각형 STRD의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 D_1, 사각형 D_1의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 D_2, 사각형 D_2의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 D_3라 하자.



이와 같은 과정을 계속하여 사각형 A_n, B_n, C_n, D_n의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 각각 A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}, D_{n+1}이라 하자. 사각형 A_n, B_n, C_n, D_n의 넓이를 각각 a_n, b_n, c_n, d_n이라 할 때,

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n+c_n-d_n)=p+q\sqrt{3}$을 만족시키는 유리수 p, q의 합 $p+q$의 값은?

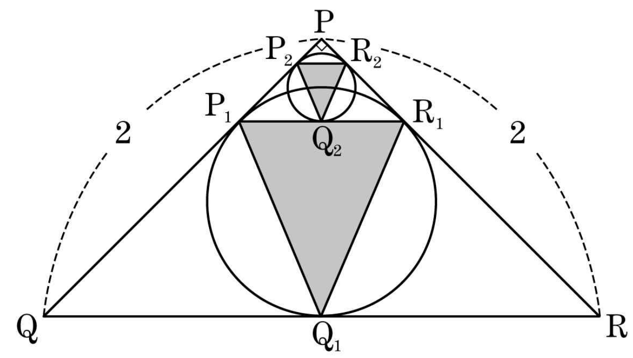
① -2 ② -1 ③ 0

④ 1 ⑤ 2

[출처] 2011 모의_공공 교육청 고3 03월 15

[출처] 2011 모의_공공 교육청 고3 03월 15

56. 그림과 같이 $\overline{PQ}=\overline{PR}=2$이고 $\angle QPR=90°$인 삼각형 PQR의 내접원과 세 변 PQ, QR, RP의 접점을 각각 P_1, Q_1, R_1이라 하자. 또, 삼각형 PP_1R_1의 내접원과 세 변 PP_1, P_1R_1, R_1P의 접점을 각각 P_2, Q_2, R_2라 하자.



이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 세 점 P_n, Q_n, R_n을 꼭짓점으로 하는 삼각형 $P_nQ_nR_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}S_n=p+q\sqrt{2}$를 만족시키는 두 유리수 p, q의 합 $p+q$의 값은?

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{3}{7}$

④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

[출처] 2013 모의_공공 사관학교 고3 07월 18

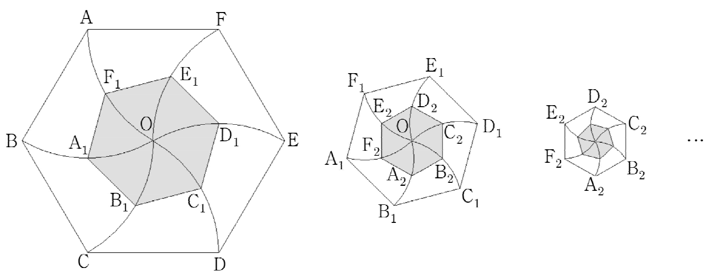
[출처] 2013 모의_공공 사관학교 고3 07월 17

57. 한 변의 길이가 1인 정육각형 ABCDEF에서 길이가 2인 대각선의 교점을 O라 하자. 그림과 같이 꼭짓점 A, B, C, D, E, F를 중심으로 하여 점 O를 시계 방향으로 60° 만큼 회전시키면서 호를 그린 다음, 이들 호의 길이를 이등분하는 점을 각각 A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1이라 하자.

정육각형 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$에서 꼭짓점 A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1을 중심으로 하여 점 O를 시계 방향으로 60° 만큼 회전시키면서 호를 그린 다음, 이들 호의 길이를 이등분하는 점을 각각 A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2라 하자.

정육각형 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$에서 꼭짓점 A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2를 중심으로 하여 점 O를 시계 방향으로 60° 만큼 회전시키면서 호를 그린 다음, 이들 호의 길이를 이등분하는 점을 각각 A_3, B_3, C_3, D_3, E_3, F_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 정육각형 $A_nB_nC_nD_nE_nF_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?



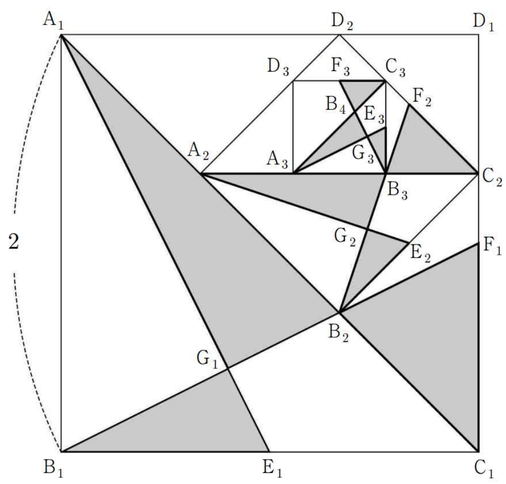
① $\frac{7-3\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{7-2\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{9-4\sqrt{3}}{4}$

④ $\frac{9-3\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{9-2\sqrt{3}}{4}$

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고3 04월 16

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고3 04월 18

58. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 두 선분 B_1C_1, C_1D_1의 중점을 각각 E_1, F_1이라 하고, 두 선분 A_1E_1과 A_1C_1이 선분 B_1F_1과 만나는 두 점을 각각 G_1, B_2라 하자. 이때, 세 삼각형 $A_1G_1B_2$, $B_1E_1G_1$, $C_1F_1B_2$의 넓이의 합을 S_1이라 하자. 점 B_2를 지나고 선분 A_1B_2에 수직인 직선과 선분 C_1D_1이 만나는 점을 C_2라 하자. 점 C_2를 지나고 선분 B_2C_2에 수직인 직선과 선분 A_1D_1이 만나는 점을 D_2라 하고, 점 D_2에서 선분 A_1B_2에 내린 수선의 발을 A_2라 하자. 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$에서 두 선분 B_2C_2, C_2D_2의 중점을 각각 E_2, F_2라 하고, 두 선분 A_2E_2와 A_2C_2가 선분 B_2F_2와 만나는 두 점을 각각 G_2, B_3이라 하자. 이때, 세 삼각형$A_2G_2B_3$, $B_2E_2G_2$, $C_2F_2B_3$의 넓이의 합을 S_2라 하자. 점 B_3을 지나고 선분 A_2B_3에 수직인 직선과 선분 C_2D_2가 만나는 점을 C_3이라 하자. 점 C_3을 지나고 선분 B_3C_3에 수직인 직선과 선분 A_2D_2가 만나는 점을 D_3이라 하고, 점 D_3에서 선분 A_2B_3에 내린 수선의 발을 A_3이라 하자. 정사각형 $A_3B_3C_3D_3$에서 두 선분 B_3C_3, C_3D_3의 중점을 각각 E_3, F_3이라 하고, 두 선분 A_3E_3과 A_3C_3이 선분 B_3F_3과 만나는 두 점을 각각 G_3, B_4라 하자. 이때, 세 삼각형 $A_3G_3B_4$, $B_3E_3G_3$, $C_3F_3B_4$의 넓이의 합을 S_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 세 삼각형 $A_nG_nB_{n+1}$, $B_nE_nG_n$, $C_nF_nB_{n+1}$의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?



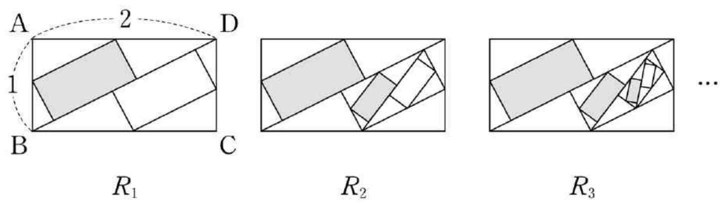
① $\frac{41}{35}$ ② $\frac{44}{35}$ ③ $\frac{46}{35}$

④ $\frac{48}{35}$ ⑤ $\frac{51}{35}$

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 06월 18

59. 직사각형 ABCD에서 $\overline{\mathrm{AB}}=1$, $\overline{\mathrm{AD}}=2$이다.

그림과 같이 직사각형 ABCD의 한 대각선에 의하여 만들어지는 두 직각삼각형의 내부에 두 변의 길이의 비가 $1:2$인 두 직사각형을 긴 변이 대각선 위에 놓이면서 두 직각삼각형에 각각 내접하도록 그리고 새로 그려진 두 직사각형 중 하나에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 새로 그려진 두 직사각형 중 색칠되어 있지 않은 직사각형에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 두 직사각형 중 하나에 색칠하여 얻은 그림을 R_2이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

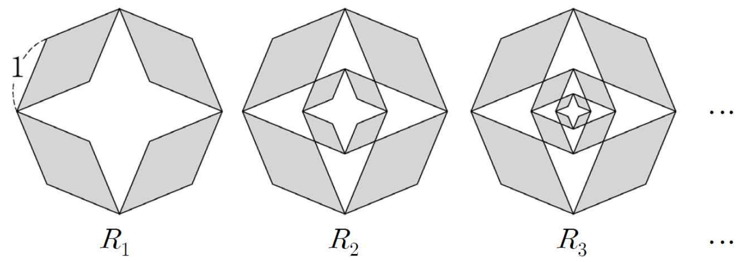


① $\frac{37}{61}$ ② $\frac{38}{61}$ ③ $\frac{39}{61}$

④ $\frac{40}{61}$ ⑤ $\frac{41}{61}$

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 09월 18

60. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정팔각형의 이웃한 두 변을 변으로 하는 4개의 평행사변형을 서로 겹치지 않게 그리고, 이 평행사변형 4개를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 정팔각형의 내부에 있는 평행사변형의 꼭짓점 4개를 꼭짓점으로 포함하는 정팔각형을 그린 후, 새로 그려진 정팔각형에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 4개의 평행사변형을 그리고 색칠하여 얻는 그림을 R_2라 하자. 그림 R_2에 가장 작은 정팔각형의 내부에 있는 평행사변형의 꼭짓점 4개를 꼭짓점으로 포함하는 정팔각형을 그린 후, 새로 그려진 정팔각형에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 4개의 평행사변형을 그리고 색칠하여 얻는 그림을 R_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



① $2+\sqrt{2}$ ② $1+2\sqrt{2}$ ③ $3+\sqrt{2}$

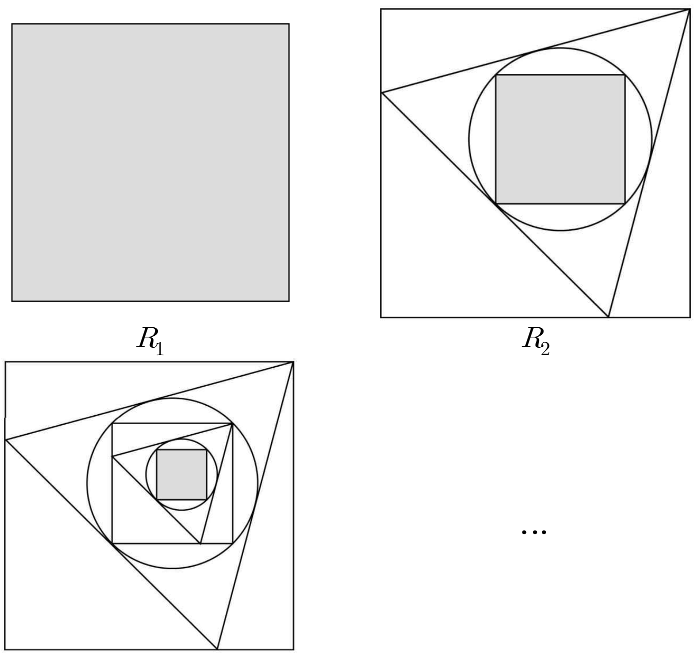
④ $1+3\sqrt{2}$ ⑤ $4+\sqrt{2}$

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고3 07월 29

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고3 07월 30

61. 한 변의 길이가 1인 정사각형을 R_1이라 하자. 그림과 같이 R_1의 한 꼭짓점과 정사각형 R_1의 변 위의 두 점을 세 꼭짓점으로 하는 정삼각형 하나를 그리고 이 정삼각형에 내접하는 원을 그린 후, 이 원에 내접하는 하나의 정사각형을 R_2라 하자. 정사각형 R_2의 한 꼭짓점과 정사각형 R_2의 변 위의 두 점을 세 꼭짓점으로 하는 정삼각형 하나를 그리고 이 정삼각형에 내접하는 원을 그린 후, 이 원에 내접하는 하나의 정사각형을 R_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 정사각형을 R_n이라 하자. 정사각형 R_n의 넓이를 S_n이라 할 때,

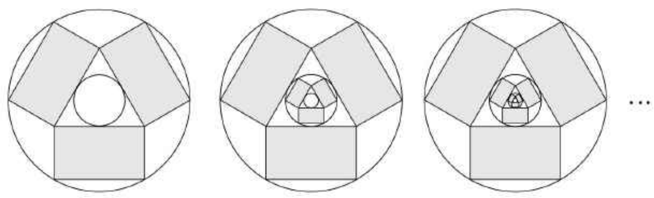
$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{a+b\sqrt{3}}{11}$ 이다. 이때 $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 자연수이다.)



R_1 R_2 R_3 …

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고2 09월 29

62. 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$인 원 O의 내부에 가로, 세로의 길이의 비가 $1:\sqrt{3}$인 크기가 같은 직사각형 3개를 각각의 긴 변 중 한 변은 원 O의 현이 되고 나머지 긴 변은 다른 두 직사각형과 각각 한 꼭짓점에서 만나도록 그리고 세 직사각형의 변에 의해 만들어진 정삼각형에 내접하는 원을 O_1이라 하고 세 직사각형을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 원 O_1의 내부에 가로, 세로의 길이의 비가 $1:\sqrt{3}$인 크기가 같은 직사각형 3개를 그리고 세 직사각형의 변에 의해 만들어진 정삼각형에 내접하는 원을 O_2라 하고 세 직사각형을 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 그림 R_2에 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 원 O_2의 내부에 가로, 세로의 길이의 비가 $1:\sqrt{3}$인 크기가 같은 직사각형 3개를 그리고 세 직사각형의 변에 의해 만들어진 정삼각형에 내접하는 원을 O_3이라 하고 세 직사각형을 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에서 색칠된 모든 직사각형의 넓이의 합을 S_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{q}{p}\sqrt{3}$ 일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

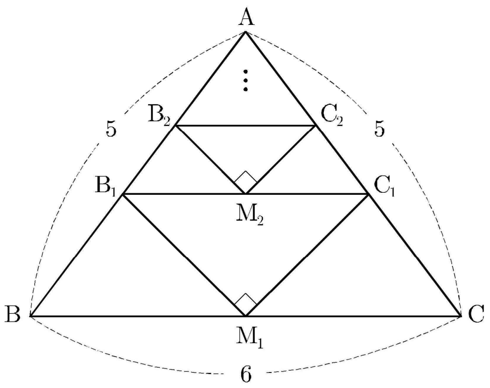


R_1 R_2 R_3 …

[출처] 2014 모의_공공 사관학교 고3 07월 17

[출처] 2014 모의_공공 사관학교 고3 07월 17

63. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}=5$, $\overline{BC}=6$ 인 이등변삼각형 ABC가 있다. 선분 BC의 중점 M_1을 잡고 두 선분 AB, AC 위에 각각 점 B_1, C_1을 $\angle B_1M_1C_1=90^\circ$ 이고 $\overline{B_1C_1}//\overline{BC}$ 가 되도록 잡아 직각삼각형 $B_1M_1C_1$을 만든다. 선분 B_1C_1의 중점 M_2를 잡고 두 선분 AB_1, AC_1 위에 각각 점 B_2, C_2를 $\angle B_2M_2C_2=90^\circ$ 이고 $\overline{B_2C_2}//\overline{B_1C_1}$ 이 되도록 잡아 직각삼각형 $B_2M_2C_2$를 만든다. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 만든 직각삼각형 $B_nM_nC_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은?



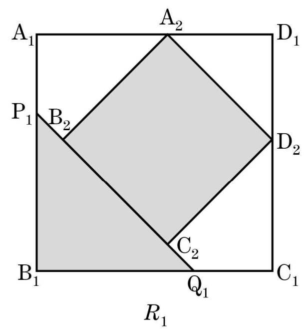
① $\frac{47}{11}$ ② $\frac{48}{11}$ ③ $\frac{49}{11}$

④ $\frac{50}{11}$ ⑤ $\frac{51}{11}$

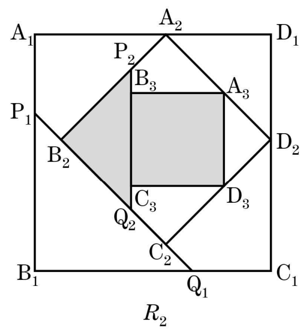
[출처] 2014 모의_공공 교육청 고3 03월 11

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고3 03월 17

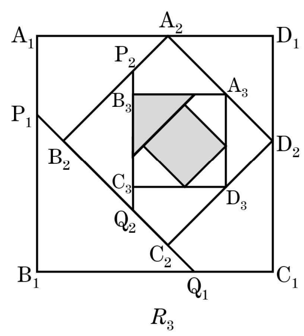
64. 그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 선분 A_1B_1을 $1:2$로 내분하는 점을 P_1, 선분 B_1C_1을 $2:1$로 내분하는 점을 Q_1이라 하자. 선분 A_1D_1 위의 점 A_2, 선분 P_1Q_1 위의 두 점 B_2, C_2, 선분 C_1D_1 위의 점 D_2를 네 꼭짓점으로 하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 내부와 삼각형 $P_1B_1Q_1$의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$에서 선분 A_2B_2를 $1:2$로 내분하는 점을 P_2, 선분 B_2C_2를 $2:1$로 내분하는 점을 Q_2라 하자. 선분 A_2D_2 위의 점 A_3, 선분 P_2Q_2 위의 두 점 B_3, C_3, 선분 C_2D_2 위의 점 D_3을 네 꼭짓점으로 하는 정사각형 $A_3B_3C_3D_3$을 그리고 정사각형 $A_3B_3C_3D_3$의 내부와 삼각형 $P_2B_2Q_2$의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은?



R_1



R_2

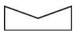


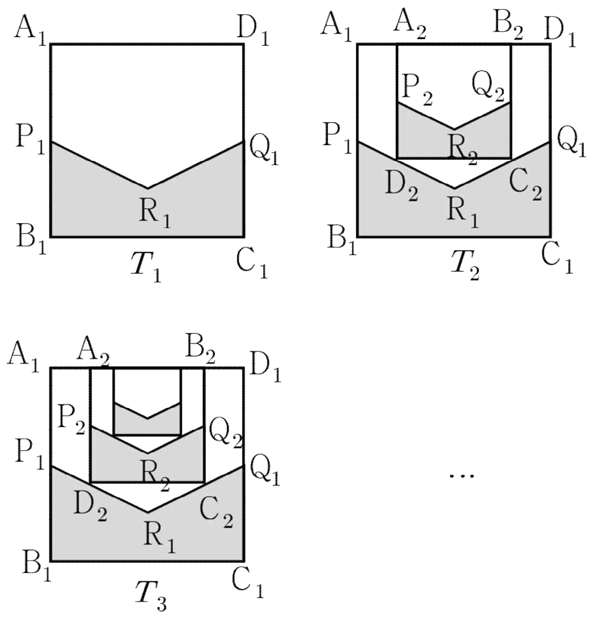
R_3 ⋯

① $\frac{375}{49}$ ② $\frac{400}{49}$ ③ $\frac{425}{49}$

④ $\frac{450}{49}$ ⑤ $\frac{475}{49}$

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고2 09월 20
[출처] 2015 모의_공공 교육청 고2 09월 21

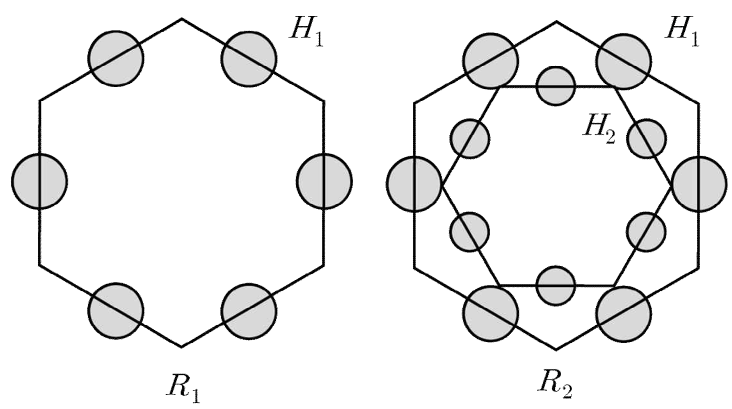
65. 한 변의 길이가 3인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 그림과 같이 선분 A_1B_1과 선분 D_1C_1을 $2:1$로 내분하는 점을 각각 P_1, Q_1이라 하고 선분 P_1C_1과 선분 Q_1B_1의 교점을 R_1이라 할 때, 선분 P_1B_1, 선분 B_1C_1, 선분 C_1Q_1, 선분 Q_1R_1, 선분 R_1P_1로 둘러싸인 부분인  모양에 색칠하여 얻은 그림을 T_1이라 하자. 그림 T_1에 선분 P_1R_1 위의 점 B_2, 선분 R_1Q_1 위의 점 C_2와 선분 A_1D_1 위의 두 점 A_2, D_2를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 그림 T_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양에 색칠하여 얻은 그림을 T_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 T_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



① $\frac{131}{32}$ ② $\frac{135}{32}$ ③ $\frac{139}{32}$
④ $\frac{143}{32}$ ⑤ $\frac{147}{32}$

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고2 11월 18
[출처] 2015 모의_공공 교육청 고2 11월 20

66. 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정육각형 H_1이 있다. 정육각형 H_1의 각 변에 대하여 변을 삼등분하는 점을 지름의 양 끝점으로 하는 원을 그리고, 6개의 원의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 정육각형 H_1의 내부에 있는 각 반원의 호를 이등분하는 점을 꼭짓점으로 하는 정육각형을 H_2라 하자. 정육각형 H_2의 각 변에 대하여 변을 삼등분하는 점을 지름의 양 끝점으로 하는 원을 그리고, 새로 그려진 6개의 원의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 그림 R_2에 정육각형 H_2의 내부에 있는 각 반원의 호를 이등분하는 점을 꼭짓점으로 하는 정육각형을 H_3이라 하자. 정육각형 H_3의 각 변에 대하여 변을 삼등분하는 점을 지름의 양 끝점으로 하는 원을 그리고, 새로 그려진 6개의 원의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n = k(3\sqrt{3}-m)\pi$이다. $11k+m$의 값은? (단, k, m은 유리수이다.)

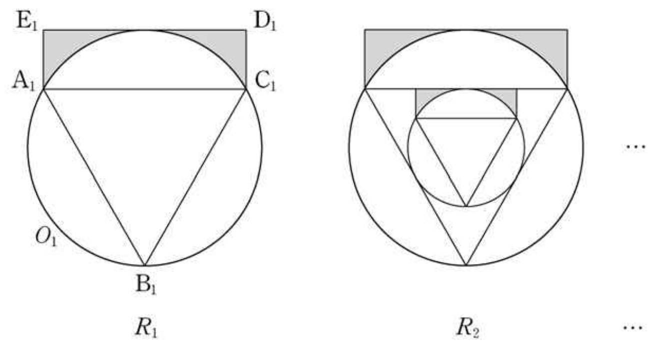


① 90 ② 101 ③ 112
④ 123 ⑤ 134

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 06월 15

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 06월 18

67. 반지름의 길이가 2인 원 O_1에 내접하는 정삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다. 그림과 같이 직선 A_1C_1에 평행하고 점 B_1을 지나지 않는 원 O_1의 접선 위에 두 점 D_1, E_1을 사각형 $A_1C_1D_1E_1$이 직사각형이 되도록 잡고, 직사각형 $A_1C_1D_1E_1$의 내부와 원 O_1의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 정삼각형 $A_1B_1C_1$에 내접하는 원 O_2와 원 O_2에 내접하는 정삼각형 $A_2B_2C_2$를 그리고, 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형 $A_2C_2D_2E_2$를 그리고 직사각형 $A_2C_2D_2E_2$의 내부와 원 O_2의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



① $4\sqrt{3}-\frac{16}{9}\pi$ ② $4\sqrt{3}-\frac{5}{3}\pi$ ③ $4\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$

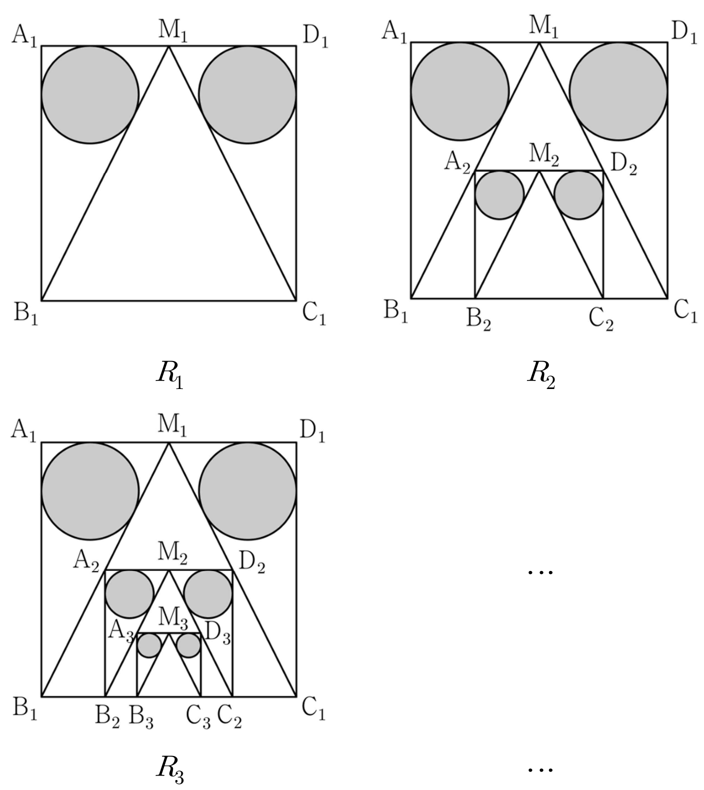
④ $5\sqrt{3}-\frac{16}{9}\pi$ ⑤ $5\sqrt{3}-\frac{5}{3}\pi$

[출처] 2015 모의_공공 사관학교 고3 07월 16

[출처] 2015 모의_공공 사관학교 고3 07월 16

68. 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 그림과 같이 변 A_1D_1의 중점을 M_1이라 할 때, 두 삼각형 $A_1B_1M_1$과 $M_1C_1D_1$에 각각 내접하는 두 원을 그리고, 두 원에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 두 꼭짓점이 변 B_1C_1 위에 있고 삼각형 $M_1B_1C_1$에 내접하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린 후 변 A_2D_2의 중점을 M_2라 할 때, 두 삼각형 $A_2B_2M_2$와 $M_2C_2D_2$에 각각 내접하는 두 원을 그리고, 두 원에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 그림 R_2에서 두 꼭짓점이 변 B_2C_2 위에 있고 삼각형 $M_2B_2C_2$에 내접하는 정사각형 $A_3B_3C_3D_3$을 그린 후 변 A_3D_3의 중점을 M_3이라 할 때, 두 삼각형 $A_3B_3M_3$과 $M_3C_3D_3$에 각각 내접하는 두 원을 그리고, 두 원에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



① $\frac{4(7-3\sqrt{5})}{3}\pi$ ② $\frac{4(8-3\sqrt{5})}{3}\pi$

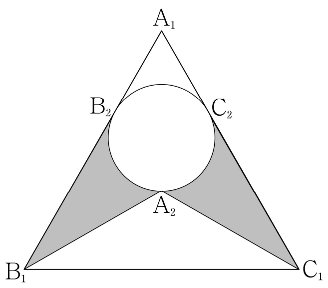
③ $\frac{5(7-3\sqrt{5})}{3}\pi$ ④ $\frac{5(8-3\sqrt{5})}{3}\pi$

⑤ $\frac{5(9-4\sqrt{5})}{3}\pi$

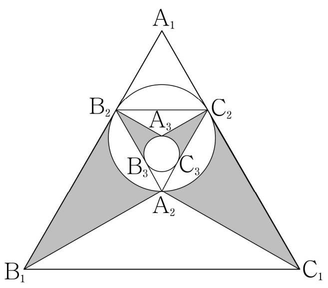
[출처] 2015 모의_공공 교육청 고3 10월 17

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고3 10월 20

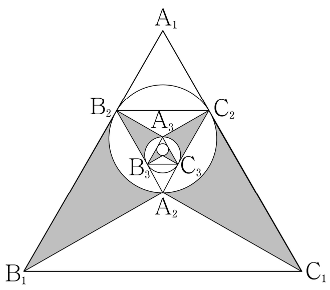
69. 그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 무게중심을 A_2, 점 A_2를 지나는 원과 두 변 A_1B_1, A_1C_1의 접점을 각각 B_2, C_2라 하자. 호 A_2B_2, 선분 B_2B_1, 선분 B_1A_2와 호 A_2C_2, 선분 C_2C_1, 선분 C_1A_2로 둘러싸인 부분인 모양의 도형을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 삼각형 $A_2B_2C_2$의 무게중심을 A_3, 점 A_3을 지나는 원과 두 변 A_2B_2, A_2C_2의 접점을 각각 B_3, C_3이라 하자. 그림 R_1에 호 A_3B_3, 선분 B_3B_2, 선분 B_2A_3과 호 A_3C_3, 선분 C_3C_2, 선분 C_2A_3으로 둘러싸인 부분인 모양의 도형을 색칠하고 추가하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 그림 R_2에서 삼각형 $A_3B_3C_3$의 무게중심을 A_4, 점 A_4를 지나는 원과 두 변 A_3B_3, A_3C_3의 접점을 각각 B_4, C_4라 하자. 그림 R_2에 호 A_4B_4, 선분 B_4B_3, 선분 B_3A_4와 호 A_4C_4, 선분 C_4C_3, 선분 C_3A_4로 둘러싸인 부분인 모양의 도형을 색칠하고 추가하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림을 R_n, 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



