[한성은 RT7459번]

1. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 $g(0)=0$인 이차함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\{f(x)\}^2-3f(x)=g(x)$$

를 만족시킨다. $f(x)$가 $x=2$에서 최댓값 1을 가질 때, $g(6)$의 값은?1)

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

▷ $h(x)=x^2-3x$라 할 때, $h(f(x))=g(x)$이다. $y=h(x)$와 $y=g(x)$의 y축을 맞춰서 그려보자.

[한성은 SF6813번]

2. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 이차함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\{f(x)\}^3+f(x)=g(x)$$

를 만족시킨다. $f(x)$가 $x=2$에서 최솟값 -1을 갖고, $f(0)=1$일 때, $g(6)$의 값을 구하여라.2)

▷ $h(f(x))=g(x)$에서 $h(x)$를 삼차로 주면 $f(x)$를 직접 구하는 풀이를 막을 수 있다.

▷ 단순하게 $x=0$을 대입하여 $g(0)=2$를 뽑을 수 있다. 최대/최솟 등 뭔가 움직임을 읽어야 할 때 그래프가 필요.

[한성은 UA7882번]

3. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\{f(x)\}^2+2f(x)=ax^2+b$$

을 만족시킨다. $f(-1)=f(1)+4$일 때, ab의 값은?3)

① -10 ② -8 ③ -6
④ -4 ⑤ -2

▷ 건너가기. $h(f(x))=g(x)$에서 $h(x)$의 극값과 $g(x)$의 극값이 일치해야 건너갈 수 있다.

[한성은 QL4284번]

4. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\{f(x)\}^2+2f(x)=ax^4+bx^2$$

을 만족시킨다. $f(2)-f(-2)=2$일 때, ab의 값은?4)

① -4 ② -2 ③ -1
④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

▷ $f(0)$의 값은 결정할 수 없다.

▷ 우변을 [극댓값이 0인 사차함수] 정도로 줘서 귀찮게 하려다 내가 귀찮아짐.

[한성은 UO8985번]

5. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=x\times f'(g(x))$$

를 만족시킨다. $g(x)$의 최댓값이 1이고 $f'(g(0))=12$일 때, $f(4)$의 값을 구하여라.5)

▷ [2023학년도 수능 22번] 변형. $f(x)$가 $y=f'(x)$의 대칭축의 오른쪽에서 놀 수도 있고 왼쪽에서 놀 수도 있다.

[한성은 NP3354번]

6. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 음수인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(4)=f'(4)=0$
(나) $f'(g(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이다.
(다) $f(x)$의 극댓값과 $g(x)$의 극댓값이 같다.

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $h(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(h(x))=g(x)$$

를 만족시킬 때, $h(x)$의 최댓값은?6)

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

▷ 박스까지 읽으면 $f(x)$가 결정된다. 관련 내용을 마지막 [구하는 것]에 얹어봤는데, 좀 유치해 보이긴 함.

[한성은 SX9561번]

7. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 삼차함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$g(f(x)) = \frac{2x}{x^2+1}$$

를 만족시킨다.

$$f(0) = 0 > \lim_{x\to\infty} f(x)$$

이고 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \sqrt{3}$ 일 때, $g(6)$의 값을 구하여라.7)

▷ x가 $\pm\infty$로 달리지만 해석은 같은 방법으로.
만들다 보니까 $h(x) = \frac{2x}{x^2+1}$의 함숫값이 같고,
$f(x)$의 함숫값이 다른 것이 핵심이군.

[한성은 HF6808번]

8. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(g(x)) = x^2 e^{-x+2}$$

를 만족시킨다. $\{g(0)\}^2 - \lim_{x\to\infty}\{g(x)\}^2 = 15$일 때, $f(6)$의 값을 구하여라.8)

▷ $g(0) = a$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = b$라 할 때,
$a - b = 3$을 삼차함수의 극값에서 읽을 수 있다.

[한성은 UZ8375번]

9. 집합 $\{x | 0 < x < 2\pi\}$에서 연속인 함수 $f(x)$가 $0 < x < 2\pi$인 모든 실수 x에 대하여

$$\ln f(x) = f(x) \times a\sin x$$

를 만족시킨다. $\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty$일 때, 양수 a의 값은?9)

① $\frac{1}{2e}$ ② $\frac{1}{e}$ ③ 1
④ e ⑤ $2e$

▷ $\frac{\ln f(x)}{f(x)} = a\sin x$로 넘기고. $\pi < x < 2\pi$일 때
$f(x)$가 정의된다는 것이 중요한 조건이다.

[한성은 DW9972번]

10. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최솟값이 $g(0) = 0$인 사차함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\ln\left[\{f(x)\}^2 + 1\right] = g(x)$$

를 만족시킨다. $f(x)$가 $x = 2$에서 최솟값 -1을 가질 때, $g(6)$의 값은?10)

① $5\ln 2$ ② $6\ln 2$ ③ $7\ln 2$
④ $8\ln 2$ ⑤ $9\ln 2$

▷ $x \to -\infty$일 때와 $x \to \infty$일 때를 잘 째려보자.

[한성은 WJ0710번]

11. 최고차항의 계수가 1이고 $f(1)=2$인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(g(x))=4-2\cos\frac{\pi}{2}x$$

를 만족시킨다. $0<g(0)<g(4)$이고 $g(6)<g(10)$일 때, $\sum_{k=1}^{10}g(k)$의 값을 구하여라.[11)]

▷ 경로 선택 같은 문제 만들 수 있을