R_1



R_2



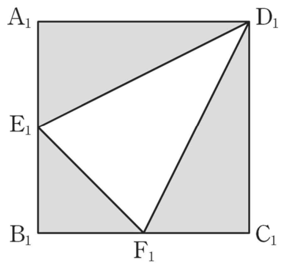
R_3

…

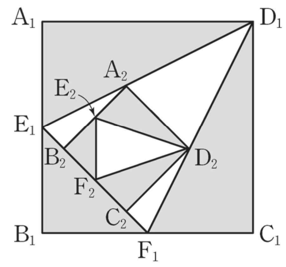
① $\frac{1}{16}(21\sqrt{3}-4\pi)$　② $\frac{1}{16}(7\sqrt{3}-2\pi)$
③ $\frac{1}{8}(21\sqrt{3}-4\pi)$　④ $\frac{1}{8}(7\sqrt{3}-2\pi)$
⑤ $\frac{1}{8}(21\sqrt{3}-2\pi)$

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 06월 17

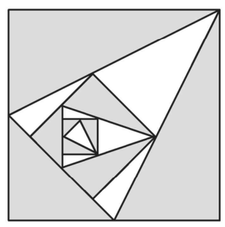
70. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 선분 A_1B_1과 선분 B_1C_1의 중점을 각각 E_1, F_1이라 하자. 정사각형의 $A_1B_1C_1D_1$의 내부와 삼각형 $E_1F_1D_1$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 선분 D_1E_1 위의 점 A_2, 선분 D_1F_1 위의 점 D_2와 선분 E_1F_1 위의 두 점 B_2, C_2를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 삼각형 $E_2F_2D_2$를 그리고 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 내부와 삼각형 $E_2F_2D_2$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



R_1



R_2

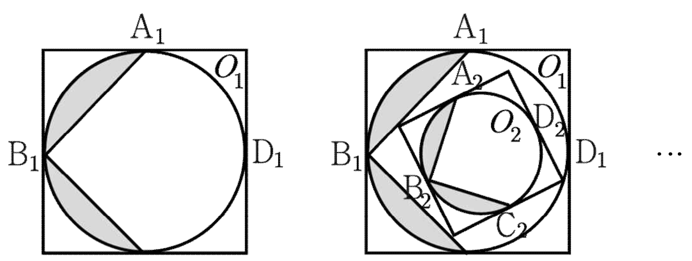

R_3

…

① $\frac{125}{37}$　② $\frac{125}{38}$　③ $\frac{125}{39}$
④ $\frac{25}{8}$　⑤ $\frac{125}{41}$

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 04월 20

71. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형에 내접하는 원 O_1이 있다. 정사각형과 원 O_1의 접점을 각각 $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{B_1}$, $\mathrm{C_1}$, $\mathrm{D_1}$이라 할 때, 원 O_1과 두 선분 $\mathrm{A_1B_1}$, $\mathrm{B_1C_1}$로 둘러싸인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 두 선분 $\mathrm{A_1B_1}$, $\mathrm{B_1C_1}$을 각각 $3:1$로 내분하는 두 점을 이은 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 원 O_1의 내부에 그린다. 이 정사각형에 내접하는 원을 O_2라 하고 그 접점을 각각 $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{C_2}$, $\mathrm{D_2}$라 할 때, 원 O_2와 두 선분 $\mathrm{A_2B_2}$, $\mathrm{B_2C_2}$로 둘러싸인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 그림 R_2에서 두 선분 $\mathrm{A_2B_2}$, $\mathrm{B_2C_2}$를 각각 $3:1$로 내분하는 두 점을 이은 선분을 한 변으로 하는 정사각형에 그림 R_1에서 그림 R_2를 얻는 것과 같은 방법으로 만들어진 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



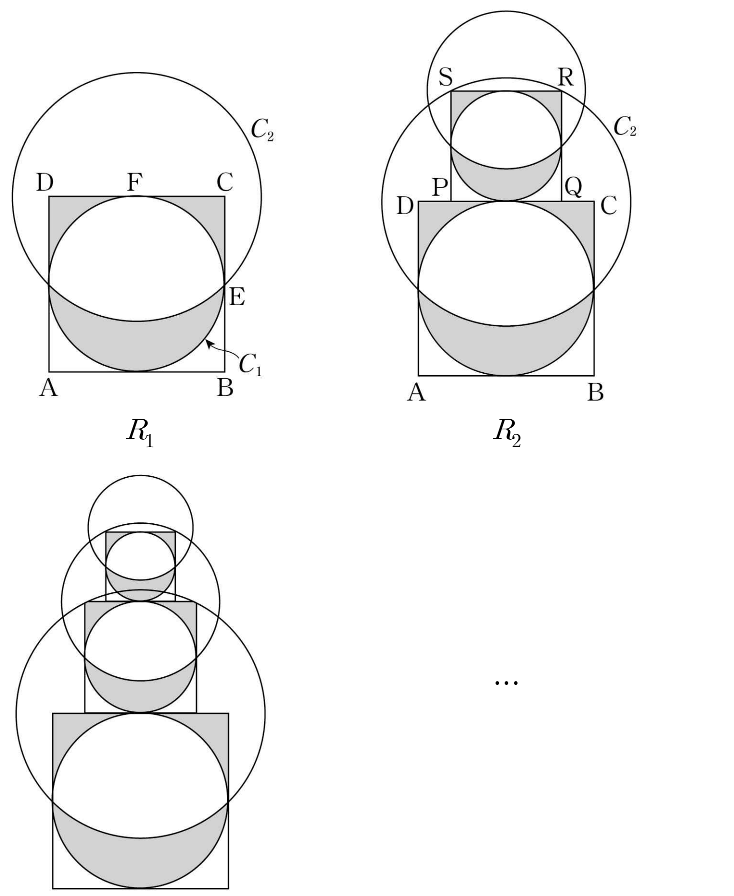
R_1 R_2 …

① $\frac{32}{11}(\pi-2)$ ② $\frac{34}{11}(\pi-2)$ ③ $\frac{36}{11}(\pi-2)$

④ $\frac{32}{11}(\pi-1)$ ⑤ $\frac{34}{11}(\pi-1)$

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 03월 19

72. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD가 있다. 이 정사각형에 내접하는 원을 C_1이라 하자. 원 C_1이 변 BC, CD와 접하는 점을 각각 E, F라 하고, 점 F를 중심으로 하고 점 E를 지나는 원을 C_2라 하자. 원 C_1의 내부와 원 C_2의 외부의 공통부분인 모양의 도형과, 원 C_1의 외부와 원 C_2의 내부 및 정사각형 ABCD의 내부의 공통부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 두 꼭짓점이 변 CD 위에 있고 나머지 두 꼭짓점이 정사각형 ABCD의 외부에 있으면서 원 C_2 위에 있는 정사각형 PQRS를 그리고, 이 정사각형 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양과 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



R_1 R_2

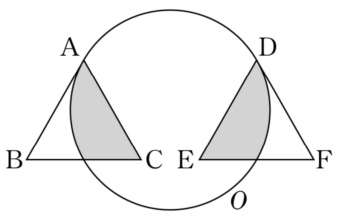
R_3 …

① $\frac{26-5\pi}{6}$ ② $\frac{28-5\pi}{6}$ ③ $\frac{30-5\pi}{6}$

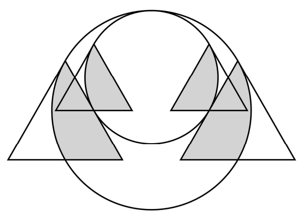
④ $\frac{32-5\pi}{6}$ ⑤ $\frac{34-5\pi}{6}$

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 10월 18

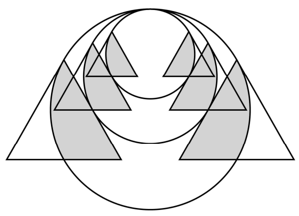
73. 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$ 인 원 O가 있다. 그림과 같이 원 O 위의 한 점 A에 대하여 정삼각형 ABC를 높이가 원 O의 반지름의 길이와 같고 선분 BC의 중점이 원 O 위의 점이 되도록 그린다. 그리고 정삼각형 ABC와 합동인 정삼각형 DEF를 점 D가 원 O 위에 있고 네 점 B, C, E, F가 한 직선 위에 있도록 그린다. 원 O의 내부와 정삼각형 ABC의 내부의 공통부분인 모양의 도형과 원 O의 내부와 정삼각형 DEF의 내부의 공통부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 두 선분 AC, DE에 동시에 접하고 원 O에 내접하는 원을 그린 후, 새로 그려진 원에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양의 도형과 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



R_1



R_2



R_3

…

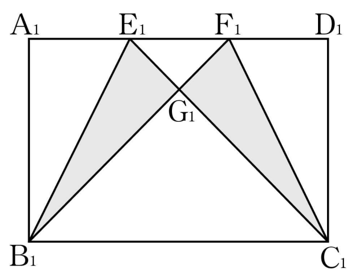
…

① $2\pi - \sqrt{3}$ ② $\dfrac{4\pi - \sqrt{3}}{3}$ ③ $\dfrac{6\pi - 3\sqrt{3}}{4}$

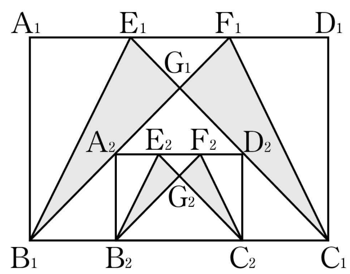
④ $\dfrac{16\pi - 4\sqrt{3}}{7}$ ⑤ $\dfrac{18\pi - 9\sqrt{3}}{10}$

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 03월 19

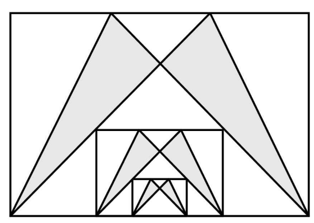
74. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=2$, $\overline{B_1C_1}=3$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 선분 A_1D_1을 삼등분하는 점 중에서 A_1에 가까운 점부터 차례대로 E_1, F_1이라 하고, 선분 B_1F_1과 선분 C_1E_1의 교점을 G_1이라 하자. 삼각형 $B_1G_1E_1$과 삼각형 $C_1F_1G_1$의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 선분 B_1C_1 위에 두 꼭짓점 B_2, C_2가 있고, 선분 B_1G_1 위에 꼭짓점 A_2, 선분 C_1G_1 위에 꼭짓점 D_2가 있으며 $\overline{A_2B_2}:\overline{B_2C_2}=2:3$인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다. 선분 A_2D_2를 삼등분하는 점 중에서 A_2에 가까운 점부터 차례대로 E_2, F_2라 하고, 선분 B_2F_2와 선분 C_2E_2의 교점을 G_2라 하자. 삼각형 $B_2G_2E_2$와 삼각형 $C_2F_2G_2$의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



R_1



R_2



R_3

…

…

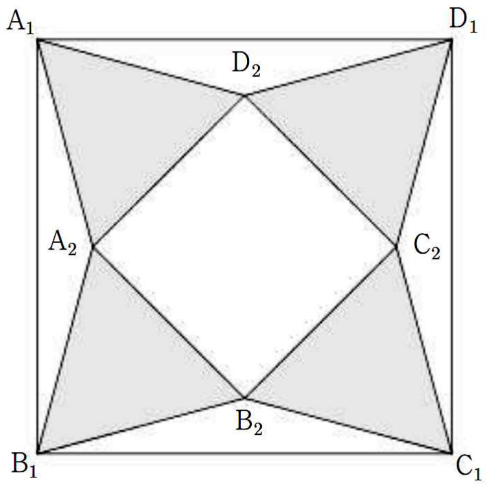
① $\dfrac{141}{80}$ ② $\dfrac{143}{80}$ ③ $\dfrac{29}{16}$

④ $\dfrac{147}{80}$ ⑤ $\dfrac{149}{80}$

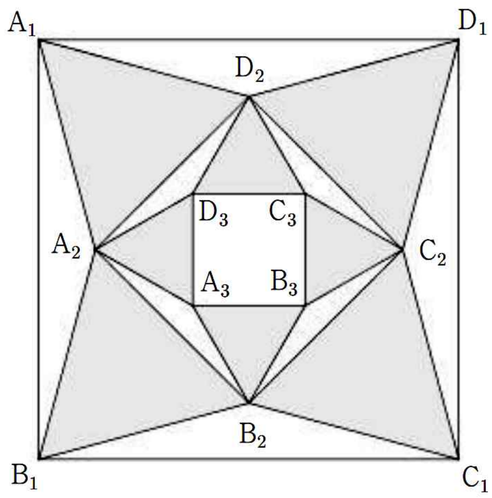
[출처] 2018 모의_공공 사관학교 고3 07월 19

75. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 내부에 네 점 A_2, B_2, C_2, D_2를 네 삼각형 $A_2A_1B_1$, $B_2B_1C_1$, $C_2C_1D_1$, $D_2D_1A_1$이 모두 한 내각의 크기가 150°인 이등변삼각형이 되도록 잡는다. 네 삼각형 $A_1A_2D_2$, $B_1B_2A_2$, $C_1C_2B_2$, $D_1D_2C_2$의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 내부에 네 점 A_3, B_3, C_3, D_3을 네 삼각형 $A_3A_2B_2$, $B_3B_2C_2$, $C_3C_2D_2$, $D_3D_2A_2$가 모두 한 내각의 크기가 150°인 이등변삼각형이 되도록 잡는다. 네 삼각형 $A_2A_3D_3$, $B_2B_3A_3$, $C_2C_3B_3$, $D_2D_3C_3$의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

R_1



R_2

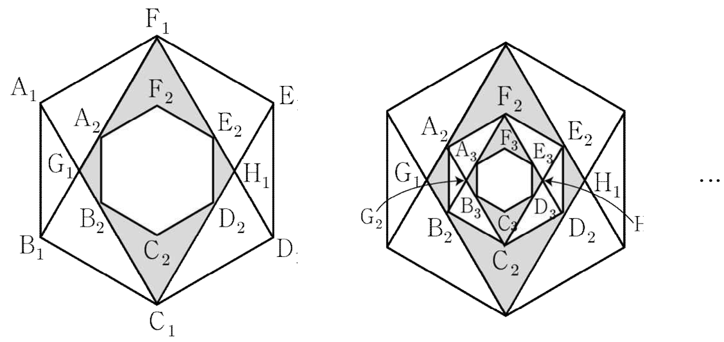


⋮ ⋮

① $5-\frac{3}{2}\sqrt{3}$ ② $6-2\sqrt{3}$ ③ $7-\frac{5}{2}\sqrt{3}$
④ $8-3\sqrt{3}$ ⑤ $9-\frac{7}{2}\sqrt{3}$

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고2 06월 19

76. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정육각형 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$이 있다. 선분 A_1C_1과 선분 B_1F_1의 교점을 G_1, 선분 C_1E_1과 선분 D_1F_1의 교점을 H_1이라 하고, 선분 B_1F_1과 선분 A_1C_1의 중점을 각각 A_2, B_2라 하자. 사각형 $F_1G_1C_1H_1$의 내부에 선분 A_2B_2를 한 변으로 하는 정육각형을 그리고, 이 정육각형의 나머지 네 꼭짓점을 C_2, D_2, E_2, F_2라 하자. 사각형 $F_1G_1C_1H_1$의 내부와 정육각형 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 선분 A_2C_2와 선분 B_2F_2의 교점을 G_2, 선분 C_2E_2와 선분 D_2F_2의 교점을 H_2라 하고, 선분 B_2F_2와 선분 A_2C_2의 중점을 각각 A_3, B_3이라 하자. 사각형 $F_2G_2C_2H_2$의 내부에 선분 A_3B_3을 한 변으로 하는 정육각형을 그리고, 이 정육각형의 나머지 네 꼭짓점을 C_3, D_3, E_3, F_3이라 하자. 사각형 $F_2G_2C_2H_2$의 내부와 정육각형 $A_3B_3C_3D_3E_3F_3$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



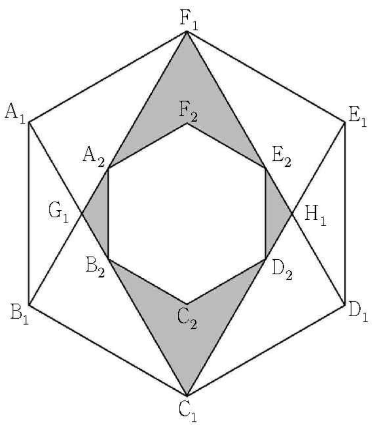
R_1 R_2 ⋯

① $\frac{53}{9}\sqrt{3}$ ② $\frac{56}{9}\sqrt{3}$ ③ $\frac{59}{9}\sqrt{3}$
④ $\frac{62}{9}\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{65}{9}\sqrt{3}$

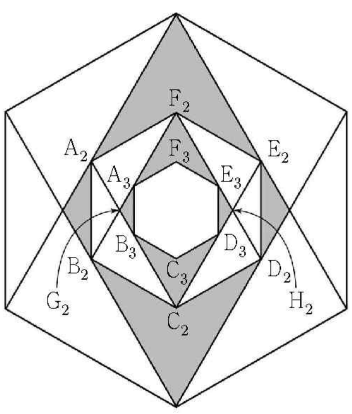
[출처] 2018 모의_공공 교육청 고2 06월 29

77. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정육각형 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$이 있다. 선분 A_1C_1과 선분 B_1F_1의 교점을 G_1, 선분 C_1E_1과 선분 D_1F_1의 교점을 H_1이라 하고, 선분 B_1F_1과 선분 A_1C_1의 중점을 각각 A_2, B_2라 하자. 사각형 $F_1G_1C_1H_1$의 내부에 선분 A_2B_2를 한 변으로 하는 정육각형을 그리고, 이 정육각형의 나머지 네 꼭짓점을 C_2, D_2, E_2, F_2라 하자. 사각형 $F_1G_1C_1H_1$의 내부와 정육각형 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 선분 A_2C_2와 선분 B_2F_2의 교점을 G_2, 선분 C_2E_2와 선분 D_2F_2의 교점을 H_2라 하고, 선분 B_2F_2와 선분 A_2C_2의 중점을 각각 A_3, B_3이라 하자. 사각형 $F_2G_2C_2H_2$의 내부에 선분 A_3B_3을 한 변으로 하는 정육각형을 그리고, 이 정육각형의 나머지 네 꼭짓점을 C_3, D_3, E_3, F_3이라 하자. 사각형 $F_2G_2C_2H_2$의 내부와 정육각형 $A_3B_3C_3D_3E_3F_3$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

R_1



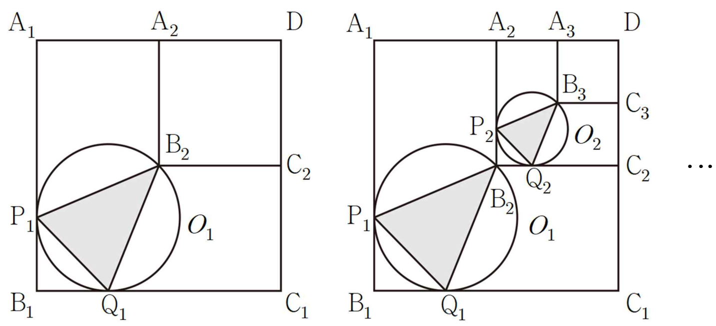
R_2



⋮ ⋮

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 04월 18

78. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D$가 있다. 정사각형 $A_1B_1C_1D$의 두 대각선의 교점을 B_2라 하고, 점 B_2에서 두 변 A_1D, C_1D에 내린 수선의 발을 각각 A_2, C_2라 하자. 점 B_2를 지나고 두 변 A_1B_1, B_1C_1에 동시에 접하는 원을 O_1이라 하고, 원 O_1이 두 변 A_1B_1, B_1C_1에 접하는 점을 각각 P_1, Q_1이라 할 때, 삼각형 $B_2P_1Q_1$의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 정사각형 $A_2B_2C_2D$의 두 대각선의 교점을 B_3이라 하고, 점 B_3에서 두 변 A_2D, C_2D에 내린 수선의 발을 각각 A_3, C_3이라 하자. 점 B_3을 지나고 두 변 A_2B_2, B_2C_2에 동시에 접하는 원을 O_2라 하고, 원 O_2가 두 변 A_2B_2, B_2C_2에 접하는 점을 각각 P_2, Q_2라 할 때, 삼각형 $B_3P_2Q_2$의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

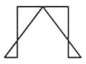
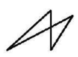


R_1 R_2 ⋯

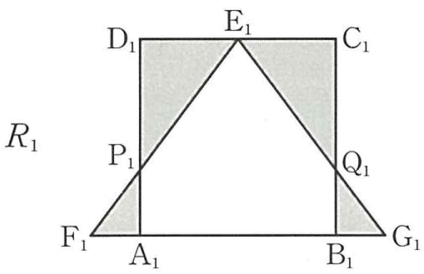
① $\frac{4\sqrt{2}-4}{3}$ ② $\frac{4\sqrt{3}-5}{3}$ ③ $\frac{8\sqrt{3}-8}{9}$

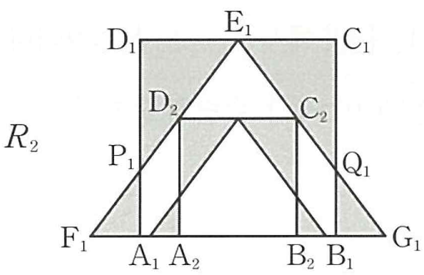
④ $\frac{4\sqrt{2}-3}{4}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{2}-3}{6}$

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 06월 17

79. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 선분 C_1D_1의 중점을 E_1이라 하고, 직선 A_1B_1 위에 두 점 F_1, G_1을 $\overline{E_1F_1}=\overline{E_1G_1}$, $\overline{E_1F_1}:\overline{F_1G_1}=5:6$이 되도록 잡고 이등변삼각형 $E_1F_1G_1$을 그린다. 선분 D_1A_1과 선분 E_1F_1의 교점을 P_1, 선분 B_1C_1과 선분 G_1E_1의 교점을 Q_1이라 할 때, 네 삼각형 $E_1D_1P_1$, $P_1F_1A_1$, $Q_1B_1G_1$, $E_1Q_1C_1$로 만들어진  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 선분 F_1G_1 위의 두 점 A_2, B_2와 선분 G_1E_1 위의 점 C_2, 선분 E_1F_1 위의 점 D_2를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$에  모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?





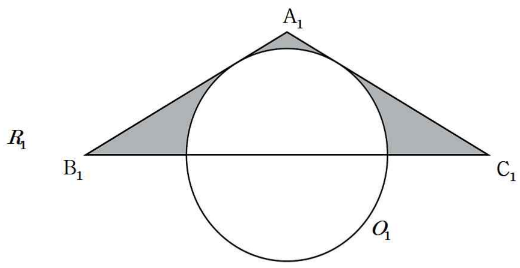
⋮ ⋮

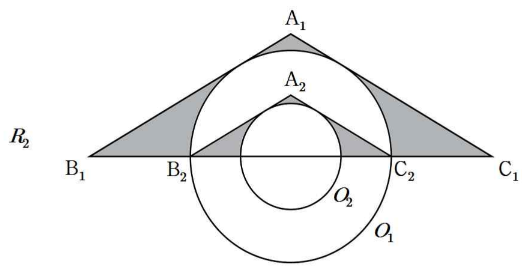
① $\frac{61}{6}$ ② $\frac{125}{12}$ ③ $\frac{32}{3}$

④ $\frac{131}{12}$ ⑤ $\frac{67}{6}$

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 04월 18

80. $\overline{B_1C_1}=8$이고 $\angle B_1A_1C_1=120°$인 이등변삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다. 그림과 같이 중심이 선분 B_1C_1위에 있고 직선 A_1B_1과 직선 A_1C_1에 동시에 접하는 원 O_1을 그리고 이등변삼각형 $A_1B_1C_1$의 내부와 원 O_1의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 원 O_1과 선분 B_1C_1이 만나는 점을 각각 B_2, C_2라 할 때, 삼각형 $A_1B_1C_1$ 내부의 점 A_2를 삼각형 $A_2B_2C_2$가 $\angle B_2A_2C_2=120°$인 이등변삼각형이 되도록 잡는다. 중심이 선분 B_2C_2 위에 있고 직선 A_2B_2와 직선 A_2C_2에 동시에 접하는 원 O_2를 그리고 이등변삼각형 $A_2B_2C_2$의 내부와 원 O_2의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?





⋮ ⋮

① $\frac{32}{3}\sqrt{3}-\frac{8}{3}\pi$ ② $\frac{32}{3}\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$

③ $\frac{64}{9}\sqrt{3}-\frac{8}{3}\pi$ ④ $\frac{64}{9}\sqrt{3}-\frac{5}{3}\pi$

⑤ $\frac{64}{9}\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$

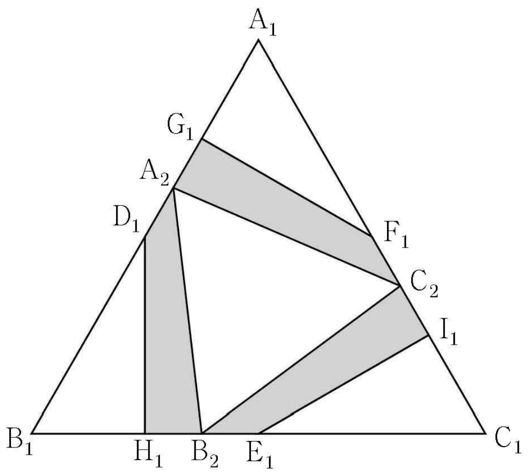
[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 18

81. 그림과 같이 한 변의 길이가 8인 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 세 선분 A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1의 중점을 각각 D_1, E_1, F_1이라 하고, 세 선분 A_1D_1, B_1E_1, C_1F_1의 중점을 각각 G_1, H_1,I_1이라 하고, 세 선분 G_1D_1, H_1E_1, I_1F_1의 중점을 각각 A_2,B_2, C_2라 하자. 세 사각형 $A_2C_2F_1G_1$, $B_2A_2D_1H_1$, $C_2B_2E_1I_1$에 모두 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

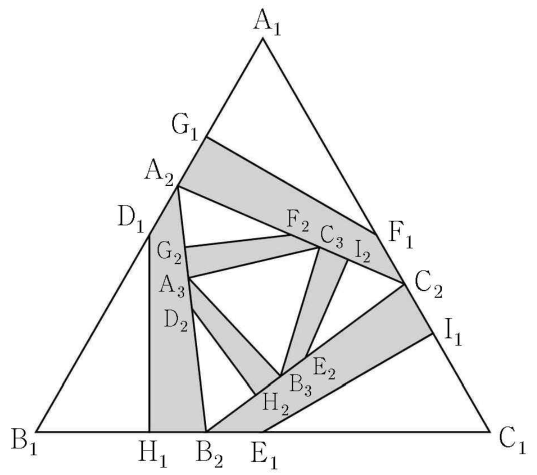
그림 R_1에서 삼각형 $A_2B_2C_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 세 사각형 $A_3C_3F_2G_2$, $B_3A_3D_2H_2$, $C_3B_3E_2I_2$에 모두 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $\frac{109\sqrt{3}}{15}$ ② $\frac{112\sqrt{3}}{15}$ ③ $\frac{23\sqrt{3}}{3}$

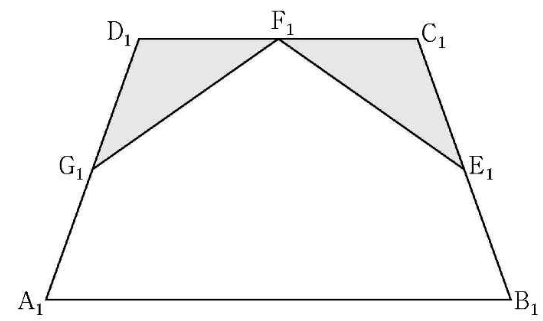
④ $\frac{118\sqrt{3}}{15}$ ⑤ $\frac{121\sqrt{3}}{15}$

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 18

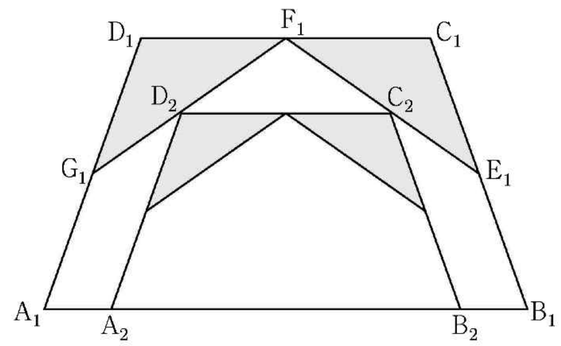
82. 그림과 같이 두 선분 A_1B_1, C_1D_1이 서로 평행하고 $\overline{A_1B_1}=10$, $\overline{B_1C_1}=\overline{C_1D_1}=\overline{D_1A_1}=6$인 사다리꼴 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 세 선분 B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1의 중점을 각각 E_1, F_1, G_1이라 하고 두 개의 삼각형 $C_1F_1E_1$, $D_1G_1F_1$을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에 선분 A_1B_1 위의 두 점 A_2, B_2와 선분 E_1F_1 위의 점 C_2, 선분 F_1G_1 위의 점 D_2를 꼭짓점으로 하고 두 선분 A_2B_2, C_2D_2가 서로 평행하며 $\overline{B_2C_2}=\overline{C_2D_2}=\overline{D_2A_2}$, $\overline{A_2B_2}$: $\overline{B_2C_2}=5$: 3인 사다리꼴 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다. 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 사다리꼴 $A_2B_2C_2D_2$에 두 개의 삼각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $\frac{234}{19}\sqrt{2}$ ② $\frac{236}{19}\sqrt{2}$ ③ $\frac{238}{19}\sqrt{2}$

④ $\frac{240}{19}\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{242}{19}\sqrt{2}$

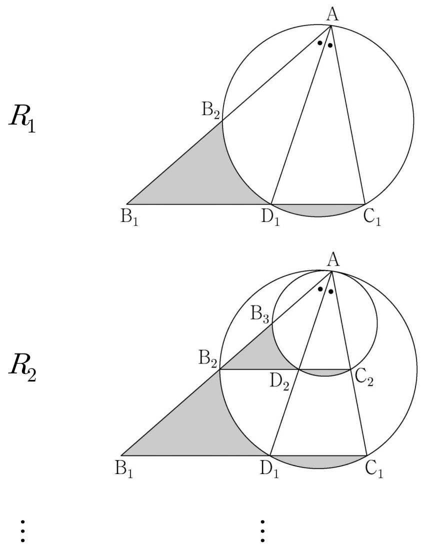
[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 20

83. 그림과 같이 $\overline{AB_1}=3$, $\overline{AC_1}=2$이고 $\angle B_1AC_1=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 AB_1C_1이 있다. $\angle B_1AC_1$의 이등분선이 선분 B_1C_1과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B_2라 할 때, 두 선분 B_1B_2, B_1D_1과 호 B_2D_1로 둘러싸인 부분과 선분 C_1D_1과 호 C_1D_1로 둘러싸인 부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 점 B_2를 지나고 직선 B_1C_1에 평행한 직선이 두 선분 AD_1, AC_1과 만나는 점을 각각 D_2, C_2라 하자.

세 점 A, D_2, C_2를 지나는 원이 선분 AB_2와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B_3이라 할 때, 두 선분 B_2B_3, B_2D_2여 호 B_3D_2로 둘러싸인 부분과 선분 C_2D_2와 호 C_2D_2로 둘러싸인 부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?

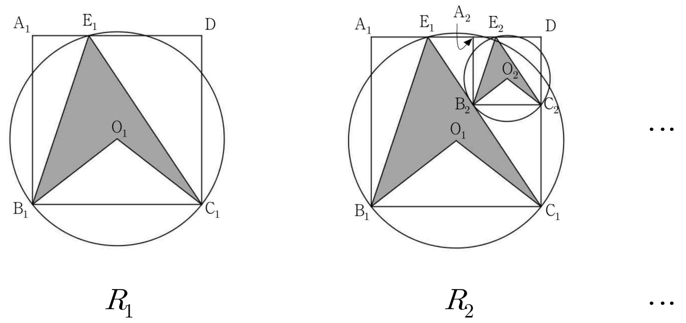


① $\frac{27\sqrt{3}}{46}$ ② $\frac{15\sqrt{3}}{23}$ ③ $\frac{33\sqrt{3}}{46}$

④ $\frac{18\sqrt{3}}{23}$ ⑤ $\frac{39\sqrt{3}}{46}$

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 19

84. 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정사각형 $A_1B_1C_1D$에서 선분 A_1D를 $1:2$로 내분하는 점을 E_1이라 하고, 세 점 B_1, C_1, E_1을 지나는 원의 중심을 O_1이라 하자. 삼각형 $E_1B_1C_1$의 내부와 삼각형 $O_1B_1C_1$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 선분 E_1D 위의 점 A_2, 선분 E_1C_1 위의 점 B_2, 선분 C_1D 위의 점 C_2와 점 D를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $A_2B_2C_2D$를 그린다. 정사각형 $A_2B_2C_2D$에서 선분 A_2D를 $1:2$로 내분하는 점을 E_2라 하고, 세 점 B_2, C_2, E_2를 지나는 원의 중심을 O_2라 하자. 삼각형 $E_2B_2C_2$의 내부와 삼각형 $O_2B_2C_2$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim S_n$의 값은?



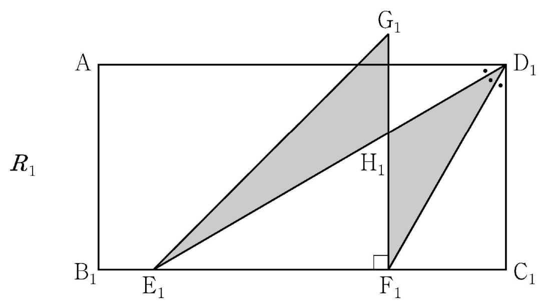
① $\frac{90}{7}$ ② $\frac{275}{21}$ ③ $\frac{40}{3}$

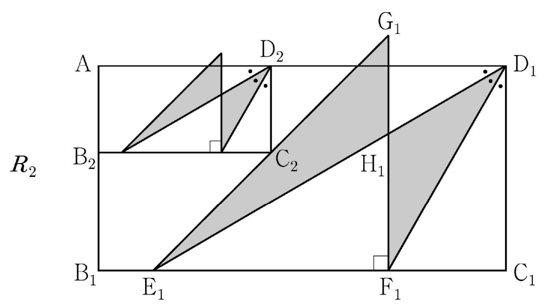
④ $\frac{95}{7}$ ⑤ $\frac{290}{21}$

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 미적분 27

85. 그림과 같이 $\overline{AB_1}=1$, $\overline{B_1C_1}=2$인 직사각형 $AB_1C_1D_1$이 있다. $\angle AD_1C_1$을 삼등분하는 두 직선이 선분 B_1C_1과 만나는 점 중 점 B_1에 가까운 점을 E_1, 점 C_1에 가까운 점을 F_1이라 하자.

$\overline{E_1F_1}=\overline{F_1G_1}$, $\angle E_1F_1G_1=\dfrac{\pi}{2}$이고 선분 AD_1와 선분 F_1G_1이 만나도록 점 G_1을 잡아 삼각형 $E_1F_1G_1$을 그린다.
선분 E_1D_1과 선분 F_1G_1이 만나는 점을 H_1이라 할 때, 두 삼각형 $G_1E_1H_1$, $H_1F_1D_1$로 만들어진 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 선분 AB_1 위의 점 B_2, 선분 E_1G_1 위의 점 C_2, 선분 AD_1 위의 점 D_2와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{AB_2}:\overline{B_2C_2}=1:2$인 직사각형 $AB_2C_2D_2$를 그린다.
직사각형 $AB_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$의 값은?





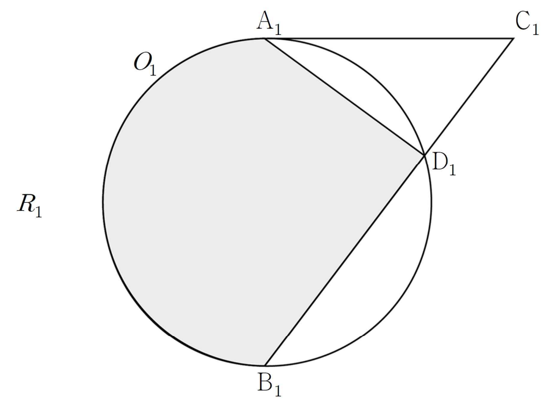
⋮ ⋮

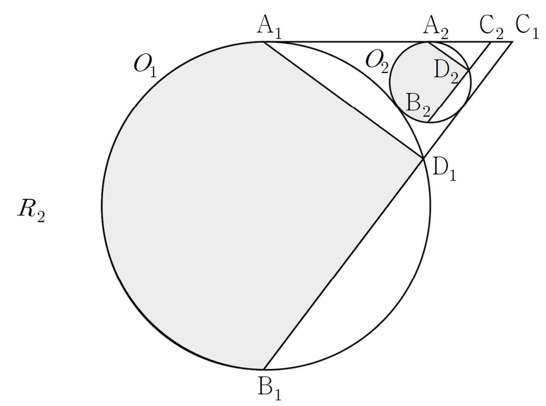
① $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ ② $\dfrac{5\sqrt{3}}{18}$ ③ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
④ $\dfrac{7\sqrt{3}}{18}$ ⑤ $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 미적분 28

86. 그림과 같이 길이가 4인 선분 A_1B_1을 지름으로 하는 원 O_1이 있다. 원 O_1의 외부에 $\angle B_1A_1C_1=\dfrac{\pi}{2}$, $\overline{A_1B_1}:\overline{A_1C_1}=4:3$이 되도록 점 C_1을 잡고 두 선분 A_1C_1, B_1C_1을 그린다. 원 O_1과 선분 B_1C_1의 교점 중 B_1이 아닌 점을 D_1이라 하고, 점 D_1을 포함하지 않는 호 A_1B_1과 두 선분 A_1D_1, B_1D_1로 둘러싸인 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 호 A_1D_1과 두 선분 A_1C_1, C_1D_1에 동시에 접하는 원 O_2를 그리고 선분 A_1C_1과 원 O_2의 교점을 A_2, 점 A_2를 지나고 직선 A_1B_1과 평행한 직선이 원 O_2와 만나는 점 중 A_2가 아닌 점을 B_2라 하자. 그림 R_1에서 얻은 것과 같은 방법으로 두 점 C_2, D_2를 잡고, 점 D_2를 포함하지 않는 호 A_2B_2와 두 선분 A_2D_2, B_2D_2로 둘러싸인 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$의 값은?





⋮ ⋮

① $\dfrac{32}{15}\pi+\dfrac{256}{125}$ ② $\dfrac{9}{4}\pi+\dfrac{54}{25}$
③ $\dfrac{32}{15}\pi+\dfrac{512}{125}$ ④ $\dfrac{9}{4}\pi+\dfrac{108}{25}$
⑤ $\dfrac{8}{3}\pi+\dfrac{128}{25}$

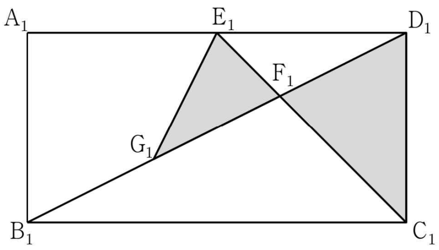
[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 미적분 27

87. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{B_1C_1}=2$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 선분 A_1D_1의 중점 E_1에 대하여 두 선분 B_1D_1, C_1E_1이 만나는 점을 F_1이라 하자. $\overline{G_1E_1}=\overline{G_1F_1}$이 되도록 선분 B_1D_1 위에 점 G_1을 잡아 삼각형 $G_1F_1E_1$을 그린다. 두 삼각형 $C_1D_1F_1$, $G_1F_1E_1$로 만들어진  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

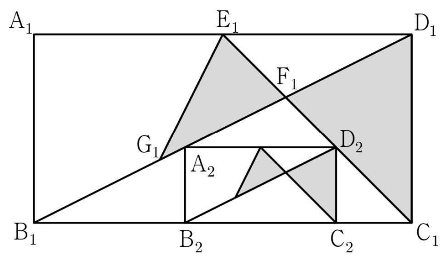
그림 R_1에서 선분 B_1F_1 위의 점 A_2, 선분 B_1C_1 위의 두 점 B_2, C_2, 선분 C_1F_1 위의 점 D_2를 꼭짓점으로 하고 $\overline{A_2B_2}:\overline{B_2C_2}=1:2$인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다. 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

R_1



R_2



⋮ ⋮

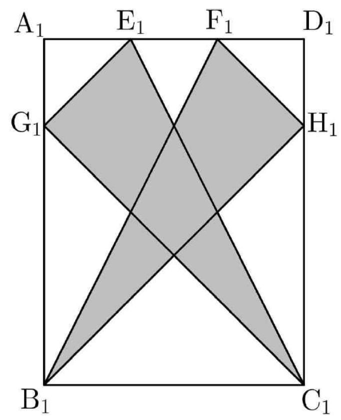
① $\frac{23}{42}$ ② $\frac{25}{42}$ ③ $\frac{9}{14}$
④ $\frac{29}{42}$ ⑤ $\frac{31}{42}$

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 미적분 27

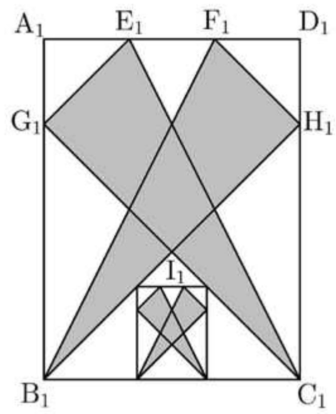
88. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=4$, $\overline{A_1D_1}=3$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 선분 A_1D_1을 $1:2$, $2:1$로 내분하는 점을 각각 E_1, F_1이라 하고, 두 선분 A_1B_1, D_1C_1을 $1:3$으로 내분하는 점을 각각 G_1, H_1이라 하자. 두 삼각형 $C_1E_1G_1$, $B_1H_1F_1$로 만들어진  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 두 선분 B_1H_1, C_1G_1이 만나는 점을 I_1이라 하자.

선분 B_1I_1 위의 점 A_2, 선분 C_1I_1 위의 점 D_2, 선분 B_1C_1 위의 두 점 B_2, C_2를 $\overline{A_2B_2}:\overline{A_2D_2}=4:3$인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$가 되도록 잡는다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$에  모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



R_1



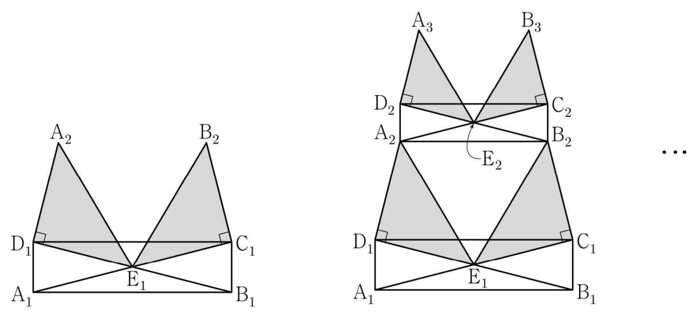
R_2

① $\frac{347}{64}$ ② $\frac{351}{64}$ ③ $\frac{355}{64}$
④ $\frac{359}{64}$ ⑤ $\frac{363}{64}$

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 미적분 27

89. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=4$, $\overline{A_1D_1}=1$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 두 대각선의 교점을 E_1이라 하자. $\overline{A_2D_1}=\overline{D_1E_1}$, $\angle A_2D_1E_1=\frac{\pi}{2}$이고 선분 D_1C_1과 선분 A_2E_1이 만나도록 점 A_2를 잡고, $\overline{B_2C_1}=\overline{C_1E_1}$, $\angle B_2C_1E_1=\frac{\pi}{2}$이고 선분 D_1C_1과 선분 B_2E_1이 만나도록 점 B_2를 잡는다. 두 삼각형 $A_2D_1E_1$, $B_2C_1E_1$을 그린 후 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 $\overline{A_2B_2}:\overline{A_2D_2}=4:1$이고 선분 D_2C_2가 두 선분 A_2E_1, B_2E_1과 만나지 않도록 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 세 점 E_2, A_3, B_3을 잡고 두 삼각형 $A_3D_2E_2$, $B_3C_2E_2$를 그린 후 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



R_1 R_2 …

① $\frac{68}{5}$ ② $\frac{34}{3}$ ③ $\frac{68}{7}$ ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{68}{9}$

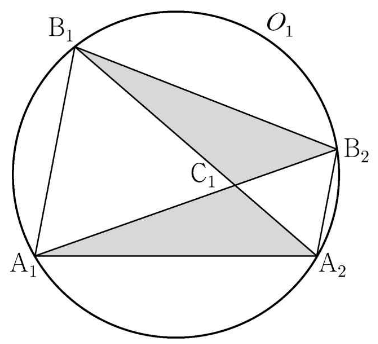
[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 미적분 26

90. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=2$, $\overline{B_1A_2}=3$이고 $\angle A_1B_1A_2=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 $A_1A_2B_1$과 이 삼각형의 외접원 O_1이 있다.

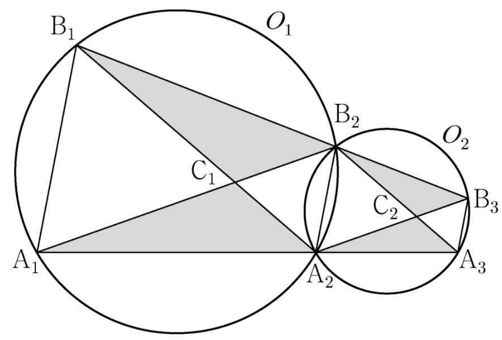
점 A_2를 지나고 직선 A_1B_1에 평행한 직선이 원 O_1과 만나는 점 중 A_2가 아닌 점을 B_2라 하자. 두 선분 A_1B_2, B_1A_2가 만나는 점을 C_1이라 할 때, 두 삼각형 $A_1A_2C_1$, $B_1C_1B_2$로 만들어진 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 점 B_2를 지나고 직선 B_1A_2에 평행한 직선이 직선 A_1A_2와 만나는 점을 A_3이라 할 때, 삼각형 $A_2A_3B_2$의 외접원을 O_2라 하자. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 두 점 B_3, C_2를 잡아 원 O_2에 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $\frac{11\sqrt{3}}{9}$ ② $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{13\sqrt{3}}{9}$ ④ $\frac{14\sqrt{3}}{9}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

무등비도형 다 모아봄1(빠른 정답)

프로젝트 2023.01.02

1. [정답] 13
2. [정답] ③
3. [정답] ②
4. [정답] ③
5. [정답] ①

6. [정답] ④
7. [정답] ⑤
8. [정답] ⑤
9. [정답] ⑤
10. [정답] ③

11. [정답] ②
12. [정답] ③
13. [정답] ⑤
14. [정답] ③
15. [정답] ④

16. [정답] ①
17. [정답] 11
18. [정답] ②
19. [정답] ②
20. [정답] 200

21. [정답] ③
22. [정답] ②
23. [정답] ①
24. [정답] ⑤
25. [정답] ③

26. [정답] ①
27. [정답] ①
28. [정답] ①
29. [정답] ④
30. [정답] ①

31. [정답] ②
32. [정답] 125
33. [정답] ③
34. [정답] ②
35. [정답] ①

36. [정답] ⑤
37. [정답] ⑤
38. [정답] ①
39. [정답] ②
40. [정답] ③

41. [정답] ②
42. [정답] ①
43. [정답] 125
44. [정답] ①
45. [정답] 10

46. [정답] ⑤
47. [정답] ④
48. [정답] ④
49. [정답] ②
50. [정답] ①

51. [정답] ④
52. [정답] ②
53. [정답] 19
54. [정답] ①
55. [정답] ⑤

56. [정답] ④
57. [정답] ④
58. [정답] ④
59. [정답] ④
60. [정답] ①

61. [정답] 9
62. [정답] 47
63. [정답] ②
64. [정답] ④
65. [정답] ⑤

66. [정답] ③
67. [정답] ①
68. [정답] ①
69. [정답] ①
70. [정답] ⑤

71. [정답] ①
72. [정답] ③

73. [정답] ⑤
74. [정답] ④
75. [정답] ②

76. [정답] ②
77. [정답] ②
78. [정답] ①
79. [정답] ②
80. [정답] ③

81. [정답] ②
82. [정답] ⑤
83. [정답] ①
84. [정답] ②
85. [정답] ③

86. [정답] ③
87. [정답] ②
88. [정답] ⑤
89. [정답] ③
90. [정답] ②

무등비도형 다 모아봄1(해설)

프로젝트 2023.01.02

1) [정답] 13

[해설]

$$10\left\{1-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4+\cdots\right\}$$

$$=10\left(1-\frac{1}{2}\right)+10\left\{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\cdots\right\}$$

$$=5+10\cdot\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{4}{9}}\right)=13$$

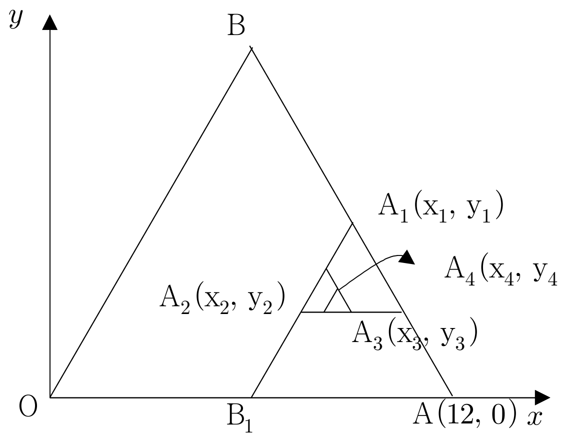
2) [정답] ③

[해설]

$A_n(x_n,\ y_n)$ 이라 두면

$\lim\limits_{n\to\infty}\tan(\angle AOA_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}$ 이므로

아래 그림에서



삼각형의 한 변의 길이를 $a=12$ 라 두면

i) $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}x_n$

$$=a-\frac{1}{2}a\times\cos\frac{\pi}{3}-\left(\frac{1}{2}\right)^2a\times\cos\frac{\pi}{3}+\left(\frac{1}{2}\right)^3\times a-\left(\frac{1}{2}\right)^4a\times\cos\frac{\pi}{3}-\left(\frac{1}{2}\right)^5a\times\cos\frac{\pi}{3}+\left(\frac{1}{2}\right)^3\times a+\cdots$$

$$=a\times\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^6+\cdots\right\}-\left(\frac{1}{2}\right)a\times\cos\frac{\pi}{3}\times\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^6+\cdots\right\}-\left(\frac{1}{2}\right)^2a\times\cos\frac{\pi}{3}\times\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^6+\cdots\right\}$$

$$=a\times\left(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)\times\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^6+\cdots\right\}$$

$$=a\times\frac{5}{8}\times\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^3}$$

$$=\frac{5}{7}a$$

ii) $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}y_n$

$$=0+\frac{1}{2}a\times\sin\frac{\pi}{3}-\left(\frac{1}{2}\right)^2a\times\sin\frac{\pi}{3}+\left(\frac{1}{2}\right)^4a\times\sin\frac{\pi}{3}-\left(\frac{1}{2}\right)^5a\times\sin\frac{\pi}{3}+\left(\frac{1}{2}\right)^7a\times\sin\frac{\pi}{3}+\cdots$$

$$=a\times\sin\frac{\pi}{3}\times\left[\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^7+\cdots\right\}-\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^8\cdots\right\}\right]$$

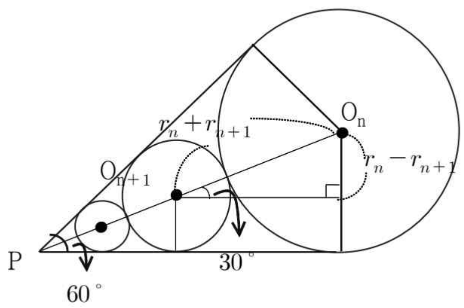
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}a\times\left\{\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^3}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^3}\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{7}a$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\tan(\angle AOA_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{7}a}{\frac{5}{7}a}=\frac{\sqrt{3}}{5}$$

3) [정답] ②

[해설]



그림에서

$$\frac{r_n-r_{n+1}}{r_n+r_{n+1}}=\sin30^\circ=\frac{1}{2}$$

$\therefore\ r_{n+1}=\frac{1}{3}r_n$이고

$$\frac{r_1}{6\sqrt{3}}=\tan30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\therefore\ r_1=6$이므로

$\therefore\ r_n=6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ 인 등비수열이다.

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}r_n=\sum_{n=1}^{\infty}6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{6}{1-\frac{1}{3}}=9$$

4) [정답] ③

[해설]

조건을 이용하여 점 A_n, B_n의 좌표를 구하면

$\mathrm{A}_1(1,\ 2)$, $\mathrm{B}_1(4,\ 2)$, $\mathrm{A}_2(2,\ 4)$, $\mathrm{B}_2(8,\ 4)$,

$\mathrm{A}_3(4,\ 8)$, $\mathrm{B}_3(16,\ 8)$, $\mathrm{A}_4(8,\ 16)$, $\mathrm{B}_4(32,\ 16)$, $\cdots$

이 때, $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}$의 길이는 점 B_n의 x좌표에서 점 A_n의 x좌표를 뺀 값이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}}=\frac{1}{\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1}}+\frac{1}{\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2}}+\frac{1}{\overline{\mathrm{A}_3\mathrm{B}_3}}+\cdots$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\cdots$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}+\cdots$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots$$

$$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

5) [정답] ①

[해설]

$\overline{\mathrm{AB}_1}=\overline{\mathrm{AC}_1}=10$ 이고,$\overline{\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2}=\frac{1}{4}\overline{\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1}$ 이므로 삼각형의

닮음비에서 $\overline{\mathrm{B_kB_{k+1}}}=\frac{1}{4}\overline{\mathrm{B_kC_k}}$ $\quad\therefore\ \overline{\mathrm{B_kC_k}}=4\overline{\mathrm{B_kB_{k+1}}}$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{\infty}\overline{\mathrm{B_kC_k}}=4\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\overline{\mathrm{B_kB_{k+1}}}=4\overline{\mathrm{AB}_1}=40$$

6) [정답] ④

[해설]

$\overline{\mathrm{OP}_1}=1$ 이므로

$a_1=\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1}=\overline{\mathrm{OP}_1}=1$

$a_2=\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2}=\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}=a_1\cdot\cos\theta=\cos\theta$

$\vdots$

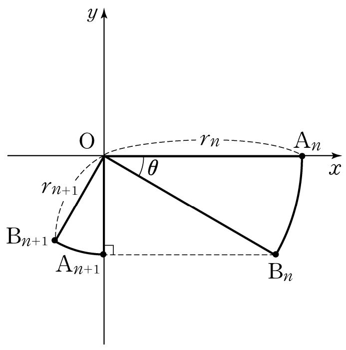
$a_{n+1}=\overline{\mathrm{P}_{n+1}Q_{n+1}}=\overline{P_nP_{n+1}}=a_n\cdot\cos\theta$

즉, 수열 $\{\mathrm{a_n}\}$은 공비가 $\cos\theta$, 첫째항이 1인 등비수열

이다. $\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{1-\cos\theta}=4\ \therefore\ \cos\theta=\frac{3}{4}$

7) [정답] ⑤

[해설]



부채꼴 OA_nB_n의 반지름의 길이를 r_n이라 하면

$r_n\cos(90^\circ-\theta)=r_{n+1}\ \therefore r_{n+1}=r_n\sin\theta$

$r_1=8$이므로 $r_n=8\cdot\sin^{n-1}\theta$

$\therefore l_n=r_n\theta=8\sin^{n-1}\theta\cdot(\theta)$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{8\theta}{1-\sin\theta}=12\theta$$

$\therefore 1-\sin\theta=\frac{2}{3}$, $\sin\theta=\frac{1}{3}$

8) [정답] ⑤

[해설]

(ⅰ) 삼각형의 중점연결정리에 의하여

$\overline{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{M}_3\mathrm{M}_4}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}=1$

$\overline{\mathrm{M}_5\mathrm{M}_6}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{M}_3\mathrm{M}_4}=\frac{1}{2}$

$\vdots$

$$\overline{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}+\overline{\mathrm{M}_3\mathrm{M}_4}+\overline{\mathrm{M}_5\mathrm{M}_6}+\cdots=\frac{2}{1-\frac{1}{2}}=4$$

(ⅱ) 삼각형의 중점연결정리에 의하여

$\overline{\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{CM}_1}=2$, $\overline{\mathrm{M}_4\mathrm{M}_5}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3}=1$

$\overline{\mathrm{M}_6\mathrm{M}_7}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{M}_4\mathrm{M}_5}=\frac{1}{2}$

⋮

$$\overline{M_2M_3}+\overline{M_4M_5}+\overline{M_6M_7}+\cdots=\frac{2}{1-\frac{1}{2}}=4$$

(iii)△ ABC 에서 $\cos B=\frac{4^2+8^2-6^2}{2\cdot4\cdot8}=\frac{11}{16}$ 이므로

$\overline{AM_1}^2=16+16-32\cos B=10$ ∴ $\overline{AM_1}=\sqrt{10}$

따라서, (i). (ii), (iii)으로부터

$\overline{AM_1}+\overline{M_1M_2}+\overline{M_2M_3}+\cdots=8+\sqrt{10}$

9) [정답] ⑤

[해설]

$\overline{OA_n}=a_n$ 이라 하면 $a_n=\pi\cdot\frac{a_{n+1}}{2}$ 에서

$a_{n+1}=\frac{2}{\pi}a_n$ 이므로 $a_n=a_1\cdot\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1}=(6\pi-12)\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1}$

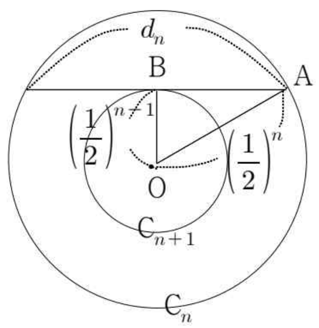
∴ $\overset{\frown}{OA_n}=\pi\cdot\frac{a_n}{2}=\frac{\pi}{2}(6\pi-12)\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1}$

따라서 구하는 값은 첫째항이 $\frac{\pi}{2}(6\pi-12)$, 공비가 $\frac{2}{\pi}$인

무한등비급수이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\overset{\frown}{OA_n}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{6\pi-12}{1-\frac{2}{\pi}}=3\pi^2$

10) [정답] ③

[해설]



그림에서 △OAB는 직각삼각형이므로

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}^2=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}^2+\left\{\frac{d_n}{2}\right\}^2$$

∴ $d_n=2\sqrt{3\cdot4^{-n}}$

그러므로

$$\frac{d_{n+1}}{d_n}=\frac{2\sqrt{3\cdot4^{-n-1}}}{2\sqrt{3\cdot4^{-n}}}=\frac{1}{2}$$

따라서, 수열 $\{d_n\}$은 초항이 $\sqrt{3}$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

∴ $\sum_{n=1}^{\infty}d_n=\frac{\sqrt{3}}{1-\frac{1}{2}}=2\sqrt{3}$

11) [정답] ②

[해설]

R_1의 짧은 변의 길이를 x라 하면 R_2의 긴 변과 짧은 변의 길이는 각각 x, $1-x$이고 R_1과 R_2가 닮음이므로

$x:1=(1-x):x$

$x^2+x-1=0$에서 $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ $(\because\ x>0)$

또 R_n과 R_{n+1}사이에 $1:\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 의 닮음비가 성립하므로

$$l_{n+1}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}l_n$$

$\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{l_1}{1-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}l_1$ 이므로

$k=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$이다.

12) [정답] ③

[해설]

$$l_1=\frac{a}{\cos30^\circ}=\frac{2}{\sqrt{3}}a$$

$$l_{n+1}=\frac{l_n}{\cos30^\circ}$$

∴ $\frac{l_{n+1}}{l_n}=\frac{1}{\cos30^\circ}=\frac{2}{\sqrt{3}}$

따라서 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 $\frac{2}{\sqrt{3}}a$이고 공비가 $\frac{2}{\sqrt{3}}$인

등비수열이므로 $l_n=\frac{2}{\sqrt{3}}a\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}=a\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$

∴ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n}=\frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$

$$=\frac{1}{a}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{a}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

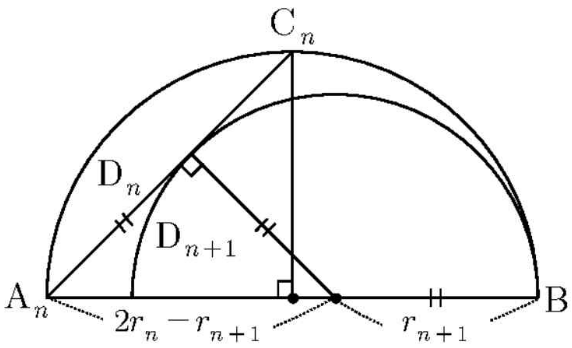
$$=\frac{2\sqrt{3}+3}{a}=\sqrt{3}$$

$\therefore\ a=2+\sqrt{3}$

13) [정답] ⑤

[해설]

그림과 같이 반원 D_n, D_{n+1}의 반지름을 각각 r_n, r_{n+1}라 하면,



$r_{n+1}:(2r_n-r_{n+1})=1:\sqrt{2}$, $r_{n+1}=\dfrac{2}{\sqrt{2}+1}r_n$

따라서, $l_1=2\pi$, $l_{n+1}=\dfrac{2}{\sqrt{2}+1}l_n$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{2\pi}{1-\frac{2}{\sqrt{2}+1}}=2(3+2\sqrt{2})\pi$$

14) [정답] ③

[해설]

원 C와 C_1의 반지름의 길이를 각각 r과 r_1이라

하면 $r=1$,

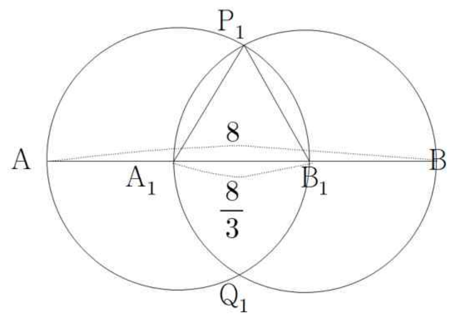
$\sqrt{2}r_1+r_1=1$이므로 $r_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$,

$r:r_1=r_n:r_{n+1}=1:\sqrt{2}-1$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}r_k=\frac{\sqrt{2}-1}{1-(\sqrt{2}-1)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

15) [정답] ④

[해설]



세 선분A_1B_1, A_1P_1, B_1P_1의 길이는 모두 원의 반지름의 길이인 $\dfrac{8}{3}$이므로 $\triangle A_1B_1P_1$은 정삼각형이다.

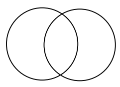
$\therefore\ \angle P_1A_1B_1=\dfrac{\pi}{3}$

따라서, 호$P_1A_1Q_1$의 길이는

$\dfrac{8}{3}\times\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{16}{9}\pi$

이므로 두 호$P_1A_1Q_1$, $P_1B_1Q_1$의 길이의 합은

$l_1=2\times\dfrac{16}{9}\pi=\dfrac{32}{9}\pi$

한편,  모양의 도형을 크기 순으로 나열하면 이들은 모두 닮은꼴이고,

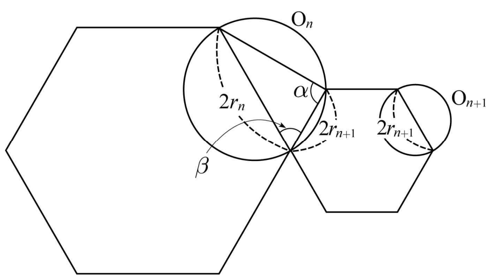
$\overline{AB}:\overline{A_1B_1}=8:\dfrac{8}{3}=3:1$

이므로 닮음비는 $3:1$이다.

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}l_n=l_1+\frac{1}{3}l_1+\left(\frac{1}{3}\right)^2l_1+\cdots=\frac{l_1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{32}{9}\pi}{\frac{2}{3}}=\frac{16}{3}\pi$$

16) [정답] ①

[해설]



그림과 같이 n번째 원 O_n의 지름을 $2r_n$, $n+1$번째 원 O_{n+1}의 지름을 $2r_{n+1}$이라 할 때, α는 지름에 대한 원주각이므로 90° 이고 β는 정육각형의 외각이므로 60° 이다.

따라서 $\dfrac{r_{n+1}}{r_n}=\dfrac{1}{2}$, $r_1=4$이다. $r_n=4\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

그런데 $l_n=2\pi r_n=8\pi\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$\sum_{k=1}^{\infty}l_k=\sum_{k=1}^{\infty}8\pi\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{8\pi}{1-\frac{1}{2}}=16\pi$$

17) [정답] 11

[해설]

$\triangle OA_1A_2=\triangle OO_1A_1+\triangle OO_1A_2+\triangle O_1A_1A_2$

$\dfrac{1}{2}\times2\times4=\dfrac{1}{2}\times r_1\times(6+2\sqrt{5})$ $\therefore r_1=3-\sqrt{5}$

$\triangle OA_2A_3=\triangle OO_2A_2+\triangle OO_2A_3+\triangle O_2A_2A_3$

$\dfrac{1}{2}\times2\times1=\dfrac{1}{2}\times r_2\times(3+\sqrt{5})$

$\therefore$ $r_2=\dfrac{1}{2}(3-\sqrt{5})$

따라서 $r_n=(3-\sqrt{5})\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$이다.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}r_n=6-2\sqrt{5}$이므로 $a+b=11$

18) [정답] ②

[해설]

$\angle A_nA_{n-1}B_n=\dfrac{\pi}{4}$이므로

$\overline{A_nA_{n+1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overline{A_{n-1}A_n}$

따라서 부채꼴 $A_{n-1}A_nB_n$의 중심각의 크기를 θ_n, 반지름의 길이를 r_n이라고 하면

$\theta_n=\dfrac{\pi}{4}$, $r_n=4\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore$ $l_n=r_n\theta_n=\dfrac{\pi}{4}\times4\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}=\pi\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{\pi}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2\pi}{2-\sqrt{2}}=\pi(2+\sqrt{2})$$

19) [정답] ②

[해설]

$\angle A_nA_{n-1}B_n=\dfrac{\pi}{4}$ 이므로

$\overline{A_nA_{n+1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overline{A_{n-1}A_n}$

따라서 부채꼴 $A_{n-1}A_nB_n$의 중심각의 크기를 θ_n, 반지름의 길이를 r_n이라고 하면

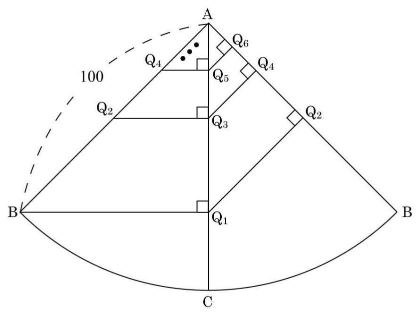
$\theta_n=\dfrac{\pi}{4}$, $r_n=4(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^{n-1}$

$\therefore l_n=r_n\theta_n=\dfrac{\pi}{4}\times4(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^{n-1}=\pi(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^{n-1}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{\pi}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2\pi}{2-\sqrt{2}}=\pi(2+\sqrt{2})$$

20) [정답] 200

[해설]



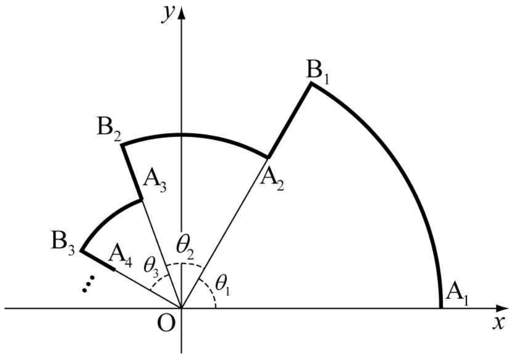
$\angle BAC=45^\circ$ 이므로 $l_1=50\sqrt{2}$, $l_2=50$, $l_3=25\sqrt{2}$, $\cdots$

따라서, $l_n=50\sqrt{2}\times\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$ 이다.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{50\sqrt{2}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=100+100\sqrt{2}$ $\therefore a+b=200$

21) [정답] ③

[해설]



수열 $\{l_n\}$은 $l_1=\frac{\pi}{3}$, 공비가 $\frac{5}{9}$ 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{\frac{\pi}{3}}{1-\frac{5}{9}} = \frac{3}{4}\pi$$

수열 $\{k_n\}$은 $k_1=\frac{1}{3}$, 공비가 $\frac{2}{3}$ 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(l_n+k_n) = \sum_{n=1}^{\infty} l_n + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{k_n} = \frac{3}{4}\pi+1$$

$a=\frac{3}{4}$, $b=1$ 이므로 $a+b=\frac{7}{4}$ 이다.

22) [정답] ②

[해설]

원 A_n의 반지름의 길이를 a_n, 원 O_n의 반지름의 길이를 r_n라 하면

$r_1=3$, $a_n=\frac{\sqrt{3}}{2}r_{n+1}$, $r_n-r_{n+1}=a_n$ 이므로

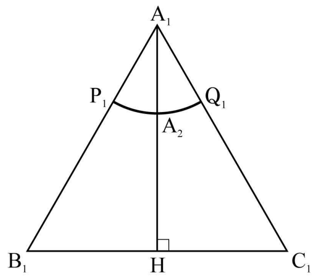
$r_n-r_{n+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}r_{n+1}$, $r_{n+1}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=r_n$

$r_{n+1}=\frac{2}{2+\sqrt{3}}r_n$, $r_{n+1}=2(2-\sqrt{3})r_n$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{6\pi}{1-(4-2\sqrt{3})} = (6+4\sqrt{3})\pi$

23) [정답] ①

[해설]



$\overline{A_1P_1}=\overline{A_1A_2}=2$ 이므로 $l_1=\frac{2}{3}\pi$이다.

한편, 꼭짓점 A_1에서 선분 B_1C_1에 내린 수선의 발을 H로 놓으면 $\overline{A_1H}=3\sqrt{3}$

$\overline{A_2H}=\overline{A_1H}-\overline{A_1A_2}=3\sqrt{3}-2$

그러므로 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 $\frac{2}{3}\pi$이고 공비가 $1-\frac{2\sqrt{3}}{9}$인 등비수열을 이룬다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{\frac{2}{3}\pi}{1-\left(1-\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)} = \sqrt{3}\pi$$

24) [정답] ⑤

[해설]

직선 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$와 x축이 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{6}$ 이다.

$\triangle OO_1A_1$ 은 이등변삼각형이므로 $\angle OO_1A_1=\frac{2}{3}\pi$

따라서 $l_1=\frac{2}{3}\pi$

$\triangle OO_nA_n$ 은 이등변삼각형이므로 $\angle OO_nA_n=\frac{2}{3}\pi$

따라서 $l_n=\frac{2}{3}\pi\cdot l_{n-1}(n\ge 2)$

수열 $\left\{\frac{1}{l_n}\right\}$은 첫째항이 $\frac{3}{2\pi}$ 이고 공비가 $\frac{3}{2\pi}$ 인 등비수열이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l_n} = \frac{\frac{3}{2\pi}}{1-\frac{3}{2\pi}} = \frac{3}{2\pi-3}$

25) [정답] ③

[해설]

수열 $\left\{\overset{\frown}{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}\right\}$은 첫째항이 $3\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$이고 공비가 $\cos\theta$인 등비수열이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\overset{\frown}{\mathrm{A_nB_n}} = \frac{3\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{1-\cos\theta} = 9\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$\cos\theta = \frac{2}{3}$$

$$\overline{\mathrm{B_1C_1}} = 3\sin\theta = \sqrt{5}$$

26) [정답] ①

[해설]

주어진 그림의 두 번째

그림에서 작은 원의 반지름의 길이를 r 라 하면

$\mathrm{AC}=3-r,\ \mathrm{BC}=\frac{r}{2},$

$\mathrm{AB}=\frac{3}{2}$이고 $\angle\mathrm{B}=90°$ 이므로

$(3-r)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{r}{2}\right)^2$; $4(3-r)^2=9+r^2$

; $3r^2-24r+27=0$; $r^2-8r+7=0$;

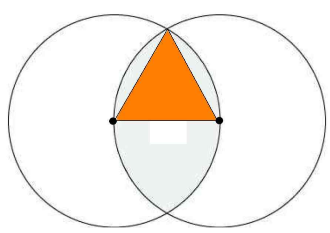
$r=\frac{12\pm\sqrt{63}}{3}=4\pm\sqrt{7}$

$\therefore\ r<3$ 이므로

$r=4-\sqrt{7}$

따라서 큰 원과 작은 원의 닮음비가 $3:4-\sqrt{7}$ 이므로

공비는 $\frac{4-\sqrt{7}}{3}$ 이다. 한편,



오른쪽 그림의 삼각형에서 세 변의 길이는 모두 3 이다.

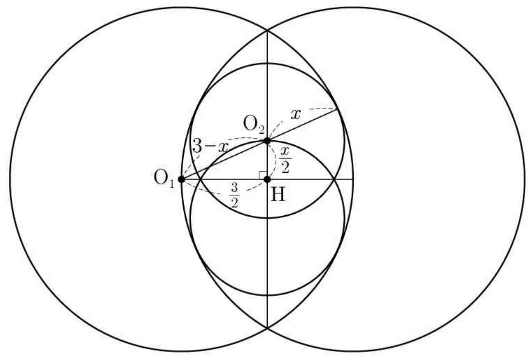
따라서 정삼각형이므로 도형 F_1 의 둘레의 길이

$l_1=\left(3\times\frac{\pi}{3}\right)\times4=4\pi$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{4\pi}{1-\frac{4-\sqrt{7}}{3}}=\frac{12\pi}{-1+\sqrt{7}}=2\pi(1+\sqrt{7})$$

[별해]

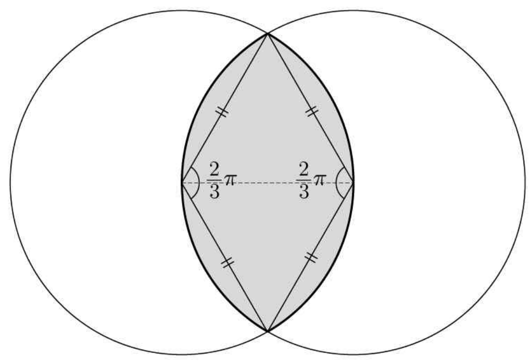
도형 F_1의 두 원의 중심을 연결하는 선분과 도형 F_2의 두 원의 중심을 연결하는 선분은 서로 다른 것을 수직이등분한다.



도형 F_2의 반지름의 길이를 x라 하면 위 그림의 직각삼각형 $\mathrm{O_1O_2H}$에서 $(3-x)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2$, $3x^2-24x+27=0$

$x^2-8x+9=0 \quad \therefore\ x=4-\sqrt{7}\ (\because\ x<3)$

따라서 서로 닮음인 도형 F_1과 F_2의 닮음비는 $\frac{4-\sqrt{7}}{3}$이다.



위 그림에서 $l_1=2\times\left(3\times\frac{2}{3}\pi\right)=4\pi$이므로

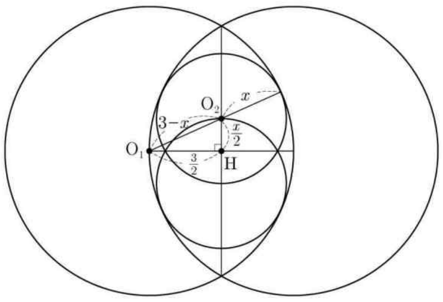
수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 4π이고 공비가 $\frac{4-\sqrt{7}}{3}$인 등비수열이다.

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{4\pi}{1-\frac{4-\sqrt{7}}{3}}=2\pi(1+\sqrt{7})$$

27) [정답] ①

[해설]

도형 F_1의 두 원의 중심을 연결하는 선분과 도형 F_2의 두 원의 중심을 연결하는 선분은 서로 다른 것을 수직이등분한다.



도형 F_2의 반지름의 길이를 x라 하면 위 그림의 직각삼각형 O_1O_2H에서

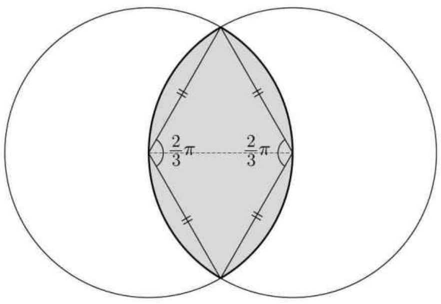
$$(3-x)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$3x^2-24x+27=0$$

$$x^2-8x+9=0$$

$$\therefore\ x=4-\sqrt{7}\,(\because x<3)$$

따라서 서로 닮음인 도형 F_1과 F_2의 닮음비는 $\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}$이다.



위 그림에서 $l_1=2\times\left(3\times\dfrac{2}{3}\pi\right)=4\pi$이므로

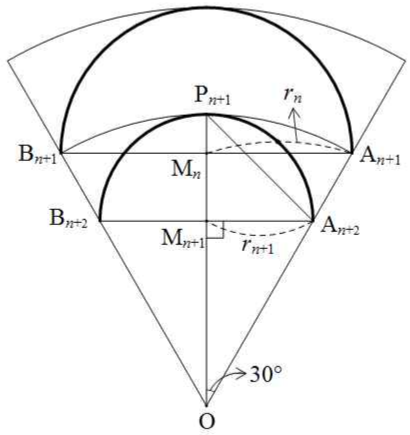
수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 4π이고 공비가 $\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}$인 등비수열이다.

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{4\pi}{1-\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}}=2\pi(1+\sqrt{7})$$

28) [정답] ①

[해설]

그림과 같이 n번째 얻은 반원의 반지름의 길이를 r_n, 선분 $A_{n+1}B_{n+1}$의 중점을 M_n이라 하자.



$$\overline{OP_{n+1}}=\overline{OM_{n+1}}+\overline{M_{n+1}P_{n+1}}=\sqrt{3}r_{n+1}+r_{n+1}=2r_n$$

$\therefore\ r_{n+1}=\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}r_n=(\sqrt{3}-1)r_n$, $r_1=\sqrt{3}-1$이므로

$r_n=(\sqrt{3}-1)^n$이고 $l_n=6\pi(\sqrt{3}-1)^n$이다. 따라서 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 $6(\sqrt{3}-1)\pi$이고 공비가 $(\sqrt{3}-1)$인 등비수열이므로

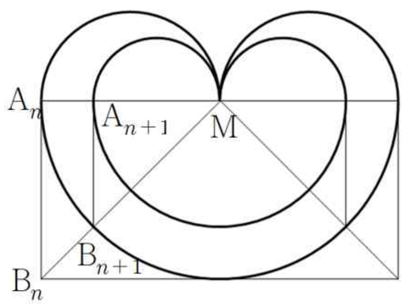
$$\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{6(\sqrt{3}-1)\pi}{1-(\sqrt{3}-1)}=6(1+\sqrt{3})\pi\text{이다.}$$

29) [정답] ④

[해설]

ⅰ) $l_1=\dfrac{1}{2}\times2\pi+2\times\dfrac{1}{2}\times\pi=2\pi$

ⅱ)



위 그림에서 $\overline{A_nM}=\overline{MB_{n+1}}$이고 삼각형 $A_{n+1}B_{n+1}M$은 직각이등변삼각형이므로

$\overline{A_{n+1}M}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overline{MB_{n+1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overline{A_nM}$이다.

$$\therefore l_{n+1}=\pi\times\overline{A_{n+1}M}+2\times\pi\times\frac{1}{2}\overline{A_{n+1}M}$$

$$=2\pi\times\overline{A_{n+1}M}=2\pi\times\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{A_nM}=\frac{\sqrt{2}}{2}l_n$$

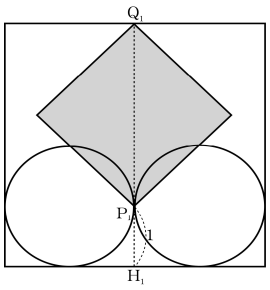
ⅰ), ⅱ)에 의하여 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 2π, 공비가 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$인

등비수열이다. 따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \dfrac{2\pi}{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = (4+2\sqrt{2})\pi$

30) [정답] ①

[해설]

정사각형 R_1 의 한 변의 길이를 구하기 위해 점 P_1 에서 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형의 한 변에 내린 수선의 발을 H_1 이라 하면, $\overline{\mathrm{P_1H_1}}=1$ 이므로 $\overline{\mathrm{P_1Q_1}}=3$ 이다.



이때, 피타고라스의 정리에 의해 정사각형 R_1 의 한 변의 길이는 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ 이다.

(최초의 정사각형의 한 변의 길이) : (정사각형 R_1 의 한 변의 길이) $=4 : \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ 이므로

수열 $\{l_n\}$ 의 공비는 $\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$, 정사각형 R_1 의 한 변의 길이는 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ 이므로 $l_1 = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ 이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} l_k = \dfrac{\dfrac{3\sqrt{2}}{2}}{1-\dfrac{3\sqrt{2}}{8}} = \dfrac{12\sqrt{2}}{8-3\sqrt{2}}$

$= \dfrac{12(3+4\sqrt{2})}{23}$

31) [정답] ②

[해설]

$\overline{\mathrm{OB_1}}=\overline{\mathrm{A_1B_1}}=6$이므로

$S_1 = 6^2 - \dfrac{1}{4}\pi 6^2 = 6^2\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\overline{\mathrm{B_1B_2}}=\overline{\mathrm{A_2B_2}}=\dfrac{6}{2}$이므로

$S_2 = \left(\dfrac{6}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}\pi\left(\dfrac{6}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{6}{2}\right)^2\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\overline{\mathrm{B_2B_3}}=\overline{\mathrm{A_3B_3}}=\dfrac{6}{4}$이므로

$S_3 = \left(\dfrac{6}{4}\right)^2 - \dfrac{1}{4}\pi\left(\dfrac{6}{4}\right)^2 = \left(\dfrac{6}{4}\right)^2\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)$

⋮

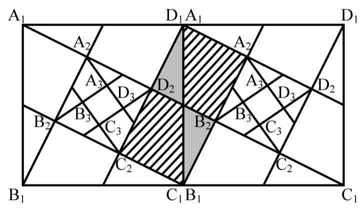
수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $6^2\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)$이고, 공비가 $\dfrac{1}{4}$인

등비수열이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \dfrac{6^2\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)}{1-\dfrac{1}{4}} = 12(4-\pi)$

32) [정답] 125

[해설]

아래 그림과 같이 생각하면 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$ 의 빗금친 부분과 어두운 부분의 넓이의 합은 정사각형$\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$ 의 넓이와 같다.



따라서 정사각형$\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$ 의 넓이는 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$ 의 넓이의 $\dfrac{1}{5}$ 이다. 이와 같이 생각하면

$S_{n+1} = \dfrac{1}{5}S_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$, $S_1 = 1$ 이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{5}} = \dfrac{5}{4}$ $\therefore 100\sum_{n=1}^{\infty} S_n = 100 \times \dfrac{5}{4} = 125$

33) [정답] ③

[해설]

정삼각형 $\mathrm{B_1BA_1}$을 S_1, 정삼각형 $\mathrm{B_2B_1A_3}$을 S_2라 하면

정삼각형 S_1 의 한 변의 길이는 $\dfrac{1}{3}$ 이므로

S_1 의 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{36}$ 이다.

또, 정삼각형 S_1 의 한 변의 길이의 2배가 정삼각형 S_2 의 한

변의 길이의 3배와 일치하므로 S_1, S_2의 닮음비는 3 : 2이고, S_1, S_2의 넓이의 비는 9 : 4이다.

따라서 구하는 넓이는 첫째항이 $\frac{\sqrt{3}}{36}\times 3$,

공비가 $\frac{4}{9}$인 무한등비급수의 합이므로

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{36}\times 3}{1-\frac{4}{9}}=\frac{3\sqrt{3}}{20}$$

34) [정답] ②

[해설]

주어진 조건과 같은 방법으로 원 C_n을 3등분하여 구한 원 C_{n+1}, D_{n+1}로부터 구한 면적을 s_{n+1}이라 하면

$$s_{n+1}=\pi\left(\overline{OQ_{n+1}}^2-\overline{OP_{n+1}}^2\right)$$

$$=\pi\left\{\left(\frac{\overline{OQ_n}}{3}\right)^2-\left(\frac{\overline{OP_n}}{3}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{\pi}{9}\left(\overline{OQ_n}^2-\overline{OP_n}^2\right)$$

$$=\frac{\pi}{9}s_n$$

또한,

$$s_1=\pi\left(\frac{2}{3}r_o\right)^2-\pi\left(\frac{1}{3}r_o\right)^2=\frac{1}{3}\pi r_0^2$$

이므로 수열 $\{s_n\}$은 초항이 $\frac{1}{3}\pi r_0^2$, 공비가 $\frac{1}{9}$인 등비수열이다.

따라서,

$$\sum_{n=1}^{\infty}s_n=\frac{\frac{1}{3}\pi r_0^2}{1-\frac{1}{9}}=\frac{3}{8}\pi r_0^2$$

35) [정답] ①

[해설]

$\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=1$이므로 $\overline{AC}=\sqrt{5}$이고,

$\triangle ACB \backsim \triangle ABP_1$이므로 $\overline{AB}:\overline{AP_1}=\overline{AC}:\overline{AB}$

$2:\overline{AP_1}=\sqrt{5}:2$ $\therefore \overline{AP_1}=\frac{4}{\sqrt{5}}$

따라서 $\triangle ACB$와 $\triangle ABP_1$의 닮음비는 $1:\frac{2}{\sqrt{5}}$이므로 넓이의 비는 $1:\frac{4}{5}$이다. 같은 방법으로 $\triangle AP_{n-1}P_n \backsim \triangle AP_nP_{n+1}$이므로 $\triangle AP_{n-1}P_n$과 $\triangle AP_nP_{n+1}$의 넓이의 비는 $1:\frac{4}{5}$이다.

$$\therefore S_1=\frac{4}{5}\times(\triangle ABC\text{의 넓이})=\frac{4}{5},\ S_2=\frac{4}{5}S_1=\left(\frac{4}{5}\right)^2$$

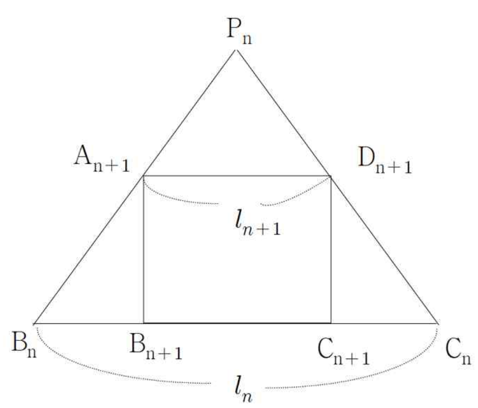
$$,\ S_3=\frac{4}{5}S_2=\left(\frac{4}{5}\right)^3$$

$\vdots$

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}=4$$

36) [정답] ⑤

[해설]



$\triangle P_nB_nC_n$의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}l_n=l_{n+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}l_{n+1}$이므로

$$\frac{l_{n+1}}{l_n}=\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=2\sqrt{3}-3$$

따라서 첫째항은 16이고, 공비는 $(2\sqrt{3}-3)^2$인 무한등비급수의 합이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{16}{1-(2\sqrt{3}-3)^2}=6\sqrt{3}+10$$

37) [정답] ⑤

[해설]

삼각형의 무게중심은 중선을

꼭지점으로부터 2 : 1로 내분한다.

따라서 한 변의 길이가a인

정사각형 A_{n-1}내부에 들어 있는

작은 정사각형A_n의 한 변의 길이는

대각선 길이의 $\frac{1}{3}$이므로 $\frac{a\sqrt{2}}{3}$이다.

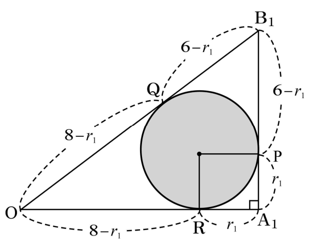
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = S_1 + S_2 + S_3 + \cdots = 3^2 + 2 + \frac{2}{9} + \cdots$$

$$= \frac{9}{1-\frac{2}{9}} = \frac{81}{7}$$

38) [정답] ①

[해설]

그림과 같이
직각삼각형$\triangle OA_1B_1$에서 C_1의
반지름을 r_1이라 하고, 내접원이
$\triangle OA_1B_1$와 만나는 접점을 각각 P,
Q, R라 하자.



$\overline{A_1P} = \overline{A_1R} = r_1$, $\overline{B_1P} = \overline{B_1Q} = 6 - r_1$, $\overline{OP} = \overline{OQ} = 8 - r_1$

$\therefore$ $\overline{OB_1} = \overline{OQ} + \overline{QB_1} = 8 - r_1 + 6 - r_1 = 10$ $\therefore$ $r_1 = 2$

원 C_2의 반지름을 r_2라 하면

$\triangle OA_1B_1 \backsim \triangle OA_2B_2$이고 $\overline{OA_1} : \overline{OA_2} = 8 : 4$

이므로 $r_1 : r_2 = 2 : 1$ 즉, $r_2 = \frac{1}{2}r_1$

마찬가지 방법으로 원 C_n의 반지름을 r_n이라 하면,

$r_n = \frac{1}{2}r_{n-1}$이 성립한다.

$\therefore$ $r_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $\therefore$ $S_n = \pi \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

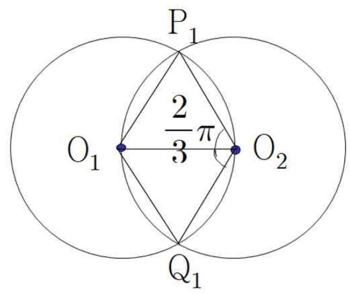
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{4\pi}{1-\frac{1}{4}} = \frac{16\pi}{3}$$

39) [정답] ②

[해설]

아래 그림에서 $\triangle O_1O_2P_1$, $\triangle O_1Q_1O_2$는 정삼각형이므로

$\angle P_1O_2Q_1 = \frac{2}{3}\pi$

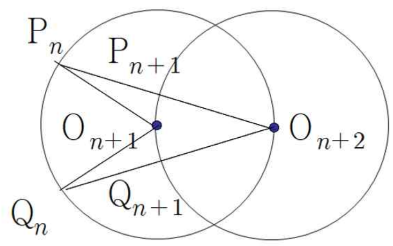


또, 아래 그림에서 중심이 O_n인 원에서

호 P_nQ_n에 대한 중심각은 $\angle P_nO_{n+1}Q_n$,

원주각은 $\angle P_{n+1}O_{n+2}Q_{n+1}$이므로

$\angle P_{n+1}O_{n+2}Q_{n+1} = \frac{1}{2} \angle P_nO_{n+1}Q_n$



$\therefore \angle P_nO_{n+1}Q_n = \frac{2}{3}\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

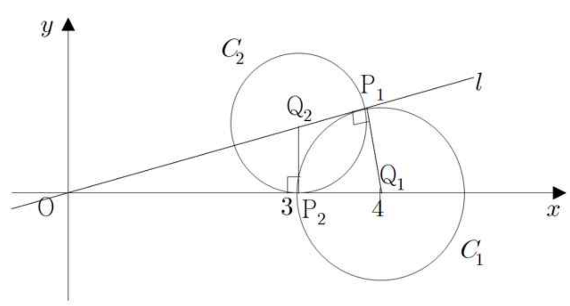
따라서,

$$S_n = \frac{1}{2} \times 1^2 \times \left\{\frac{2}{3}\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} = \frac{\pi}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

이므로 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{\pi}{3}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\pi$

40) [정답] ③

[해설]



원C_1, C_2의 중심을 각각 Q_1, Q_2라 하자.

$\triangle OP_1Q_1$에서 $\overline{OP_1}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$

이고, $\triangle OP_1Q_1 \backsim \triangle OP_2Q_2$이므로

$\overline{OP_1} : \overline{P_1Q_1} = \overline{OP_2} : \overline{P_2Q_2}$

$\sqrt{15} : 1 = 3 : \overline{P_2Q_2}$

$\therefore \overline{P_2Q_2}=\dfrac{3}{\sqrt{15}}$

따라서, $\triangle OP_1Q_1$과 $\triangle OP_2Q_2$의 닮음비는

$\overline{P_1Q_1} : \overline{P_2Q_2} = 1 : \dfrac{3}{\sqrt{15}}$

이므로 넓이의 비는 $1 : \dfrac{9}{15} = 1 : \dfrac{3}{5}$ 이다.

원 C_1의 넓이는 $S_1=\pi$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = S_1+S_2+S_3+\cdots$$

$$=S_1+\frac{3}{5}S_1+\left(\frac{3}{5}\right)^2 S_1+\cdots$$

$$=\frac{S_1}{1-\frac{3}{5}}=\frac{5}{2}S_1=\frac{5}{2}\pi$$

41) [정답] ②

[해설]

원 C_1, C_2의 중심을 각각 Q_1, Q_2 라 하자. $\triangle OP_1Q_1$에서 $\overline{OP_1}=\sqrt{15}$이고 $\triangle OP_1Q_1$와 $\triangle OP_2Q_2$ 이 닮음이므로

$\overline{OP_1}: \overline{P_1Q_1}=\overline{OP_2}: \overline{P_2Q_2}$ 이므로 $\overline{P_2Q_2}=\dfrac{3}{\sqrt{15}}$

닮음비: $1:\dfrac{3}{\sqrt{15}}$ 넓이의 비: $1:\dfrac{3}{5}$

$S_1=\pi$ 이므로,

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\pi}{1-\frac{3}{5}}=\frac{5}{2}\pi$$

42) [정답] ①

[해설]

$$S_1=\pi-\left\{\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\right\}=\frac{\pi+1}{2}$$

원 C_n의 지름의 길이를 l_n이라 하면

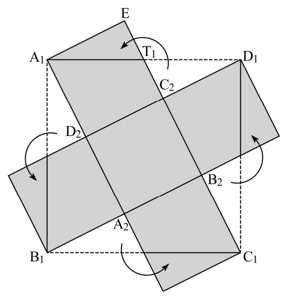
$l_{n+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}l_n$이므로 $S_{n+1}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 S_n=\dfrac{1}{2}S_n$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{\pi+1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\pi+1$$

43) [정답] 125

[해설]

그림에서 직각삼각형 $\mathrm{A_1ET_1}$과 직각삼각형 $\mathrm{D_1C_2T_1}$이 합동이므로 직각삼각형 $\mathrm{A_1D_2D_1}$의 넓이와 정사각형 $\mathrm{A_1D_2C_2E}$의 넓이는 같다.



마찬가지로 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$의 넓이는 합동인 5개의 정사각형의 넓이의 합과 같음을 알 수 있다.

따라서 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$의 넓이는 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$의 넓이의 $\dfrac{1}{5}$이므로 정사각형 $\mathrm{A}_n B_n C_n D_n$의 넓이 S_n은 첫째항이 100이고 공비가 $\dfrac{1}{5}$인 등비수열을 이룬다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} 100\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{100}{1-\frac{1}{5}}=125$$

44) [정답] ①

[해설]

$\overline{\mathrm{DP_1}}=2$, $\triangle \mathrm{DP_1D_1} \backsim \triangle \mathrm{BCD_1}$이므로 $\overline{\mathrm{DD_1}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

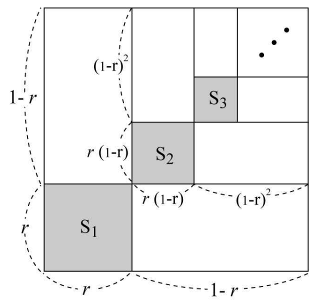
$\therefore S_1=\dfrac{8}{3}$

한편, 정사각형 $\mathrm{BC_1D_1A_1}$의 한 변의 길이는 $\dfrac{8}{3}$이므로 각 정사각형의 넓이는 공비가 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}$인 등비수열을 이룬다.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{24}{5}$

45) [정답] 10

[해설]



색칠한 부분의 넓이를 차례대로 $S_k(k=1,2,3\cdots)$

이라고 하면 $S_1 = r^2$, $S_2 = r^2(1-r)^2$, $S_3 = r^2(1-r)^4 \cdots$

$\sum_{k=1}^{\infty} S_k = \frac{r^2}{1-(1-r)^2} = \frac{r}{2-r} = \frac{1}{7}$

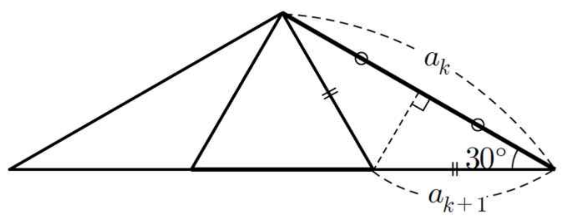
$\therefore r = \frac{1}{4}$ 이므로 $m:n = r:1-r = 1:3$

따라서 $m^2+n^2 = 10$

46) [정답] ⑤

[해설]

k번째 만들어진 정육각형 H_k와 $k+1$번째 만들어진 정육각형 H_{k+1}의 한 변의 길이를 각각 a_k, a_{k+1}이라 하면



$a_{k+1}\cos 30^\circ = \frac{1}{2}a_k \quad \therefore a_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}a_k$

길이의 비가 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 이므로 넓이의 비는 $\frac{1}{3}$이고 첫 번째 과정에서 생기는 6개의 정삼각형의 넓이의 합은 $6\times\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3})^2 = \frac{9}{2}\sqrt{3}$ 이다. 모든 정삼각형의 넓이의 합은 첫째항이 $\frac{9}{2}\sqrt{3}$이고, 공비가 $\frac{1}{3}$인 무한 등비급수의 합이므로 $\therefore \frac{\frac{9}{2}\sqrt{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{27}{4}\sqrt{3}$

47) [정답] ④

[해설]

한 변의 길이가 a인 정삼각형의 높이와 넓이는 각각 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$, $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$이므로, 한 변의 길이가 2인 정삼각형의 높이는 $\sqrt{3}$이고 넓이는 $\sqrt{3}$이다. 삼각형 A_1의 높이는 내접원의 지름과 같으므로 내접원의 반지름을 r라 하면,

$\frac{1}{2}(2+2+2)r = \sqrt{3}$이므로 $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$이고 내접원의 지름은 $\frac{2}{3}\sqrt{3}$이다. 삼각형의 한 변의 높이가 $\frac{2}{3}$배만큼 축소되므로 넓이는 $\left(\frac{2}{3}\right)^2$배만큼 축소된다. 삼각형 A_1의 한 변의 길이는 $\frac{4}{3}$이므로 $S_1 = \frac{4}{9}\sqrt{3}$이고 공비가 $\frac{4}{9}$인 무한등비급수이다.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{4}{9}\sqrt{3}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{4}{5}\sqrt{3}$

48) [정답] ④

[해설]

원 O_2의 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{\mathrm{A_1C_2}} + \overline{\mathrm{A_2C_1}} - \overline{\mathrm{A_2C_2}} = \overline{\mathrm{A_1C_1}}$

이므로 $3\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2r = 6 \ \therefore \ r = 3\sqrt{2}-3$

따라서 반복되어지는 도형의 닮음비는

$3 : (3\sqrt{2}-3) = 1 : (\sqrt{2}-1)$

이므로 넓이의 비는 $1 : (\sqrt{2}-1)^2 = 1 : (3-2\sqrt{2})$

그러므로 수열 $\{S_n + T_n\}$은 공비가 $3-2\sqrt{2}$인 등비수열이다.
이 때 첫째항 $S_1 + T_1$의 값은

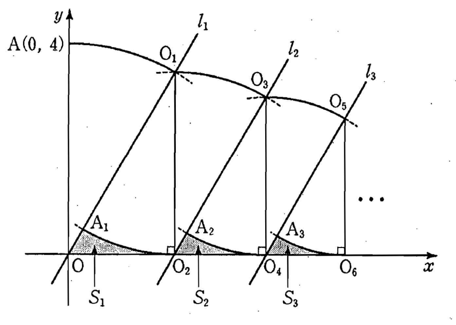
$\pi \cdot 3^2 - 2\times\left\{\frac{1}{2}\cdot(3\sqrt{2})^2\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cdot(3\sqrt{2})^2\right\} = 18$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}(S_n + T_n) = \frac{18}{1-(3-2\sqrt{2})} = \frac{18}{2\sqrt{2}-2}$

$=\dfrac{9}{\sqrt{2}-1}=9(\sqrt{2}+1)$

49) [정답] ②

[해설]



$S_1=\triangle OO_1O_2-$부채꼴$A_1O_1O_2$

$=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2-\dfrac{1}{2}\times(2\sqrt{3})^2\times\dfrac{\pi}{6}=2\sqrt{3}-\pi$

$S_2=\triangle O_2O_3O_4-$부채꼴$A_2O_3O_4$

$=\dfrac{1}{2}\times 3\times\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\times 9\times\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3}{4}(2\sqrt{3}-\pi)$

$S_3=\triangle O_4O_5O_6-$부채꼴$A_3O_5O_6$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{3\sqrt{3}}{2})^2\times\dfrac{\pi}{6}$

$=(\dfrac{3}{4})^2(2\sqrt{3}-\pi)$

S_1, S_2, S_3에 의해서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $2\sqrt{3}-\pi$이고 공비가 $\dfrac{3}{4}$인 등비수열이므로

무한등비급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\dfrac{2\sqrt{3}-\pi}{1-\dfrac{3}{4}}=8\sqrt{3}-4\pi$

50) [정답] ①

[해설]

사각형 $B_2P_1C_1P_2$에서 $\overline{P_1C_1}=\dfrac{1}{3}\overline{B_1C_1}=2\sqrt{3}$

$\overline{C_1C_2}=\dfrac{1}{2}\overline{AC_1}=3$이므로 $S_1=\overline{P_1C_1}\cdot\overline{C_1C_2}=6\sqrt{3}$

모든 자연수 n에 대하여 $\overline{P_{n+1}C_{n+1}}=\dfrac{1}{2}\overline{P_nC_n}$이므로

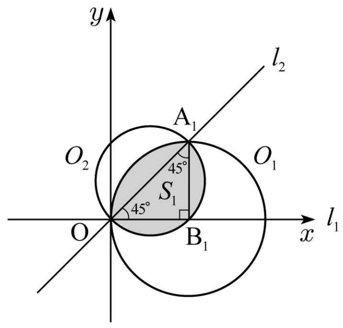
$S_{n+1}=\dfrac{1}{4}S_n$ $\therefore$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\dfrac{6\sqrt{3}}{1-\dfrac{1}{4}}=8\sqrt{3}$

51) [정답] ④

[해설]

원 O_1과 직선 l_2의 한 교점을 A_1, 원 O_1의 중심을 $B_1(3, 0)$이라 하면 삼각형 A_1OB_1은 직각이등변삼각형이므로 $\overline{OA_1}=3\sqrt{2}$

$S_1=\dfrac{1}{2}\pi\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}\pi-\dfrac{9}{2}=\dfrac{9}{2}(\pi-1)$



같은 방법으로 원 O_2와 직선 l_3의 한 교점을 A_2, 원 O_2의 중심을 B_2라 하면 삼각형 A_2OB_2는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{OA_2}=3$

$S_2=\dfrac{1}{2}\pi\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}(\pi-1)$

…

$S_n=\dfrac{9}{2^n}(\pi-1)$

수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{9}{2}(\pi-1)$, 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열이므로 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\dfrac{\dfrac{9}{2}(\pi-1)}{1-\dfrac{1}{2}}=9(\pi-1)$

52) [정답] ②

[해설]

정사각형 $A_1B_1M_1M_2$에서

$\triangle A_1M_1B_2$

$=\square A_1B_1M_1M_2-(\triangle A_1B_1M_1+\triangle B_2M_1M_2)$

$=1-\left(1\times1\times\frac{1}{2}+1\times1\times\tan30°\times\frac{1}{2}\right)$

$=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$

$\therefore\ S_1=2\triangle A_1M_1B_2$

$=2\times\frac{3-\sqrt{3}}{6}=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$

이때, $\overline{A_1B_1}:\overline{A_2B_2}=1:\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}:1$이므로

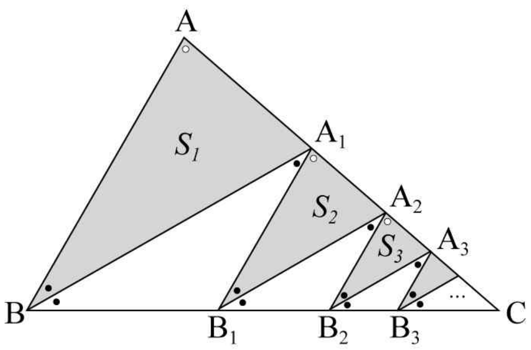
삼각형 $A_1M_1B_2$와 삼각형 $A_2M_2B_3$의 넓이의 비는 $3:1$이다.

즉, 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$이고, 공비가 $\frac{1}{3}$인

무한등비수열이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$

53) [정답] 19

[해설]



$\overline{AB}\,//\,\overline{A_nB_n}$이므로 $\triangle A_{n-1}B_{n-1}A_n \backsim \triangle A_nB_nA_{n+1}$이다.
……①

이때, $\triangle BB_1A_1$은 이등변삼각형이므로

$\overline{BB_1}=\overline{A_1B_1}=x$라 하면 $4:6=x:(6-x)$이므로 $x=\frac{12}{5}$이다.
……②

①, ②에 의하여 $\triangle A_{n-1}B_{n-1}A_n$, $\triangle A_nB_nA_{n+1}$의 닮음비는

$4:\frac{12}{5}=1:\frac{3}{5}$이므로 $S_n:S_{n+1}=1:\left(\frac{3}{5}\right)^2$이다.

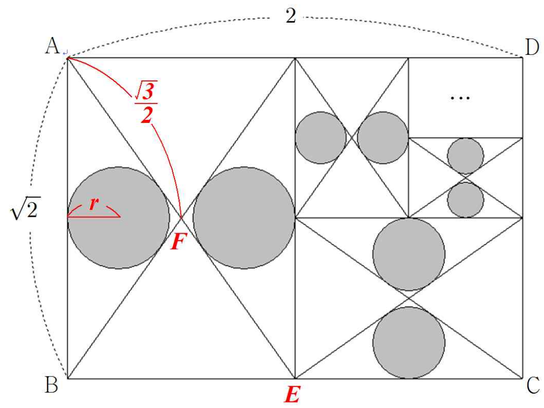
$\overline{A_1B}=2\times4\times\frac{3}{5}\times\cos\frac{\pi}{6}=\frac{12\sqrt{3}}{5}$

$S_1=\frac{1}{2}\times4\times\frac{12\sqrt{3}}{5}\times\sin\frac{\pi}{6}=\frac{12\sqrt{3}}{5}$

$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{S_1}{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{15\sqrt{3}}{4}\quad\therefore p+q=19$

54) [정답] ①

[해설]



대각선 $\overline{AE}=\sqrt{3}$ 이고, 삼각형 ABF의 넓이는

$\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)r=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}$

$r=\frac{1}{\sqrt{6}+2}=\frac{\sqrt{6}-2}{2}$

그리면, $S_1=2\cdot\pi r^2=2\cdot\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{6}-2}{2}\right)^2=\pi(5-2\sqrt{6})$

그리고, 직사각형들의 닮음비가 $\sqrt{2}:1$이므로, 원의 반지름의 비도 $r_n\ ;\ r_{n+1}=\sqrt{2}:1$

따라서, 넓이비 $S_n:S_{n+1}=2:1$

$\therefore\ \frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\pi(5-2\sqrt{6})}{1-\frac{1}{2}}=2\pi(5-2\sqrt{6})$

55) [정답] ⑤

[해설]

사각형의 각 변의 중점을 연결하여 만든 사각형은 원래 사각형의 넓이의 $\frac{1}{2}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{1}{2}\square APTS}{1-\frac{1}{2}}=\square APTS$

마찬가지 방법으로

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \square \mathrm{PBQT},\ \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \square \mathrm{TQCR},\ \sum_{n=1}^{\infty} d_n = \square \mathrm{STRD}$$

그림에서 $\overline{\mathrm{AS}} = \overline{\mathrm{AP}} = 1$, $\overline{\mathrm{SD}} = \overline{\mathrm{PB}} = \sqrt{3}$ 이므로

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n + c_n - d_n) = (1+3) - (\sqrt{3} + \sqrt{3}) = 4 - 2\sqrt{3}$$

$\therefore\ p = 4,\ q = -2$

$\therefore\ p + q = 2$

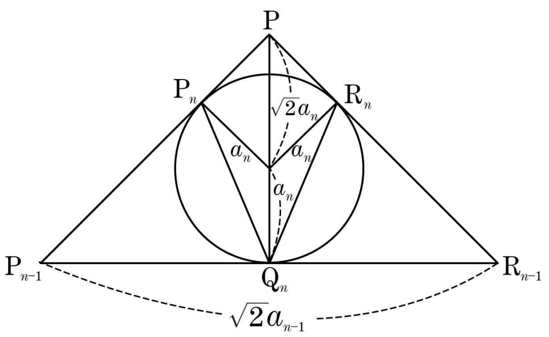
56) [정답] ④

[해설]

삼각형 PQR 의 내접원의 반지름을 a_1이라

하면 $\sqrt{2}a_1 + a_1 = \sqrt{2}$ 에서 $a_1 = 2 - \sqrt{2}$ 이고

$$S_1 = \frac{1}{2} \times (2\sqrt{2} - 2) \times 1 = \sqrt{2} - 1$$



삼각형 $\mathrm{PP}_{n-1}R_{n-1}$의 내접원의 반지름을 a_n이라 하면

$$\sqrt{2}a_n + a_n = \frac{\sqrt{2}a_{n-1}}{2} \quad \therefore\ a_n = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} a_{n-1}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 이 공비가 $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$ 인 등비수열을

이루므로 수열 $\{S_n\}$은 공비가 $\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}$ 인

등비수열을 이룬다. $\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\sqrt{2}-1}{1 - \frac{3-2\sqrt{2}}{2}} = \frac{6-2\sqrt{2}}{7}$

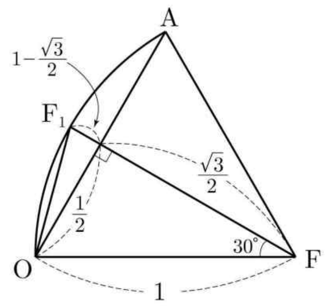
$\therefore\ p + q = \dfrac{4}{7}$

57) [정답] ④

[해설]

F_1이 호 OA를 이등분하므로

$\overline{\mathrm{OF}_1}$은 반지름의 길이가 1이고 중심각이 30° 인 부채꼴의 현의 길이이다.



위 그림에서

$$\overline{\mathrm{OF}_1}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 2 - \sqrt{3}$$

$\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{E}_1} = \overline{\mathrm{OF}_1}$이므로

$S_1 = 6 \times \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times (2 - \sqrt{3}) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}(2 - \sqrt{3})$이다.

정육각형 ABCDEF에서 정육각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1E_1F_1}$를 만드는

과정을 반복하고 정육각형 ABCDEF와 정육각형

$\mathrm{A_1B_1C_1D_1E_1F_1}$의 넓이의 비가

$\overline{\mathrm{AF}}^2 : \overline{\mathrm{A_1F_1}}^2 = 1 : 2 - \sqrt{3}$이므로

수열 $\{S_n\}$은 공비가 $2 - \sqrt{3}$인 등비수열이다.

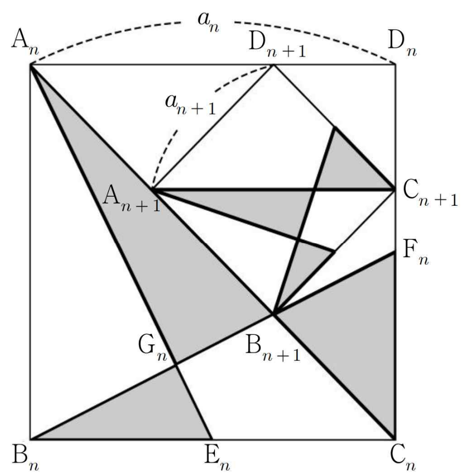
$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}(2 - \sqrt{3})}{1 - (2 - \sqrt{3})} = \frac{9 - 3\sqrt{3}}{4}$$

58) [정답] ④

[해설]

그림과 같이 n번째 정사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$의 한 변의 길이를

a_n이라 하자.



$3a_{n+1} = \sqrt{2}a_n$, $a_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}a_n$이므로 $S_{n+1} = \dfrac{2}{9}S_n$

$\triangle \mathrm{A_1B_1E_1} \backsim \triangle \mathrm{B_1G_1E_1}$에서 $\overline{\mathrm{A_1E_1}} : \overline{\mathrm{B_1E_1}} = \sqrt{5} : 1$이므로

$\triangle \mathrm{A_1B_1E_1} : \triangle \mathrm{B_1G_1E_1} = 5 : 1$

$\therefore \triangle \mathrm{B_1G_1E_1} = \frac{1}{5}$

점 $\mathrm{B_2}$는 $\triangle \mathrm{B_1C_1D_1}$의 무게중심이므로

$\triangle \mathrm{C_1F_1B_2} = \frac{1}{6}\triangle \mathrm{B_1C_1D_1} = \frac{1}{3}$

$\triangle \mathrm{A_1E_1C_1}$과 $\triangle \mathrm{B_1C_1F_1}$의 공통부분이 $\square \mathrm{E_1C_1B_2G_1}$이고,
$\triangle \mathrm{A_1E_1C_1} = \triangle \mathrm{B_1C_1F_1}$이므로

$\triangle \mathrm{A_1G_1B_2} = \triangle \mathrm{B_1E_1G_1} + \triangle \mathrm{C_1F_1B_2} = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{8}{15}$

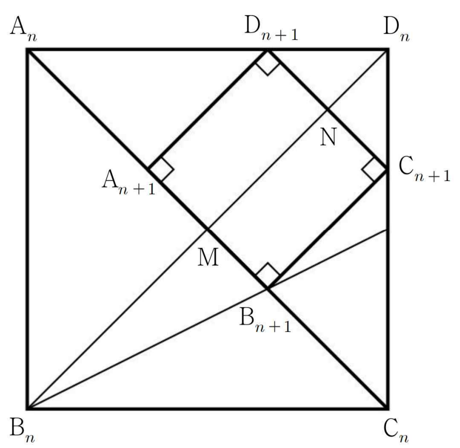
$S_1 = \triangle \mathrm{A_1G_1B_2} + \triangle \mathrm{B_1E_1G_1} + \triangle \mathrm{C_1F_1B_2}$

$= 2\triangle \mathrm{A_1G_1B_2} = \frac{16}{15}$

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{16}{15}$이고 공비가 $\frac{2}{9}$인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{16}{15}}{1-\frac{2}{9}} = \frac{48}{35}$이다.

[참고] $\square \mathrm{A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}}$은 정사각형이다.



정사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$에서 두 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n$, $\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}$이 선분 $\mathrm{B}_n\mathrm{D}_n$과 만나는 점을 각각 M, N이라 하자.

$\triangle \mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_n\mathrm{C}_{n+1}$이 직각이등변삼각형이므로

$\overline{\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}} = \overline{\mathrm{C}_n\mathrm{B}_{n+1}}$이고

점 B_{n+1}은 $\triangle \mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$의 무게중심이므로

$\overline{\mathrm{C}_n\mathrm{B}_{n+1}} = 2\overline{\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{M}}$

$\therefore \overline{\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}} = 2\overline{\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{M}} \cdots\cdots$ ㉠

$\angle \mathrm{B}_{n+1} = \angle \mathrm{C}_{n+1} = 90^\circ$, $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n} \perp \overline{\mathrm{B}_n\mathrm{D}_n}$로

$\square \mathrm{MB}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{N}$이 직사각형이므로

$\overline{\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{M}} = \overline{\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{N}}$,

$\triangle \mathrm{NC}_{n+1}\mathrm{D}_n$과 $\triangle \mathrm{ND}_n\mathrm{D}_{n+1}$이 직각이등변삼각형이므로

$\overline{\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{N}} = \overline{\mathrm{ND}_{n+1}} \cdots\cdots$ ㉡

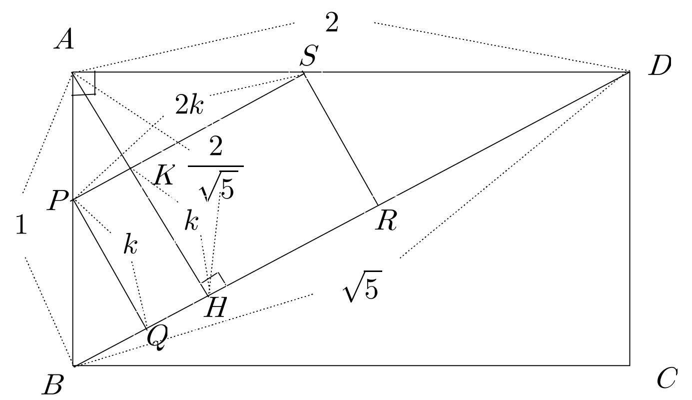
㉠, ㉡에 의하여 $\overline{\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}} = \overline{\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}}$

따라서 $\square \mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}$은 정사각형

59) [정답] ④

[해설]

아래 그림과 같이 삼각형 ABD에 내접하는 직사각형을 $PQRS$라고 할 때,



주어진 조건에 의해 직사각형의 두 변의 길이가 1:2이므로 $\overline{PQ} = k$, $\overline{PS} = 2k$가 된다. 직각삼각형 ABD에서 $\overline{BD} = \sqrt{5}$

A에서 $\overline{BD}$에 내린 수선의 발을 H라 두면

삼각형 ABD의 넓이는 $\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{BD}\times\overline{AH}$

$\overline{AB}\times\overline{AD} = \overline{BD}\times\overline{AH} \Leftrightarrow 1\times 2 = \sqrt{5}\times\overline{AH}$ $\therefore$ $\overline{AH} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\overline{AH}$와 $\overline{PS}$의 교점을 K라 하면 $\overline{AK} = \frac{2}{\sqrt{5}} - k$

삼각형 ABD와 삼각형 APS는 닮음이므로

$\overline{PS} : \overline{BD} = \overline{AK} : \overline{AH}$

$2k : \sqrt{5} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}} - k\right) : \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow k = \frac{2\sqrt{5}}{9}$

그러므로 직사각형 $ABCD$의 짧은 변의 길이 1이 직사각형 $PQRS$의 짧은 변 k로 줄었기 때문에 길이가 줄어드는 비율은 k이고 넓이가 줄어드는 비율은 $k^2 = \frac{40}{81}$이다.

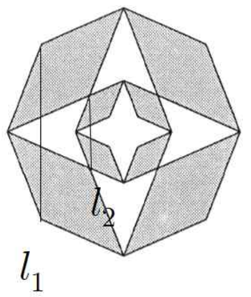
$\lim_{n\to\infty} S_n$이 의미하는 것은 발생하는 모든 직사각형의 합이므로

무한등비급수의 공식에 의해서

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{2k^2}{1-k^2} = \frac{2\times\frac{20}{81}}{1-\frac{20}{81}} = \frac{40}{61} \text{이다.}$$

60) [정답] ①

[해설]



$\frac{l_2}{l_1}=\sqrt{\frac{1+1-\sqrt{2}}{1+1+\sqrt{2}}}$ 이므로 넓이의 비는 $\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ 이다.

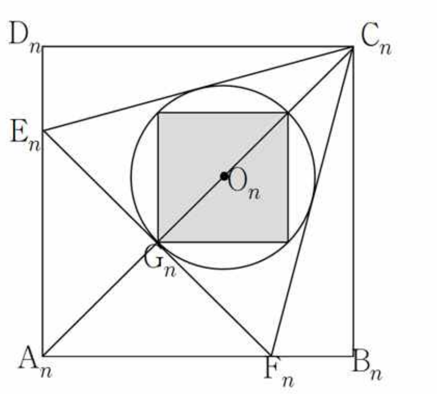
R_1에서 마름모 한 개의 넓이는 $1\times 1\times \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로

$S_1 = 2\sqrt{2}$ $\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{2\sqrt{2}}{1-\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = 2+\sqrt{2}$

61) [정답] 9

[해설]

그림과 같이 정사각형 R_n의 꼭짓점을 각각 A_n, B_n, C_n, D_n이라 하고, 문제의 조건에 따라 그린 정삼각형의 꼭짓점을 각각 C_n, E_n, F_n이라 하자.



정사각형 R_n의 한 변의 길이를 a_n, 정삼각형 $C_nE_nF_n$의 한 변의 길이를 b_n이라 하자. $\overline{C_nG_n}+\overline{G_nA_n} = \sqrt{2}\,a_n$

$\frac{\sqrt{3}}{2}b_n + \frac{1}{2}b_n = \sqrt{2}\,a_n$, $b_n = (\sqrt{6}-\sqrt{2})a_n$

원 O_n의 반지름의 길이 r_n은 $r_n = \frac{\sqrt{3}}{2}b_n \times \frac{1}{3}$

정사각형 R_{n+1}의 한 변의 길이는 $\sqrt{2}r_n$이므로

$a_{n+1} = \sqrt{2}\,r_n = \frac{\sqrt{6}}{6}b_n = \frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{6}-\sqrt{2})\,a_n$

$\therefore a_{n+1} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}a_n$

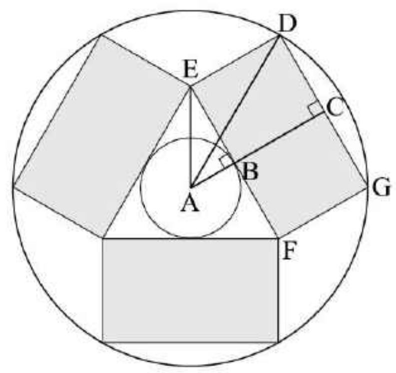
수열$\{S_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{4-2\sqrt{3}}{3}$인 등비수열이다.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{1}{1-\frac{4-2\sqrt{3}}{3}} = \frac{3+6\sqrt{3}}{11}$ $\therefore a+b=9$

62) [정답] 47

[해설]

원 O의 중심을 A, 한 직사각형의 긴 변의 중점을 B, C, 직사각형의 꼭짓점을 D, E, F, G라 하자.



원 O_1의 반지름을 r라 하면 $\angle AEB = \frac{\pi}{6}$이므로

$\overline{BE}=\sqrt{3}r$이므로 $\overline{EF}=2\sqrt{3}r$, $\overline{DE}=2r$, $\overline{AC}=3r$, $\overline{CD}=\sqrt{3}r$

$\triangle ACD$가 직각삼각형이므로

$(3r)^2+(\sqrt{3}r)^2=(\sqrt{3})^2$ $\therefore r=\frac{1}{2}$

$S_1 = 3\times 2\sqrt{3}r\times 2r = 12\sqrt{3}r^2 = 3\sqrt{3}$

원 O과 원 O_1의 반지름의 닮음비가 $1 : \frac{1}{2\sqrt{3}}$이다.

같은 방법으로 원 O_n과 원 O_{n+1}의 반지름의 닮음비도 $1 : \frac{1}{2\sqrt{3}}$이다. 원 O_n의 내부와 원 O_{n+1}의 외부에 있는 세

직사각형의 넓이의 합과 원 O_{n+1}의 내부와 원 O_{n+2}의 외부에 있는 세 직사각형의 넓이의 합의 비는

$1^2:\left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2=1:\dfrac{1}{12}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{3\sqrt{3}}{1-\dfrac{1}{12}}=\dfrac{36}{11}\sqrt{3}=\dfrac{q}{p}\sqrt{3}$ 따라서 $p+q=47$

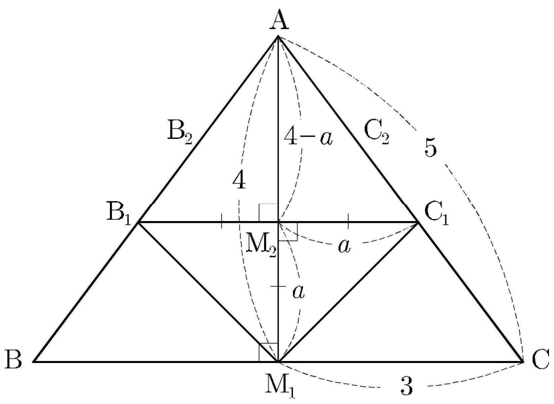
63) [정답] ②

[해설]

삼각형 ABC가 이등변삼각형이므로 $\triangle AM_1C$는 직각삼각형이다.

$\therefore\ \overline{AM_1}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

|삼각형 ABC와 삼각형 AB_1C_1이 닮음이므로 M_2는 직선 AM_1 위에 있고 삼각형 AM_2C_1과 삼각형 AM_1C는 닮음이다.



$\overline{M_2C_1}=a$라 하면 삼각형 $M_2M_1C_1$은 직각이등변삼각형이므로

$\overline{M_2M_1}=a$

$\dfrac{\overline{AM_2}}{\overline{M_2C_1}}=\dfrac{\overline{AM_1}}{\overline{M_1C}}$에서 $\dfrac{4-a}{a}=\dfrac{4}{3}$

$\therefore\ a=\dfrac{12}{7}$

따라서 수열 $\{S_n\}$은 $S_1=a^2=\dfrac{144}{49}$이고 공비가 $\left(\dfrac{a}{3}\right)^2=\dfrac{16}{49}$인 등비수열이다.

$\therefore\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}S_n=\dfrac{\dfrac{144}{49}}{1-\dfrac{16}{49}}=\dfrac{48}{11}$

64) [정답] ④

[해설]

$\overline{P_1B_1}=\overline{B_1Q_1}=2$, $\angle P_1B_1Q_1=90°$이므로

직각이등변삼각형 $P_1B_1Q_1$의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times2^2=2$이다.

$\overline{B_1D_1}$이 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 두 변 B_2C_2, D_2A_2와 만나는 점을 각각 M_1, N_1이라 하고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 한 변의 길이를 x라 하면 $\overline{B_1M_1}=\sqrt{2}$, $\overline{M_1N_1}=x$,

$\overline{N_1D_1}=\overline{A_2N_1}=\dfrac{x}{2}$이고 $\overline{B_1D_1}=3\sqrt{2}$이므로

$\overline{B_1D_1}=\overline{B_1M_1}+\overline{M_1N_1}+\overline{N_1D_1}=\sqrt{2}+x+\dfrac{x}{2}=3\sqrt{2}$

$\therefore\ x=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ 따라서 두 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$과 $A_2B_2C_2D_2$의 닮음비는

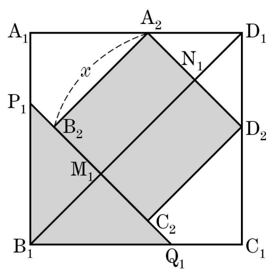
$\overline{A_1B_1}:\overline{A_2B_2}=3:\dfrac{4\sqrt{2}}{3}=9:4\sqrt{2}$이다.

모든 자연수 n에 대하여 그림 R_n은 정사각형과 직각이등변삼각형으로 이루어진 닮음인 도형이므로

그림 R_1에 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_1과

그림 R_2에 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_2의 비는

$S_1:S_2=9^2:(4\sqrt{2})^2=81:32$



그림에서 그림 R_1에 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_1은 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 넓이와 직각이등변삼각형 $P_1B_1Q_1$의 넓이의 합이므로 수열 $\{S_n\}$은

첫째항이 $S_1=\dfrac{1}{2}\times2\times2+\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2=\dfrac{50}{9}$이고

공비가 $\dfrac{32}{81}$인 등비수열이다. $\therefore\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}S_n=\dfrac{\dfrac{50}{9}}{1-\dfrac{32}{81}}=\dfrac{450}{49}$

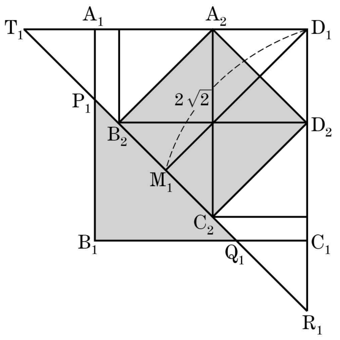
<다른 풀이>

정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 한 변의 길이가 3이므로 $\overline{B_1D_1}=3\sqrt{2}$

꼭짓점 D_1에서 선분 P_1Q_1에 내린 수선의 발을 M_1이라

하면 $\overline{D_1M_1}=2\sqrt{2}$ 이다. 직선 D_1A_1과 직선 P_1Q_1의 교점을 T_1, 직선 C_1D_1과 직선 P_1Q_1의 교점을 R_1이라 하자.

이때 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 넓이는 직각이등변삼각형 $T_1R_1D_1$의 넓이의 $\frac{4}{9}$ 이다.



직각이등변삼각형 $T_1R_1D_1$은 높이가 $2\sqrt{2}$이고, 밑변의 길이가 $4\sqrt{2}$이므로 직각이등변삼각형 $T_1R_1D_1$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 4\sqrt{2}=8$이고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 넓이는

$8\times\frac{4}{9}=\frac{32}{9}$ 이다. 따라서 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 한 변의

길이는 $\overline{A_2B_2}=\sqrt{\frac{32}{9}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

$\therefore\ \overline{A_1B_1}:\overline{A_2B_2}=3:\frac{4\sqrt{2}}{3}=9:4\sqrt{2}$

모든 자연수 n에 대하여 그림 R_n은 정사각형과 직각이등변삼각형으로 이루어진 닮음인 도형이므로

그림 R_1에 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_1과

그림 R_2에 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_2의 비는

$S_1:S_2=9^2:(4\sqrt{2})^2=81:32$

그림에서 그림 R_1에 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_1은 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 넓이와 직각이등변삼각형 $P_1B_1Q_1$의 넓이의 합이므로 수열 $\{S_n\}$은

첫째항이 $S_1=\frac{1}{2}\times 2\times 2+\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2=\frac{50}{9}$이고

공비가 $\frac{32}{81}$인 등비수열이다. $\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{50}{9}}{1-\frac{32}{81}}=\frac{450}{49}$

65) [정답] ⑤

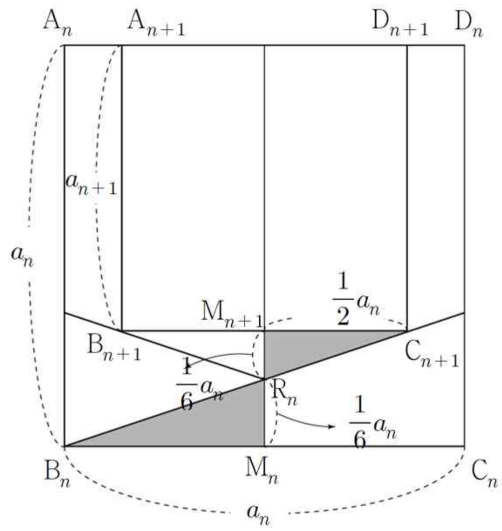
[해설]

S_1은 삼각형 $P_1B_1R_1$의 넓이와 삼각형 $B_1C_1Q_1$의 넓이의

합이므로 $S_1=\frac{3}{4}+\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$

선분 B_nC_n의 중점을 M_n이라 하고

정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 한 변의 길이를 a_n이라 하자.



삼각형 $R_nB_nM_n$과 삼각형 $R_nC_{n+1}M_{n+1}$은

닮음이므로

$\overline{B_nM_n}:\overline{R_nM_n}=\overline{C_{n+1}M_{n+1}}:\overline{R_nM_{n+1}}$

$=3:1$

$\overline{B_nM_n}=\frac{1}{2}a_n,\ \overline{R_nM_n}=\frac{1}{6}a_n$

$\overline{C_{n+1}M_{n+1}}=\frac{1}{2}a_{n+1},\ \overline{R_nM_{n+1}}=\frac{1}{6}a_{n+1}$

$\overline{A_nB_n}=\overline{A_{n+1}B_{n+1}}+\overline{R_nM_{n+1}}+\overline{R_nM_n}$

$a_n=a_{n+1}+\frac{1}{6}a_{n+1}+\frac{1}{6}a_n$

그러므로 $a_{n+1}=\frac{5}{7}a_n$

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{9}{4}}{1-\left(\frac{5}{7}\right)^2}=\frac{147}{32}$

66) [정답] ③

[해설]

그림 R_n에서 새로 그려진 6개의 원의 넓이의 합을 a_n이라 하자.

정육각형 H_1의 한 변의 길이가 6이므로 그림 R_1의

원의 반지름의 길이는 1이고 $a_1=6\pi$이다.

정육각형 H_n의 가장 긴 대각선들이 만나는 점을 O라 하자.

정육각형 H_n의 한 꼭짓점을 A_n이라 하고, 정육각형 H_n의 변 중 점 A_n을 끝점으로 하는 한 변을

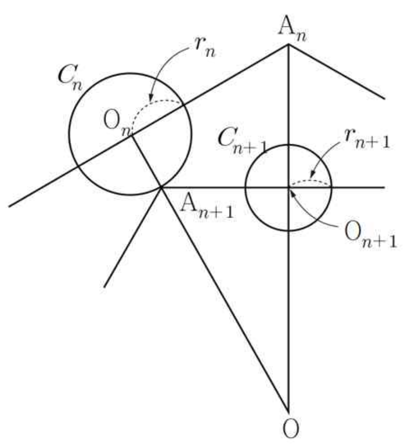
삼등분하는 점을 지름의 양 끝점으로 하는 원을 C_n, 중심을 O_n이라 하자.

정육각형 H_{n+1}과 원 C_n이 만나는 점을 A_{n+1}이라 하고, 정육각형 H_{n+1}의 각 변을 삼등분하는 점을

지름의 양 끝점으로 하는 원 중 선분 OA_n과 만나는 원을 C_{n+1}, 중심을 O_{n+1}이라 하자.

두 원 C_n, C_{n+1}의 반지름의 길이를 각각 r_n, r_{n+1}이라 하자.

다음은 그림 R_{n+1}의 일부이다.



삼각형 $\mathrm{OA}_n\mathrm{O}_n$은 $\angle \mathrm{OO}_n\mathrm{A}_n=90^\circ$, $\angle \mathrm{OA}_n\mathrm{O}_n=60^\circ$인 직각삼각형이고, $\overline{\mathrm{O}_n\mathrm{A}_n}=3r_n$, $\overline{\mathrm{OO}_n}=3\sqrt{3}r_n$이다.

삼각형 $\mathrm{OA}_{n+1}\mathrm{O}_{n+1}$은 $\angle \mathrm{OO}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1}=90^\circ$, $\angle \mathrm{OA}_{n+1}\mathrm{O}_{n+1}=60^\circ$인 직각삼각형이고,

$\overline{\mathrm{OA}_{n+1}}=(3\sqrt{3}-1)r_n$

$\overline{\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1}}=\dfrac{3\sqrt{3}-1}{2}r_n$이다.

$r_{n+1}=\dfrac{1}{3}\overline{\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1}}=\dfrac{3\sqrt{3}-1}{6}r_n$

그러므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 6π이고 공비가 $\left(\dfrac{3\sqrt{3}-1}{6}\right)^2=\dfrac{14-3\sqrt{3}}{18}$인 등비수열이다.

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{6\pi}{1-\frac{14-3\sqrt{3}}{18}}=\frac{108}{11}(3\sqrt{3}-4)\pi$$

따라서 $k=\dfrac{108}{11}$, $m=4$이고 $11k+m=112$

67) [정답] ①

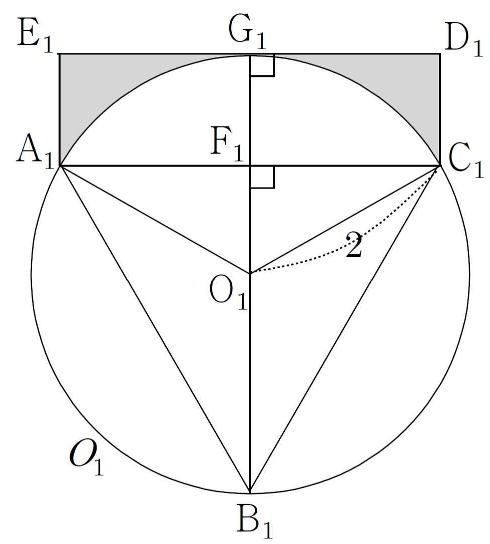
[해설]

원 O_1의 중심을 O_1, 정삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$의 한 변의 길이를 a라 하자.

점 O_1은 정삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$의 무게중심이므로

$\overline{\mathrm{O}_1\mathrm{B}_1}=\mathrm{a}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{a}=2$

$\therefore\ a=2\sqrt{3}$



직선 $\mathrm{B}_1\mathrm{O}_1$이 두 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{C}_1$, $\mathrm{D}_1\mathrm{E}_1$과 만나는 점을 각각 F_1, G_1이라 하면

$\overline{\mathrm{O}_1\mathrm{F}_1}=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$

$\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{G}_1}=\overline{\mathrm{O}_1\mathrm{G}_1}-\overline{\mathrm{O}_1\mathrm{F}_1}=2-1=1$

$\therefore\ S_1=2\sqrt{3}\times1-\left(\dfrac{1}{2}\times2^2\times\dfrac{2}{3}\pi-\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times1\right)$

$=2\sqrt{3}-\left(\dfrac{4}{3}\pi-\sqrt{3}\right)$

$=3\sqrt{3}-\dfrac{4}{3}\pi$

정삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$에 내접하는 원 O_2의 중심을 O_2, 반지름의 길이를 r라 하면 두 점 O_1, O_2가 일치하므로

$r=\overline{\mathrm{O}_1\mathrm{F}_1}=1$

따라서 두 원 O_1, O_2의 닮음비가 $2:1$이다.

그림 R_n에서 처음으로 색칠된 도형을 T_n이라 하면 두 도형 T_1, T_2의 넓이의 비는 4 : 1이고, 같은 방법으로 두 도형 T_n, T_{n+1} $(n \geq 1)$의 넓이의 비도 4 : 1이므로

$$S_2 = S_1 + \frac{1}{4}S_1$$

$$S_3 = S_1 + \frac{1}{4}S_1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 S_1$$

……

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = S_1 + \frac{1}{4}S_1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 S_1 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 S_1 + \cdots$$

$$= \frac{S_1}{1-\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{4}{3}S_1$$

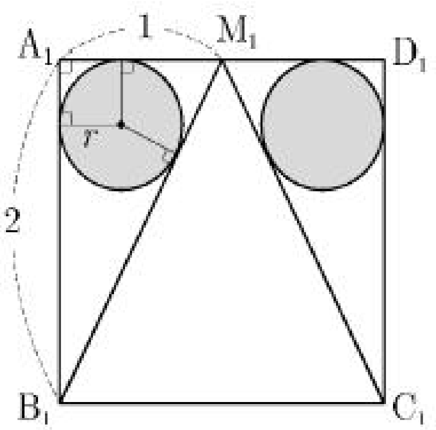
$$= \frac{4}{3}\left(3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi\right)$$

$$= 4\sqrt{3} - \frac{16}{9}\pi$$

68) [정답] ①

[해설]

합동인 두 삼각형 $A_1B_1M_1$과 $M_1C_1D_1$에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r이라 하자.



삼각형 $A_1B_1M_1$에 내접하는 원의 중심에서 모든 변에 이르는 거리는 r이므로

삼각형 $A_1B_1M_1$의 넓이는 $\frac{1}{2}(\overline{A_1B_1} + \overline{B_1M_1} + \overline{M_1A_1})r$로 나타낼 수 있다.

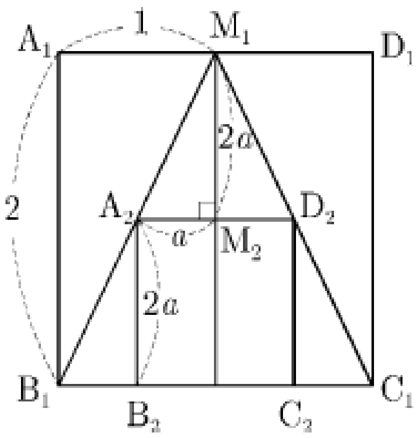
그런데 삼각형 $A_1B_1M_1$는 직각삼각형이므로

$\overline{B_1M_1} = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$이고 넓이는 $\frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$이다.

따라서 $\frac{1}{2}(2+1+\sqrt{5})r = 1$에서 $r = \frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$이다.

$$\therefore S_1 = 2 \times \pi\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = (7-3\sqrt{5})\pi$$

$\overline{A_2M_2} = a$라 하면 삼각형 $M_1A_2M_2$와 삼각형 $B_1M_1A_1$은 닮음이므로 $\overline{M_1M_2} = 2a$이다.



따라서 $2a + 2a = 2$에서 $a = \frac{1}{2}$이다.

따라서 S_n은 첫째항이 $(7-3\sqrt{5})\pi$이고 공비가 $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$인 등비수열의 첫째항부터 제$n$항까지의 합이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} (7-3\sqrt{5})\pi \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{(7-3\sqrt{5})\pi}{1-\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{4(7-3\sqrt{5})}{3}\pi$$

69) [정답] ①

[해설]

점 A_2를 지나고 선분 B_1C_1에 평행한 직선과 선분 A_1B_1, 선분 A_1C_1의 교점을 각각 P, Q라 하자.

두 삼각형 $A_1B_1C_1$, A_1PQ의 닮음비는 $3:2$, 두 삼각형 A_1PQ, $A_2B_2C_2$의 닮음비는 $2:1$이므로 삼각형 $A_1B_1C_1$과 삼각형 $A_2B_2C_2$의 닮음비는 $3:1$

그러므로 과 의 넓이의 비는 $9:1$

$$S_1 = \left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 - \pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right\} \times \frac{2}{3} + 2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \frac{1}{2}\right.$$

$=\frac{7}{6}\sqrt{3}-\frac{2}{9}\pi \therefore \frac{S_1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{16}(21\sqrt{3}-4\pi)$

70) [정답] ⑤

[해설]

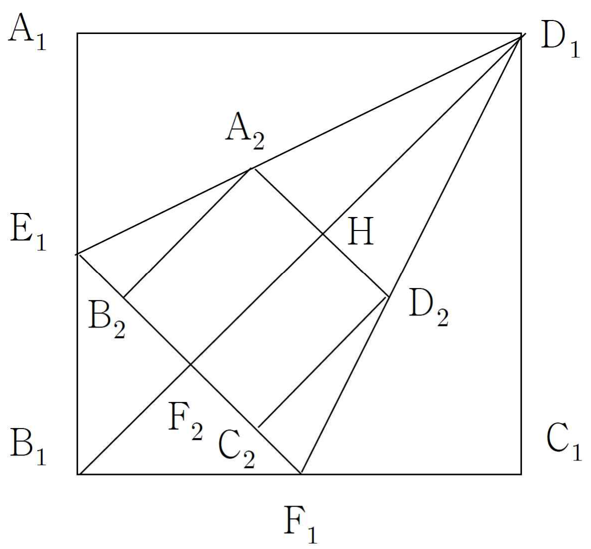
정사각형 $A_1B_1C_1D_1$은 한 변의 길이가 2인 정삼각형이므로

$S_1=\triangle A_1E_1D_1+\triangle D_1F_1C_1+\triangle E_1B_1F_1$

$=\frac{1}{2}\times1\times2+\frac{1}{2}\times1\times2+\frac{1}{2}\times1\times1$

$=\frac{5}{2}$

한편, 그림 R_2에서 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 한 변의 길이를 x라 하고 선분 B_1D_1이 선분 A_2D_2와 만나는 점을 H라 하자.



이때, 직각삼각형 $B_1F_1F_2$에서

$\angle F_2B_1F_1=\angle B_1F_1F_2=45°$이므로

$\overline{F_1F_2}=\overline{B_1F_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

한편, 직각삼각형 $D_1F_2F_1$에서

$\overline{D_1F_2}:\overline{F_2F_1}=(\overline{D_1B_1}-\overline{F_2B_1}):\overline{F_2F_1}$

$=\frac{3}{2}\sqrt{2}:\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=3:1$

또, 직각삼각형 D_1HD_2에서

$\overline{D_1H}:\overline{HD_2}=(\overline{D_1B_1}-\overline{HB_1}):\overline{HD_2}$

$=\left(2\sqrt{2}-x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right):\frac{x}{2}$

$=(3\sqrt{2}-2x):x$

이때, 직각삼각형 $D_1F_2F_1$과 직각삼각형 D_1HD_2가 닮음 삼각형이므로

$\overline{D_1F_2}:\overline{F_2F_1}=\overline{D_1H}:\overline{HD_2}$

$3:1=(3\sqrt{2}-2x):x$

$3\sqrt{2}-2x=3x$

$5x=3\sqrt{2}$

$x=\frac{3}{5}\sqrt{2}$

그러므로 두 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$의 길이의 비는 $1:\frac{3}{10}\sqrt{2}$이므로 넓이의 비는 $1:\frac{9}{50}$이다.

따라서

$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\times\frac{9}{50}+\frac{5}{2}\times\left(\frac{9}{50}\right)^2+\cdots$

$=\frac{\frac{5}{2}}{1-\frac{9}{50}}$

$=\frac{125}{41}$

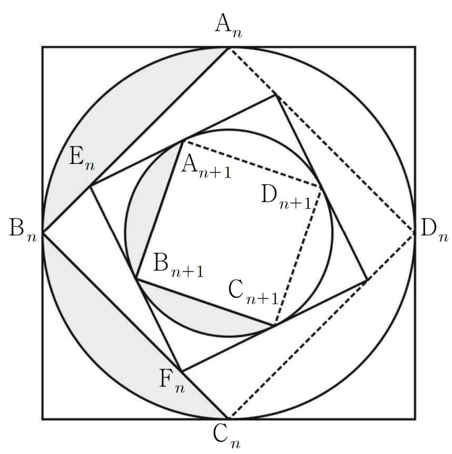
71) [정답] ①

[해설]

그림 R_1에서

$S_1=2\times\left(\frac{1}{4}\times2^2\times\pi-\frac{1}{2}\times2\times2\right)=2(\pi-2)$

다음은 그림 R_{n+1}의 일부이다.



그림에서 $\overline{A_nB_n}=a$라 하자. 두 선분 A_nB_n, B_nC_n을 각각 $3:1$로 내분하는 두 점을 E_n, F_n이라 하면,

$\overline{\mathrm{B}_nE_n}=\dfrac{1}{4}a,\ \overline{\mathrm{B}_n\mathrm{F}_n}=\dfrac{3}{4}a$

$\overline{\mathrm{E}_n\mathrm{F}_n}=\sqrt{(\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{E}_n})^2+(\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{F}_n})^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}a$

$\therefore \overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overline{\mathrm{E}_n\mathrm{F}_n}$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{10}}{4}a=\dfrac{\sqrt{5}}{4}\overline{\mathrm{A}_nB_n}$

두 정사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_nD_n$, $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}$은

서로 닮음이고, 닮음비는 $1:\dfrac{\sqrt{5}}{4}$이다.

그러므로 그림 R_n에서 새로 얻어진 《 모양의 도형과 그림

R_{n+1}에서 새로 얻어진 모양의 도형도 서로 닮음이고

닮음비가 $1:\dfrac{\sqrt{5}}{4}$이다.

따라서 S_n은 첫째항이 $2(\pi-2)$이고 공비가

$\left(\dfrac{\sqrt{5}}{4}\right)^2=\dfrac{5}{16}$인 등비수열의 첫째항부터 제$n$항까지의

합이다.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{2(\pi-2)}{1-\dfrac{5}{16}}=\dfrac{32}{11}(\pi-2)$

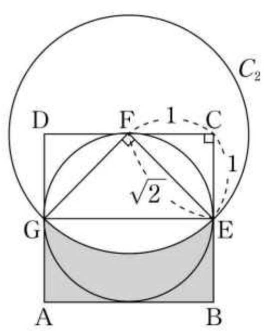
72) [정답] ③

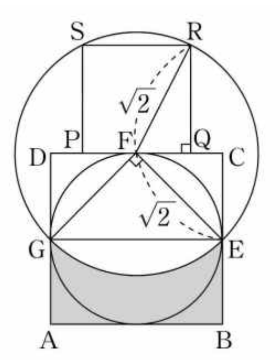
[해설]

그림 R_1에서 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_1이라 하면

S_1은 그림과 같이 정사각형 ABCD의 내부와 원 C_2의

외부의 공통부분의 넓이와 같다.





직각삼각형 FCE가 $\overline{\mathrm{FC}}=\overline{\mathrm{CE}}=1$이므로

$\overline{\mathrm{FE}}=\sqrt{2}$

따라서 선분 AD의 중점을 G라 하면

S_1 =(직사각형 ABEG의 넓이)

−{(부채꼴 EFG의 넓이)

−(직각삼각형 EFG의 넓이)}

$=(2\times1)-\left\{\pi\times(\sqrt{2})^2\times\dfrac{1}{4}-(\sqrt{2})^2\times\dfrac{1}{2}\right\}$

$=3-\dfrac{\pi}{2}$

R_2에서 정사각형 PQRS의 한 변의 길이 $\overline{\mathrm{QR}}$는

$\overline{\mathrm{FR}}=\overline{\mathrm{FE}}=\sqrt{2}$ 이므로

직각삼각형 FQR에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{QR}}^2=(\sqrt{2})^2-\left(\dfrac{\overline{\mathrm{QR}}}{2}\right)^2$ 이므로

$\overline{\mathrm{QR}}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

R_1에서 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 2이고

$\overline{\mathrm{QR}}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$ 이므로

R_2에서 추가로 색칠되는 도형의 넓이 S_2는

$S_2=\left(\dfrac{2\sqrt{10}}{5}\times\dfrac{1}{2}\right)^2\times S_1$

$=\dfrac{2}{5}S_1$

같은 방법으로 R_{n+1}에서 추가로 색칠되는

도형의 넓이는 R_n에서 추가로 색칠된

도형의 넓이의 $\dfrac{2}{5}$ 배이다.

따라서

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{3-\dfrac{\pi}{2}}{1-\dfrac{2}{5}}=\dfrac{30-5\pi}{6}$

73) [정답] ⑤

[해설]

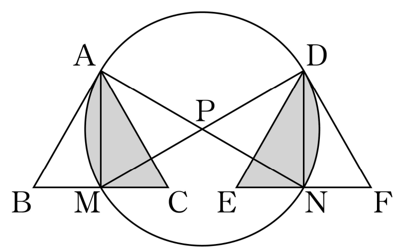


그림 R_1에서 선분 BC의 중점을 M, 선분 EF의

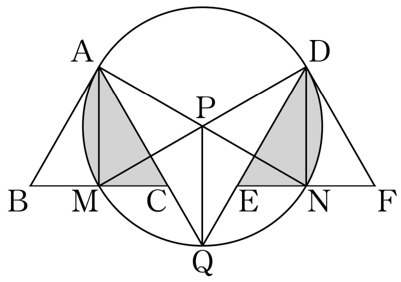
중점을 N, 원 O의 중심을 P라 하면, $\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{3}$ 이고

삼각형 PAM이 정삼각형이므로 $\angle\mathrm{APM}=\dfrac{\pi}{3}$ 이다.

$S_1=2\times\{$(부채꼴 PAM의 넓이)

$-$(삼각형 PAM의 넓이)$+$(삼각형 AMC의 넓이)$\}$

$=2\times\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



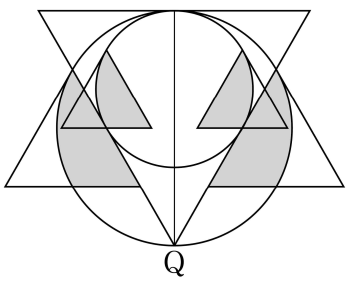
직선 AC와 직선 DE의 교점을 Q라 하자.

$\angle\mathrm{AQP}=\angle\mathrm{CAM}=\dfrac{\pi}{6}$ (엇각)

$\angle\mathrm{DQP}=\angle\mathrm{EDN}=\dfrac{\pi}{6}$ (엇각)이므로 $\angle\mathrm{AQD}=\dfrac{\pi}{3}$

호 AD의 중심각 $\angle\mathrm{APD}=\dfrac{2}{3}\pi$ 이고 호 AD의 원주각의

크기는 $\dfrac{\pi}{3}$ 이므로, 점 Q는 원 O 위의 점이다.



R_2에서 새로 그려진 원은 위 그림과 같이 높이가 원 O의 지름과 같고 점 Q를 한 꼭짓점으로 하는 정삼각형에 내접한다. 새로 그려진 원의 중심은 이 정삼각형의 무게중심이므로 반지름의 길이는

$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 이다. 원의 닮음비가 $\sqrt{3}:\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=3:2$ 이고

넓이의 비는 $9:4$ 이므로 R_2에서 추가로 색칠되는

도형의 넓이는 $\dfrac{4}{9}S_1$ 이다.

R_{n+1}에서 추가로 색칠되는 도형의 넓이는 R_n에서 추가로

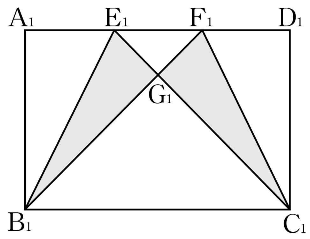
색칠된 도형의 넓이의 $\dfrac{4}{9}$ 배이다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{1-\dfrac{4}{9}}=\dfrac{18\pi-9\sqrt{3}}{10}$

74) [정답] ④

[해설]

그림 R_n에서 새로 색칠된 부분의 넓이를 a_n이라 하자.



$\overline{\mathrm{A_1B_1}}=\overline{\mathrm{A_1F_1}}=2$ 이므로 삼각형 $\mathrm{A_1B_1F_1}$은

직각이등변삼각형이고

$\angle\mathrm{G_1B_1C_1}=45°$ 이다.

$\overline{\mathrm{D_1C_1}}=\overline{\mathrm{D_1E_1}}=2$ 이므로 삼각형 $\mathrm{D_1C_1E_1}$은 직각이등변삼각형

이고 $\angle\mathrm{G_1C_1B_1}=45°$ 이다.

그러므로 $\angle\mathrm{B_1G_1C_1}=90°$ 이고, 삼각형 $\mathrm{G_1B_1C_1}$은

직각이등변삼

각형이다.

또한, $\angle\mathrm{G_1E_1F_1}=45°$, $\angle\mathrm{G_1F_1E_1}=45°$ 이므로 삼각형

$\mathrm{G_1E_1F_1}$

도 직각이등변삼각형이다.

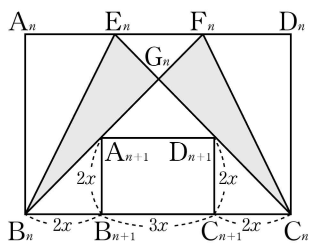
$\overline{\mathrm{B_1C_1}}=3$ 이므로

$\overline{\mathrm{B_1G_1}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

$\overline{\mathrm{E_1F_1}}=1$ 이므로

$\overline{\mathrm{E_1G_1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

그러므로 $a_1=2\times\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{3}{2}$



$\overline{A_{n+1}B_{n+1}}=2x$ 라 하면 $\overline{B_{n+1}C_{n+1}}=3x$ 이고

$\overline{B_nC_n}=2x+3x+2x=7x$ 이므로

$\overline{B_{n+1}C_{n+1}}=3x=\frac{3}{7}\overline{B_nC_n}$

직사각형 $A_nB_nC_nD_n$과 직사각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 닮음비

가 $1:\frac{3}{7}$ 이므로, 그림 R_{n+1}에서 추가로 색칠되는 도형의 넓이

a_{n+1}은

$a_{n+1}=\left(\frac{3}{7}\right)^2 a_n=\frac{9}{49}a_n$

그러므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{3}{2}$ 이고 공비가 $\frac{9}{49}$ 인 등비수열

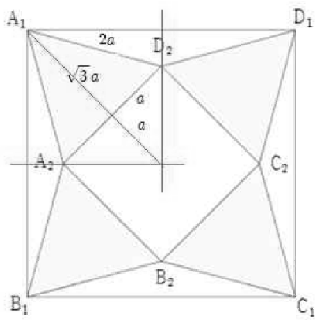
이다.

따라서

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{9}{49}}=\frac{147}{80}$$

75) [정답] ②

[해설]



그림에서 정삼각형의 한 변의 길이를 $2a$라 하면

$\sqrt{3}a+a=\sqrt{2}$

$2a=\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$

$a^2=2-\sqrt{3}$

정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}(2a)^2=\sqrt{3}a^2$

$S_1=4\sqrt{3}a^2=8\sqrt{3}-12$

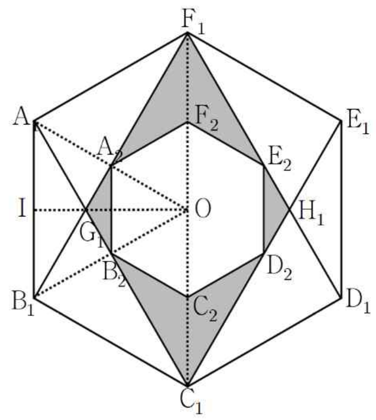
따라서 축소되는 닮음비는 a이므로

공비는 $a^2=2-\sqrt{3}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{4\sqrt{3}a^2}{1-a^2}=\frac{8\sqrt{3}-12}{\sqrt{3}-1}=6-2\sqrt{3}$$

76) [정답] ②

[해설]



점 G_1에서 선분 A_1B_1, C_1F_1에 내린 수선의 발을 각각 I, O라

하자. $\overline{A_1B_1}:\overline{C_1F_1}=\overline{G_1I}:\overline{G_1O}$이고 $\overline{A_1B_1}=4$, $\overline{C_1F_1}=8$이므로

$\overline{G_1O}=2\overline{G_1I}$이다.

삼각형OA_1B_1이 한 변의 길이가 4인 정삼각형이므로

$\overline{IO}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times4=2\sqrt{3}$ 이고, $\overline{G_1O}=2\sqrt{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 이다.

따라서 마름모 $F_1G_1C_1H_1$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{G_1H_1}\times\overline{C_1F_1}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\times2\right)\times8=\frac{32}{3}\sqrt{3}$

이다. 한편,

사각형 $A_1B_1OF_1$은 마름모이고 점 A_2는 선분 B_1F_1의 중점이므로

점 A_2는 선분 OA_1의 중점이다.

마찬가지로 점 B_2는 선분 OB_1의 중점이다.

따라서 $\overline{A_1B_1}:\overline{A_2B_2}=2:1$이므로 $\overline{A_2B_2}=2$이다.

그러므로 정육각형 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$는 한 변의 길이가 2이므로

넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2\times6=6\sqrt{3}$이다.

따라서 R_1에서 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_1은 다음과 같다.

$S_1=$(마름모 $F_1G_1C_1H_1$의 넓이)

$-$ (정육각형 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$의 넓이)

$=\frac{14}{3}\sqrt{3}$

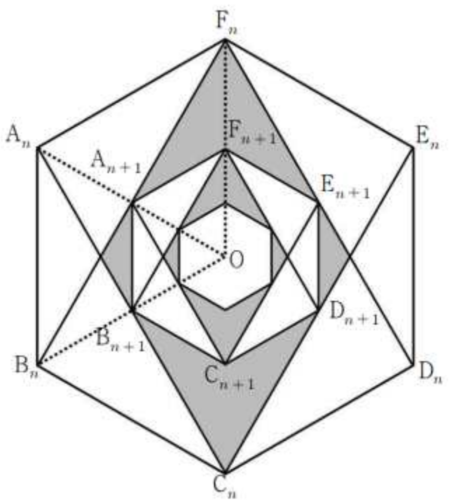


그림 R_n을 얻은 과정에서 새로 색칠한 도형의 넓이를 a_n이라 하자.

그림 R_n에서 직선 A_nA_{n+1}과 직선 B_nB_{n+1}은 점 O에서 만난다.

점 A_{n+1}은 선분 OA_n의 중점이므로

$\overline{A_nB_n} : \overline{A_{n+1}B_{n+1}} = 2 : 1$

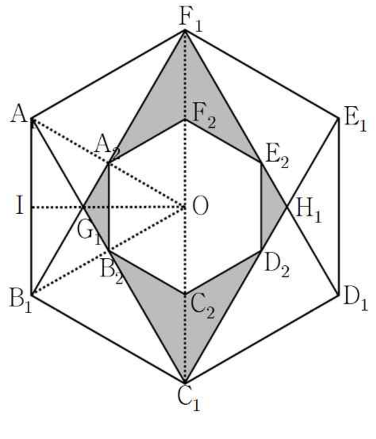
이다. 따라서 $a_n : a_{n+1} = 2^2 : 1$이므로 수열 $\{a_n\}$의 공비 $r=\frac{1}{4}$이다. 그러므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{S_1}{1-r} = \frac{\frac{14}{3}\sqrt{3}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{56}{9}\sqrt{3}$$

이다.

77) [정답] ②

[해설]



점 G_1에서 선분 A_1B_1, C_1F_1에 내린 수선의 발을 각각 I, O라 하자. $\overline{A_1B_1} : \overline{C_1F_1} = \overline{G_1I} : \overline{G_1O}$이고 $\overline{A_1B_1}=4$, $\overline{C_1F_1}=8$이므로 $\overline{G_1O}=2\overline{G_1I}$이다.

삼각형 OA_1B_1이 한 변의 길이가 4인 정삼각형이므로

$\overline{IO}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 4 = 2\sqrt{3}$이고, $\overline{G_1O}=2\sqrt{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$이다.

따라서 마름모 $F_1G_1C_1H_1$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{G_1H_1}\times\overline{C_1F_1}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\times 2\right)\times 8=\frac{32}{3}\sqrt{3}$

이다. 한편,

사각형 $A_1B_1OF_1$은 마름모이고 점 A_2는 선분 B_1F_1의 중점이므로 점 A_2는 선분 OA_1의 중점이다.

마찬가지로 점 B_2는 선분 OB_1의 중점이다.

따라서 $\overline{A_1B_1} : \overline{A_2B_2} = 2 : 1$이므로 $\overline{A_2B_2}=2$이다.

그러므로 정육각형 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$는 한 변의 길이가 2이므로 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2\times 6 = 6\sqrt{3}$이다.

따라서 R_1에서 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_1은 다음과 같다.

S_1=(마름모 $F_1G_1C_1H_1$의 넓이)

−(정육각형 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$의 넓이)

$=\frac{14}{3}\sqrt{3}$

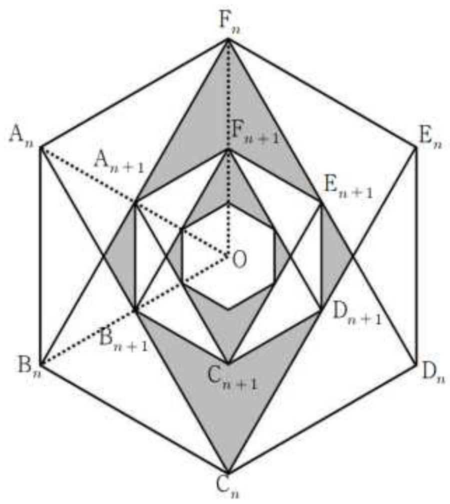


그림 R_n을 얻은 과정에서 새로 색칠한 도형의 넓이를 a_n이라 하자.

그림 R_n에서 직선 A_nA_{n+1}과 직선 B_nB_{n+1}은 점 O에서 만난다.

점 A_{n+1}은 선분 OA_n의 중점이므로

$\overline{A_nB_n} : \overline{A_{n+1}B_{n+1}} = 2 : 1$

이다. 따라서 $a_n : a_{n+1} = 2^2 : 1$이므로 수열 $\{a_n\}$의 공비 $r=\frac{1}{4}$이다. 그러므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{S_1}{1-r} = \frac{\frac{14}{3}\sqrt{3}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{56}{9}\sqrt{3}$$

이다.

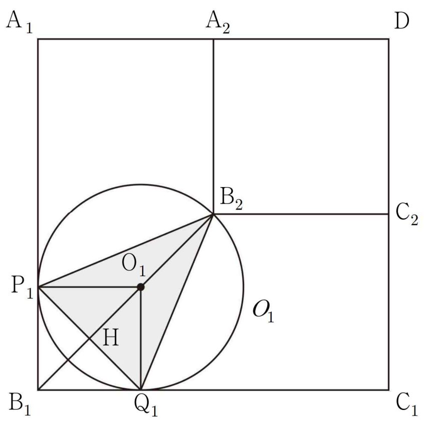
따라서 $p=9$, $q=56$이므로 $p+q=65$이다.

78) [정답] ①

[해설]

그림 R_1에서 원 O_1의 중심을 $\mathrm{O_1}$, 반지름의 길이를 x라 하고,

점 $\mathrm{B_2}$에서 선분 $\mathrm{P_1Q_1}$에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{\mathrm{B_1D}}=2\sqrt{2}$이므로 $\overline{\mathrm{B_1B_2}}=\sqrt{2}$이다.

두 점 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{Q_1}$은 원 O_1이 변 $\mathrm{A_1B_1}$, $\mathrm{B_1C_1}$과 각각 접하는 점이므로

사각형 $\mathrm{O_1P_1B_1Q_1}$은 한 변의 길이가 x인 정사각형이다.

$\overline{\mathrm{B_1O_1}}=\sqrt{2}x$이므로 $\overline{\mathrm{B_1O_1}}+\overline{\mathrm{O_1B_2}}=\sqrt{2}x+x=\sqrt{2}$

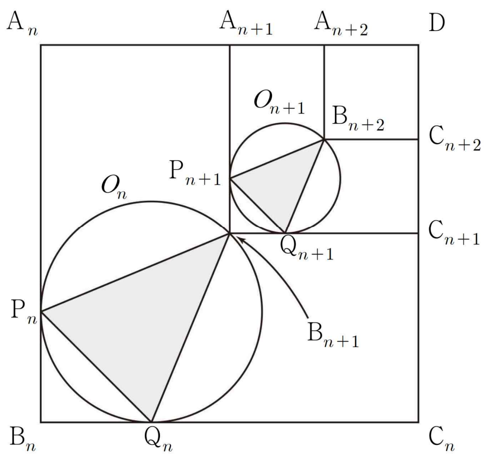
따라서 $x=2-\sqrt{2}$

또한 $\overline{\mathrm{P_1Q_1}}=\sqrt{2}x=2\sqrt{2}-2$,

$\overline{\mathrm{B_2H}}=x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}x=1$이다.

그러므로 $S_1=\dfrac{1}{2}\times(2\sqrt{2}-2)\times1=\sqrt{2}-1$

다음은 그림 R_{n+1}의 일부이다.



정사각형 $\mathrm{A_nB_nC_nD}$와 정사각형 $\mathrm{A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D}$는 서로 닮음이고

점 $\mathrm{A_{n+1}}$과 점 $\mathrm{C_{n+1}}$은 각각 변 $\mathrm{A_nD}$와 변 $\mathrm{C_nD}$의 중점이므로

닮음비는 $2:1$이다.

그러므로 두 삼각형 $\mathrm{B_{n+1}P_nQ_n}$, $\mathrm{B_{n+2}P_{n+1}Q_{n+1}}$은 서로 닮음이고

닮음비가 $2:1$이므로 넓이의 비는 $4:1$이다.

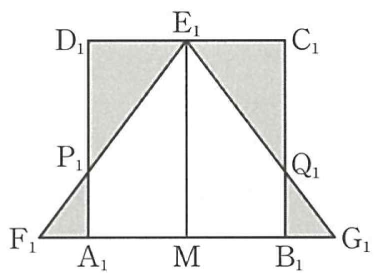
따라서 S_n은 첫째항이 $\sqrt{2}-1$이고 공비가 $\dfrac{1}{4}$인 등비수열의 첫째항

부터 제n항까지의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\sqrt{2}-1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}(\sqrt{2}-1)=\frac{4\sqrt{2}-4}{3}$$

79) [정답] ②

[해설]



선분 $\mathrm{A_1B_1}$의 중점을 M이라 하고, $\overline{\mathrm{E_1F_1}}=5k$($k$는 실수)라 하면 삼각형 $\mathrm{E_1F_1G_1}$은 이등변삼각형이고 $\overline{\mathrm{F_1G_1}}=6k$이므로 $\overline{\mathrm{F_1M}}=3k$ 이때 직각삼각형 $\mathrm{E_1F_1M}$에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{E_1M}}=\sqrt{(5k)^2-(3k)^2}=4k=4$

$k=1$이므로 $\overline{\mathrm{F_1M}}=3$

$\overline{\mathrm{A_1M}}=\overline{\mathrm{D_1E_1}}=2$, $\overline{\mathrm{F_1A_1}}=1$

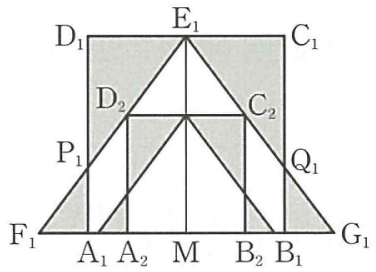
삼각형 $\mathrm{P_1E_1D_1}$과 삼각형 $\mathrm{P_1F_1A_1}$은 서로 닮은 도형이고

닮음비는 $2:1$이므로 $\overline{\mathrm{D_1P_1}}:\overline{\mathrm{A_1P_1}}=2:1$

$\overline{\mathrm{D_1P_1}}=4\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{3}$, $\overline{\mathrm{A_1P_1}}=4\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{3}$

$$\triangle\mathrm{P_1E_1D_1}+\triangle\mathrm{P_1F_1A_1}=\frac{1}{2}\times2\times\frac{8}{3}+\frac{1}{2}\times1\times\frac{4}{3}=\frac{10}{3}$$

따라서 $S_1=2\times\dfrac{10}{3}=\dfrac{20}{3}$



정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 한 변의 길이를 l로 놓으면

$\overline{A_2M}=\frac{l}{2}$이므로 $\overline{F_1A_2}=3-\frac{l}{2}$

$\overline{A_2D_2}=l$이고

삼각형 F_1ME_1과 삼각형 $F_1A_2D_2$는 서로 닮은 도형이므로

$\overline{F_1A_2}:\overline{A_2D_2}=3:4$

$\left(3-\frac{l}{2}\right):l=3:4,\ 3l=12-2l$

$l=\frac{12}{5}$

정사각형 $A_2B_2C_2D_2$와 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 닮음비는

$\frac{12}{5}:4=\frac{3}{5}:1$이므로 그림 R_2에서 추가로 색칠된 도형의 넓이는

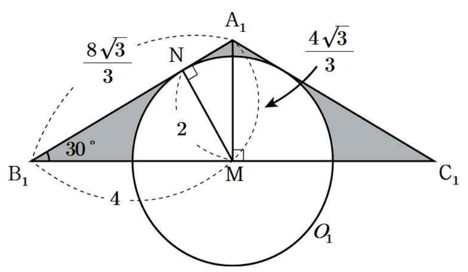
그림 R_1에서 색칠된 도형의 넓이의 $\left(\frac{3}{5}\right)^2$배이다.

이와 같은 관계가 계속되므로 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{20}{3}$이고 공비가 $\frac{9}{25}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합과 같다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{20}{3}\times\left(\frac{9}{25}\right)^{k-1}\right\}=\frac{\frac{20}{3}}{1-\frac{9}{25}}=\frac{125}{12}$

80) [정답] ③

[해설]



삼각형 $A_1B_1C_1$은 이등변삼각형이므로 선분 B_1C_1의 중점을 M이라 하면 원 O_1의 중심은 M이다.

원 O_1과 직선 A_1B_1이 접하는 점을 N이라 하면 원 O_1의 반지름의 길이 $\overline{MN}$은

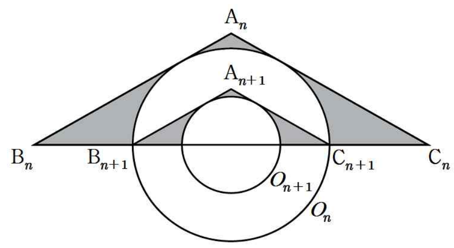
$\overline{MN}=4\times\sin30^\circ=2$

삼각형 A_1B_1M에서 $\overline{B_1M}=4$, $\angle A_1B_1M=30^\circ$이므로

$\overline{A_1M}=4\times\tan30^\circ=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

$S_1=\frac{1}{2}\times8\times\frac{4\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}\times2\times2\times\pi$

$=\frac{16\sqrt{3}}{3}-2\pi$



삼각형 $A_nB_nC_n$과 삼각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$은 서로 닮음이고 $\frac{1}{2}\times\overline{B_nC_n}=\overline{B_{n+1}C_{n+1}}$이므로 닮음비는 2 : 1이다.

삼각형 $A_nB_nC_n$과 삼각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$의 닮음비가 2 : 1이므로 넓이의 비는 4 : 1이다.

따라서 S_n은 첫째항이 $\frac{16\sqrt{3}}{3}-2\pi$이고 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{16\sqrt{3}}{3}-2\pi}{1-\frac{1}{4}}=\frac{64\sqrt{3}}{9}-\frac{8\pi}{3}$$

81) [정답] ②

[해설]

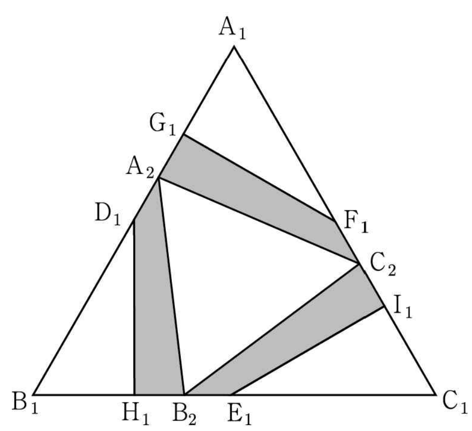


그림 R_1에서 사각형 $A_2C_2F_1G_1$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times5\times3\times\sin\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\times4\times2\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{7\sqrt{3}}{4}$ 세 사각형

$A_2C_2F_1G_1$, $B_2A_2D_1H_1$, $C_2B_2E_1I_1$의 넓이는 모두 같으므로

$S_1=\frac{21\sqrt{3}}{4}$

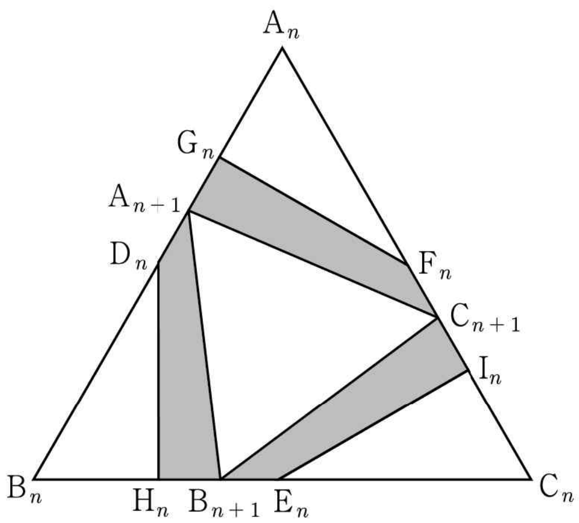


그림 R_n에서 세 사각형 $A_{n+1}C_{n+1}F_nG_n$, $B_{n+1}A_{n+1}D_nH_n$, $C_{n+1}B_{n+1}E_nI_n$의 넓이의 합을 T_n이라 하자.

삼각형 $A_nB_nC_n$과 삼각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$이 닮음이므로 정삼각형 $A_nB_nC_n$의 한 변의 길이를

l_n이라 하면 $\overline{A_nC_{n+1}}=\frac{5}{8}l_n$, $\overline{A_nA_{n+1}}=\frac{3}{8}l_n$

삼각형 $A_nA_{n+1}C_{n+1}$에서 코사인법칙을

이용하여 $\overline{A_{n+1}C_{n+1}}$의 길이 l_{n+1}을 구하면 $(l_{n+1})^2$

$=\left(\frac{5}{8}l_n\right)^2+\left(\frac{3}{8}l_n\right)^2-2\times\frac{5}{8}l_n\times\frac{3}{8}l_n\times\cos\frac{\pi}{3}=\frac{19}{64}(l_n)^2$

$l_{n+1}=\frac{\sqrt{19}}{8}l_n$이고 $l_n:l_{n+1}=1:\frac{\sqrt{19}}{8}$

$T_n:T_{n+1}=1:\frac{19}{64}$이고 $T_{n+1}=\frac{19}{64}T_n$

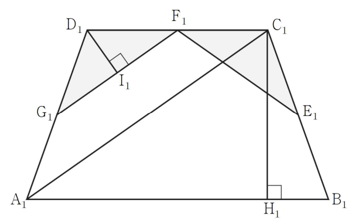
$\{T_n\}$은 첫째항이 $T_1=S_1=\frac{21\sqrt{3}}{4}$이고

공비가 $\frac{19}{64}$인 등비수열이다.

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}T_n=\frac{\frac{21\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{19}{64}}=\frac{112\sqrt{3}}{15}$$

82) [정답] ⑤

[해설]



점 C_1에서 선분 A_1B_1에 내린 수선의 발을 H_1이라 하면

직각삼각형 $C_1H_1B_1$에서 $\overline{B_1H_1}=2$이므로

$\overline{C_1H_1}=\sqrt{6^2-4^2}=4\sqrt{2}$이고,

직각삼각형 $A_1H_1C_1$에서

$$\overline{A_1C_1}=\sqrt{8^2+(4\sqrt{2})^2}=4\sqrt{6}$$

삼각형 $A_1C_1D_1$과 삼각형 $G_1F_1D_1$은 서로 닮음이고

닮음비가 $2:1$이므로 $\overline{G_1F_1}=2\sqrt{6}$

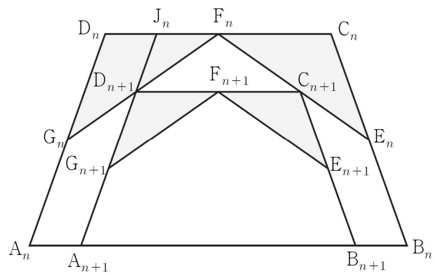
점 D_1에서 선분 G_1F_1에 내린 수선의 발을 I_1이라 하면

직각삼각형 $D_1I_1F_1$에서

$$\overline{D_1I_1}=\sqrt{3^2-(\sqrt{6})^2}=\sqrt{3}$$

$$S_1=2\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times\sqrt{3}=6\sqrt{2}$$

다음은 그림 R_{n+1}의 일부이다.



사다리꼴 $A_nB_nC_nD_n$에서 $\overline{A_nB_n}:\overline{A_nD_n}=5:3$이고, 사다리꼴 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$에서

$\overline{A_{n+1}B_{n+1}}:\overline{A_{n+1}D_{n+1}}=5:3$이므로 두 선분 A_nD_n과 $A_{n+1}D_{n+1}$이 서로 평행하다.

직선 $A_{n+1}D_{n+1}$이 선분 C_nD_n과 만나는 점을 J_n이라 하자.

두 삼각형 $G_nF_nD_n$, $D_{n+1}F_nJ_n$은 서로 닮음이고,

$\angle D_nF_nG_n=\angle C_{n+1}D_{n+1}F_n$이므로 두 삼각형 $G_nF_nD_n$, $D_{n+1}C_{n+1}F_n$은 서로 닮음이다.

$\overline{D_nC_n}=a_n$, $\overline{D_{n+1}C_{n+1}}=a_{n+1}$이라 하면 이등변삼각형

$D_{n+1}C_{n+1}F_n$에서 $\overline{D_{n+1}C_{n+1}}:\overline{D_{n+1}F_n}=2\sqrt{6}:3$이므로

$\overline{D_{n+1}F_n}=\frac{3}{2\sqrt{6}}\overline{D_{n+1}C_{n+1}}=\frac{\sqrt{6}}{4}a_{n+1}$이고, 이등변삼각형

$D_{n+1}F_nJ_n$에서 $\overline{D_{n+1}F_n}:\overline{D_{n+1}J_n}=2\sqrt{6}:3$이므로

$$\overline{D_{n+1}J_n}=\frac{3}{2\sqrt{6}}\overline{D_{n+1}F_n}=\frac{3}{8}a_{n+1}$$

$\overline{A_{n+1}J_n}=\overline{A_{n+1}D_{n+1}}+\overline{D_{n+1}J_n}$이므로

$$a_n=\overline{A_{n+1}J_n}=a_{n+1}+\frac{3}{8}a_{n+1}=\frac{11}{8}a_{n+1}$$

$a_{n+1}=\frac{8}{11}a_n$이므로 두 사다리꼴 $A_nB_nC_nD_n$과

$A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 닮음비가 $11:8$이므로 넓이의 비는

$121:64$이다.

따라서 S_n은 첫째항이 $6\sqrt{2}$이고 공비가 $\frac{64}{121}$인 등비수열의

첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{6\sqrt{2}}{1-\frac{64}{121}} = \frac{242}{19}\sqrt{2}$$

83) [정답] ①

[해설]

그림 R_n에서 $\angle B_{n+1}AD_n = \angle D_nAC_n$이므로

$\overset{\frown}{B_{n+1}D_n} = \overset{\frown}{D_nC_n}$ 이다.

따라서, $\overline{B_{n+1}D_n} = \overline{D_nC_n}$이므로 두 선분 B_nB_{n+1}, B_nD_n과 호 $B_{n+1}D_n$으로 둘러싸인 부분과 선분 C_nD_n과 호 C_nD_n으로 둘러싸인 부분의 넓이의 합은 삼각형 $B_nD_nB_{n+1}$의 넓이와 같다.

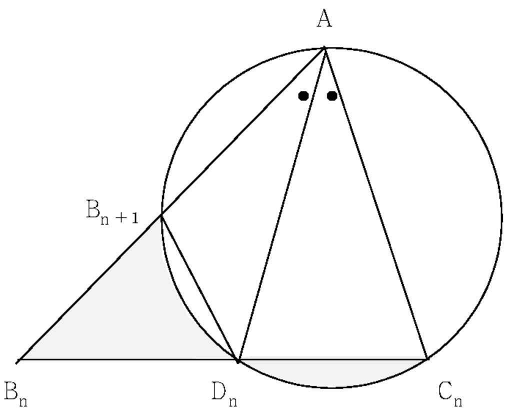


그림 R_1의 삼각형 AB_1C_1에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{B_1C_1}^2 = 3^2+2^2-2\times3\times2\times\cos\frac{\pi}{3} = 7$$

즉, $\overline{B_1C_1} = \sqrt{7}$

또한, $\angle B_1AC_1$의 이등분선이 선분 B_1C_1과 만나는 점이 D_1이므로 $\overline{AB_1} : \overline{AC_1} = \overline{B_1D_1} : \overline{D_1C_1} = 3 : 2$

따라서,

$$\overline{B_1D_1} = \frac{3\sqrt{7}}{5},\quad \overline{D_1C_1} = \frac{2\sqrt{7}}{5}$$

또한, 삼각형 AD_1C_1의 외접원의 중심을 O라 하면

$\angle D_1OC_1 = \angle B_2OD_1 = \frac{\pi}{3}$이므로 두 삼각형 D_1OC_1, B_2OD_1은 모두 정삼각형이고 $\angle B_2D_1C_1 = \frac{2}{3}\pi$이다.

따라서, $\angle B_2D_1B_1 = \frac{\pi}{3}$이므로

$$S_1 = \frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{7}}{5}\times\frac{2\sqrt{7}}{5}\times\sin\frac{\pi}{3} = \frac{21\sqrt{3}}{50}$$

또한, 삼각형 $B_1D_1B_2$에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{B_1B_2}^2 = \left(\frac{3\sqrt{7}}{5}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{7}}{5}\right)^2 -2\times\frac{3\sqrt{7}}{5}\times\frac{2\sqrt{7}}{5}\times\cos\frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{91}{25}-\frac{42}{25} = \frac{49}{25}$$

이므로 $\overline{B_1B_2} = \frac{7}{5}$

따라서, $\overline{AB_2} = 3-\frac{7}{5} = \frac{8}{5}$이므로

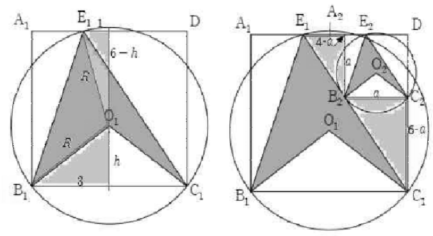
$\overline{AB_1} : \overline{AB_2} = 3 : \frac{8}{5} = 1 : \frac{8}{15}$

이때, 넓이의 비는 $1 : \frac{64}{225}$이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{21\sqrt{3}}{50}}{1-\frac{64}{225}} = \frac{27\sqrt{3}}{46}$$

84) [정답] ②

[해설]



$R^2 = 9+h^2 = 1+(6-h)^2$, $h = \frac{7}{3}$

$S_1 = \frac{1}{2}\times(6-h)\times6 = 11$

$\frac{a}{4-a} = \frac{6-a}{a}$이므로 $a = \frac{12}{5}$ㄴ

닮음비는 $r = \frac{\frac{12}{5}}{6} = \frac{2}{5}$

$$\therefore\ S = \frac{11}{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{275}{21}$$

85) [정답] ③

[해설]

직각삼각형 $C_1D_1F_1$에서 $\angle C_1D_1F_1 = \frac{\pi}{6}$, $\overline{C_1D_1} = 1$이므로

$$\overline{C_1F_1} = \overline{C_1D_1}\times\tan\frac{\pi}{6} = 1\times\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

직각삼각형 $C_1D_1E_1$에서 $\angle C_1D_1E_1 = \frac{\pi}{3}$이므로

$$\overline{C_1E_1} = \overline{C_1D_1}\times\tan\frac{\pi}{3} = 1\times\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

이때, $\overline{E_1F_1}=\overline{C_1E_1}-\overline{C_1F_1}=\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

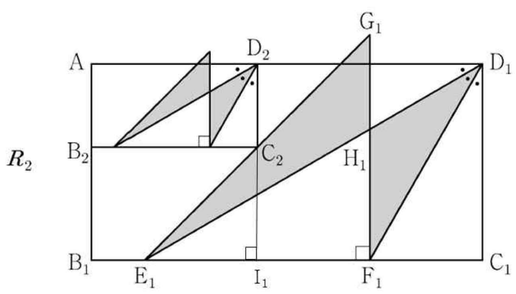
직각삼각형 $E_1F_1H_1$에서 $\angle H_1E_1F_1=\dfrac{\pi}{6}$이므로

$$\overline{F_1H_1}=\overline{E_1F_1}\times\tan\frac{\pi}{6}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}S_1&=\triangle E_1F_1G_1+\triangle E_1F_1D_1-2\times\triangle E_1F_1H_1\\&=\frac{1}{2}\times\overline{E_1F_1}\times\overline{F_1G_1}+\frac{1}{2}\times\overline{E_1F_1}\times\overline{C_1D_1}\\&\qquad-2\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{E_1F_1}\times\overline{F_1H_1}\right)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times1\\&\qquad-2\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{2}{3}\right)\\&=\frac{6-\sqrt{3}}{9}\end{aligned}$$

한편, $\overline{AB_2}:\overline{B_2C_2}=1:2$이므로 $\overline{AB_2}=k$,

$\overline{B_2C_2}=2k(k>0)$이라 하자.



점 C_2에서 선분 B_1C_1에 내린 수선의 발을 I_1이라 하면

$\overline{E_1I_1}=\overline{C_2I_1}=1-k$, $\overline{I_1C_1}=2-2k$이므로

$$(1-k)+(2-2k)=\sqrt{3}$$

$$\therefore k=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$$

그림 R_1에 색칠되어 있는 도형과 그림 R_2에 새로 색칠되어

있는 도형의 닮음비가 $1:\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$이므로 넓이의 비는

$1:\dfrac{4-2\sqrt{3}}{3}$이다.

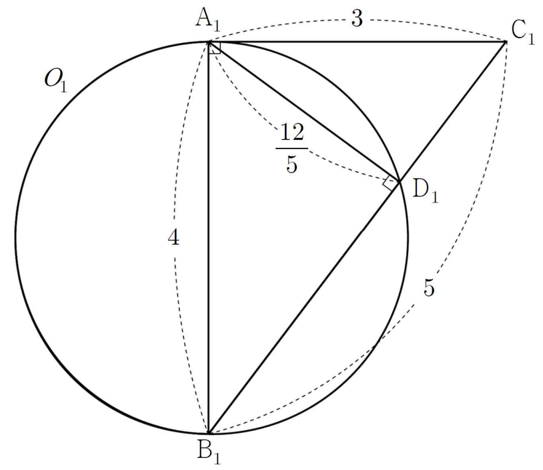
따라서 구하는 극한값은 첫째항이 $\dfrac{6-\sqrt{3}}{9}$이고, 공비가

$\dfrac{4-2\sqrt{3}}{3}$인 등비급수의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{6-\sqrt{3}}{9}}{1-\frac{4-2\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

86) [정답] ③

[해설]



원 O_1의 반지름의 길이가 2이므로

반원의 넓이는 2π

직각삼각형 $C_1A_1B_1$에서 $\overline{A_1C_1}=3$, $\overline{A_1B_1}=4$이므로

$\overline{B_1C_1}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

선분 A_1B_1은 원 O_1의 지름이므로 $\angle A_1D_1B_1=\dfrac{\pi}{2}$

삼각형 $C_1A_1B_1$에서

$\dfrac{1}{2}\times\overline{A_1B_1}\times\overline{A_1C_1}=\dfrac{1}{2}\times\overline{B_1C_1}\times\overline{A_1D_1}$이므로

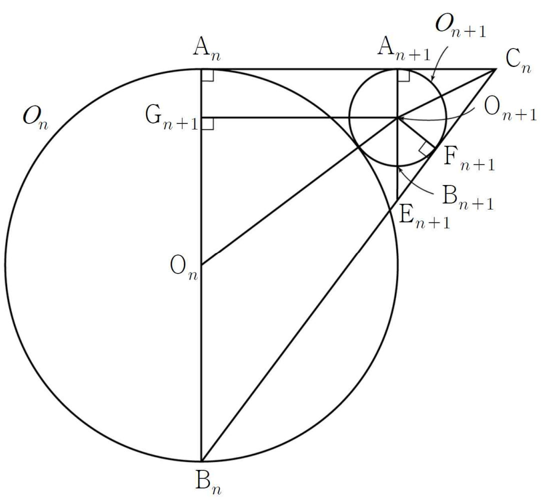
$\overline{A_1D_1}=\dfrac{12}{5}$

직각삼각형 $B_1D_1A_1$에서 $\overline{B_1D_1}=\sqrt{4^2-\left(\dfrac{12}{5}\right)^2}=\dfrac{16}{5}$

삼각형 $B_1D_1A_1$의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{12}{5}\times\dfrac{16}{5}=\dfrac{96}{25}$

그러므로 $S_1=2\pi+\dfrac{96}{25}$이다.

다음은 그림 R_{n+1}의 일부이다.



두 원 O_n과 O_{n+1}의 중심을 각각 O_n과 O_{n+1}이라 하고

반지름의 길이를 각각 r_n과 r_{n+1}이라 하자.

직선 $A_{n+1}B_{n+1}$이 선분 B_nC_n과 만나는 점을 E_{n+1}이라 하고,

원 O_{n+1}과 직선 B_nC_n이 접하는 점을 F_{n+1}이라 하자.

$\overline{A_{n+1}C_n}=a_n$이라 하면 $\overline{F_{n+1}C_n}=a_n$이고

삼각형 $A_nB_nC_n$과 삼각형 $A_{n+1}E_{n+1}C_n$은 서로 닮음이므로

$\overline{A_{n+1}C_n}:\overline{E_{n+1}C_n}=3:5$에서 $\overline{E_{n+1}C_n}=\frac{5}{3}a_n$이고

$\overline{E_{n+1}F_{n+1}}=\overline{E_{n+1}C_n}-\overline{F_{n+1}C_n}=\frac{2}{3}a_n$이다.

삼각형 $A_{n+1}E_{n+1}C_n$과 삼각형 $F_{n+1}E_{n+1}O_{n+1}$은 서로 닮음이므로

$\overline{O_{n+1}F_{n+1}}:\overline{E_{n+1}F_{n+1}}=3:4$에서 $a_n=2r_{n+1}$이다.

점 O_{n+1}에서 선분 A_nO_n에 내린 수선의 발을 G_{n+1}이라 하면

$$\overline{O_{n+1}G_{n+1}}=\overline{A_nC_n}-\overline{A_{n+1}C_n}=\frac{3}{2}r_n-2r_{n+1}$$

$\overline{O_nG_{n+1}}=r_n-r_{n+1}$, $\overline{O_nO_{n+1}}=r_n+r_{n+1}$이므로

직각삼각형 $O_nG_{n+1}O_{n+1}$에서

$$(r_n+r_{n+1})^2=(r_n-r_{n+1})^2+\left(\frac{3}{2}r_n-2r_{n+1}\right)^2$$

$$16{r_{n+1}}^2-40r_{n+1}r_n+9{r_n}^2=0$$

$$(4r_{n+1}-r_n)(4r_{n+1}-9r_n)=0$$

$r_n>r_{n+1}$이므로 $r_{n+1}=\frac{1}{4}r_n$

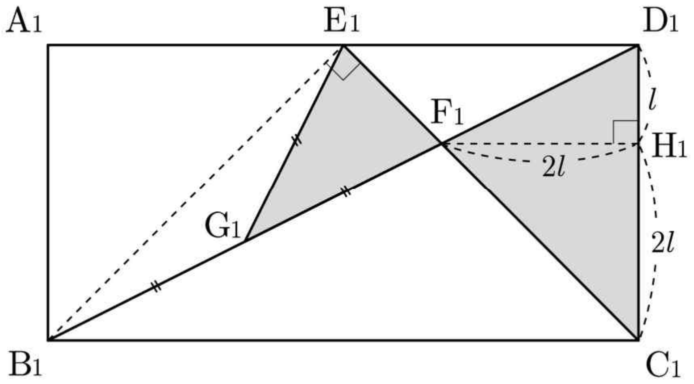
원 O_n과 원 O_{n+1}의 닮음비가 $4:1$이면 넓이의 비는 $16:1$이다.

따라서 S_n은 첫째항이 $2\pi+\frac{96}{25}$이고 공비가 $\frac{1}{16}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{2\pi+\frac{96}{25}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{32}{15}\pi+\frac{512}{125}$$

87) [정답] ②

[해설]



점 F_1에서 선분 C_1D_1에 내린 수선의 발을 H_1이라 하자.

$\overline{D_1H_1}=l(l>0)$이라 하면 $\overline{F_1H_1}=\overline{C_1H_1}=2lC_1D_1=3l=1$

$l=\frac{1}{3}$이므로 $\overline{D_1H_1}=\frac{1}{3}$, $\overline{F_1H_1}=\frac{2}{3}$

삼각형 $C_1D_1F_1$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times1\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

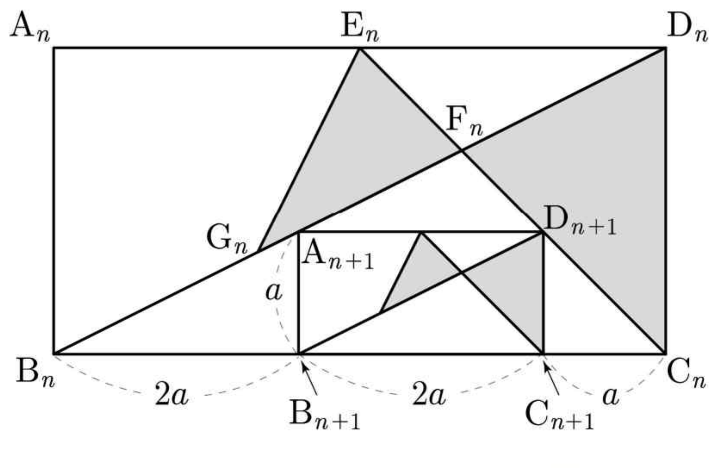
$\angle B_1E_1F_1=\frac{\pi}{2}$이고, $\overline{G_1E_1}=\overline{G_1F_1}$이므로 점 G_1은 삼각형 $B_1F_1E_1$의 외접원의 중심이다.

$\overline{B_1G_1}=\overline{G_1F_1}$이므로 삼각형 $G_1F_1E_1$의 넓이는 삼각형 $B_1F_1E_1$의 넓이의 $\frac{1}{2}$이다.

$\overline{B_1E_1}=\sqrt{2}$, $\overline{E_1F_1}=\frac{\sqrt{2}}{3}$이므로 삼각형 $G_1F_1E_1$의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{B_1E_1}\times\overline{E_1F_1}\right)=\frac{1}{4}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{1}{6}$$

$$S_1=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$



두 삼각형 $C_nD_nF_n$, $G_nF_nE_n$으로 만들어진 모양의 도형의 넓이를 T_n이라 하자.

$\overline{A_{n+1}B_{n+1}}=a(a>0)$이라 하면

$\overline{B_nB_{n+1}}=2a$, $\overline{B_{n+1}C_{n+1}}=2a$,

$\overline{C_{n+1}C_n}=a\overline{B_nC_n}=5a\overline{B_{n+1}C_{n+1}}=\frac{2}{5}\overline{B_nC_n}$

두 직사각형 $A_nB_nC_nD_n$, $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 닮음비는 $1:\frac{2}{5}$이므로 넓이의 비는 $1^2:\left(\frac{2}{5}\right)^2$이다.

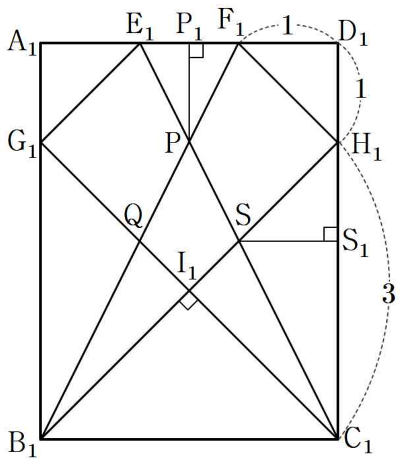
$T_{n+1}=\frac{4}{25}T_n$

수열 $\{T_n\}$은 첫째항이 $T_1=S_1=\frac{1}{2}$이고 공비가 $\frac{4}{25}$인 등비수열이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}T_n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{4}{25}}=\frac{25}{42}$

88) [정답] ⑤

[해설]



두 점 E_1, F_1은 변 A_1D_1의 삼등분점이므로

$\overline{A_1E_1}=\overline{E_1F_1}=\overline{F_1D_1}=1$

점 P에서 변 A_1D_1에 내린 수선의 발을 P_1이라 하면

$\triangle A_1B_1F_1 \backsim \triangle P_1PF_1$이고 $\overline{A_1F_1}:\overline{A_1B_1}=1:2$이므로

$\overline{P_1F_1}:\overline{P_1P}=1:2$, $\overline{P_1P}=1$

$\therefore \triangle A_1E_1G_1=\triangle E_1F_1P=\triangle F_1D_1H_1=\frac{1}{2}$ …… ㉠

$\overline{B_1C_1}=\overline{C_1H_1}=3$이므로 삼각형 $B_1C_1H_1$은 직각이등변삼각형이다.

따라서 삼각형 SS_1H_1도 직각이등변삼각형이므로 점 S에서 변 C_1D_1에 내린 수선의 발을 S_1, $\overline{SS_1}=a$라 하면

$\overline{S_1H_1}=a$, $\overline{S_1C_1}=3-a$

$\triangle E_1C_1D_1 \backsim \triangle SC_1S_1$이므로

$\overline{SS_1}:\overline{S_1C_1}=1:2$, $a:(3-a)=1:2$, $a=1$

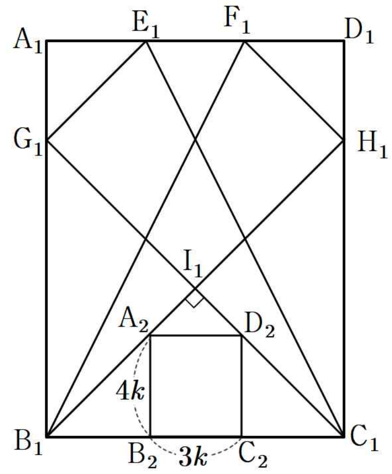
$\therefore \triangle GB_1G_1=\triangle SC_1H_1=\frac{1}{2}\times3\times1=\frac{3}{2}$ …… ㉡

삼각형 $I_1B_1C_1$은 직각이등변삼각형이고 $\overline{B_1C_1}=3$이므로

$\triangle I_1B_1C_1=\frac{9}{4}$ …… ㉢

따라서 색칠한 부분의 넓이는 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 넓이에서 ㉠, ㉡, ㉢의 넓이를 제외하면 되므로

$S_1=12-\left(3\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{2}+\frac{9}{4}\right)=\frac{21}{4}$



위의 그림과 같이 $\overline{A_2B_2}=4k$라 하면

$\overline{B_2C_2}=3k$, $\overline{B_1B_2}=\frac{3-3k}{2}$

삼각형 $A_2B_1B_2$는 직각이등변삼각형이므로

$4k=\frac{3-3k}{2}$, $k=\frac{3}{11}$

따라서 $\overline{A_2B_2}=\frac{12}{11}$이다.

두 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$는 닮음이고 닮음비는

$4:\frac{12}{11}=11:3$이다.

이상에서 S_n은 첫째항이 $\frac{21}{4}$, 공비가 $\left(\frac{3}{11}\right)^2=\frac{9}{121}$인 등비수열의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{21}{4}}{1-\frac{9}{121}}=\frac{363}{64}$$

89) [정답] ③

[해설]

그림 R_1에서 $\overline{E_1C_1}=\sqrt{2^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{17}}{2}$이고, 삼각형 $E_1C_1B_2$는 직각이등변삼각형이므로

$S_1=2\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2=\frac{17}{4}$

삼각형 $E_1B_1C_1$에서 $\overline{E_1B_1}=\overline{E_1C_1}=\frac{\sqrt{17}}{2}$, $\overline{B_1C_1}=1$이므로

$\angle B_1E_1C_1=\theta$라 하면 코사인법칙에 의해

$$\cos\theta=\frac{\frac{17}{4}+\frac{17}{4}-1}{2\times\frac{\sqrt{17}}{2}\times\frac{\sqrt{17}}{2}}=\frac{15}{17} \quad \cdots\cdots ㉠$$

삼각형 $A_2E_1B_2$에서 $\angle A_2E_1D_1=\angle B_2E_1C_1=\frac{\pi}{4}$이므로

$\angle A_2E_1B_2=\frac{\pi}{2}-\theta$이고,

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{8}{17}$ ($\because$ ㉠)

또한 $\overline{A_2E_1}=\overline{B_2E_1}=\sqrt{\frac{17}{2}}$ 이므로 코사인법칙에 의해

$\overline{A_2B_2}^2=\frac{17}{2}+\frac{17}{2}-2\times\sqrt{\frac{17}{2}}\times\sqrt{\frac{17}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=17-17\sin\theta=9$

$\therefore \overline{A_2B_2}=3$

따라서 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$과 $A_2B_2C_2D_2$의 닮음비가 $4:3$이므로 넓이의 비는 $16:9$이다.

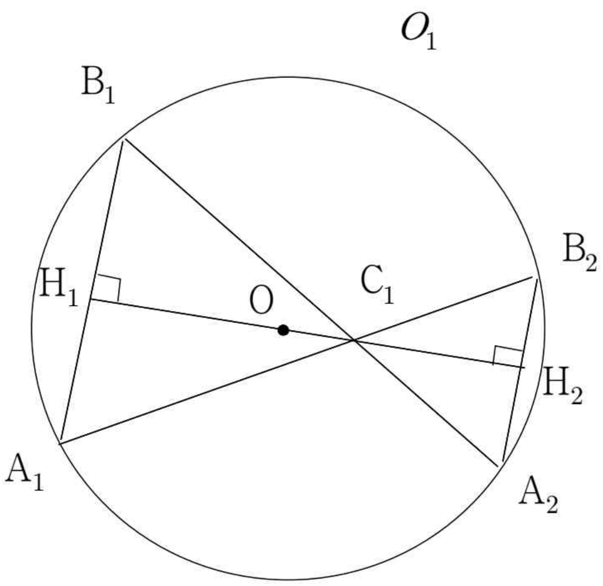
수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $S_1=\frac{17}{4}$, 공비가 $\frac{9}{16}$인 등비급수이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{17}{4}}{1-\frac{9}{16}}=\frac{68}{7}$$

90) [정답] ②

[해설]
원 O_1의 중심을 O라 하고 점 O에서 두 선분 A_1B_1, A_2B_2에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면 점 H_1은 선분 A_1B_1의 중점이고 점 H_2는 선분 A_2B_2의 중점이다.

또, $\overline{A_1B_1}\,/\!/\,\overline{A_2B_2}$이므로 세 점 H_1, O, H_2는 한 직선 위에 있다.



이때, $\angle A_1B_1A_2=\frac{\pi}{3}$이므로

$\overline{B_1C_1}=\overline{B_1H_1}\times\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}}$

$=1\times\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$

그러므로 삼각형 $A_1C_1B_1$은 한 변의 길이가 2인 정삼각형이다.

또,

$\angle A_1B_2A_2=\angle A_1B_1A_2=\frac{\pi}{3}$

$\angle A_2C_1B_2=\angle A_1C_1B_1=\frac{\pi}{3}$

이므로 삼각형 $C_1A_2B_2$는 정삼각형이다.

이때,

$\overline{C_1A_2}=\overline{B_1A_2}-\overline{B_1C_1}=3-2=1$

이므로 삼각형 $C_1A_2B_2$는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이다.

그러므로

$S_1=2\times(\triangle A_1A_2B_1-\triangle A_1C_1B_1)$

$=2\times\left(\frac{1}{2}\times2\times3\times\sin\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$=\sqrt{3}$

또, 두 삼각형 $A_1A_2B_1$, $A_2A_3B_2$에서

$\overline{A_1A_2}\,/\!/\,\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_1B_1}\,/\!/\,\overline{A_2B_2}$,

$\overline{A_2B_1}\,/\!/\,\overline{A_3B_2}$

이고

$A_1B_1=2$, $A_2B_2=1$

이므로 두 삼각형 $A_1A_2B_1$, $A_2A_3B_2$의 닮음비는 $2:1$이다.

따라서, 넓이의 비는 $4:1$이므로

$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{S_1}{1-\frac{1}{4}}$

$=\frac{\sqrt{3}}{\frac{3}{4}}$

$=\frac{4\sqrt{3}}{3}$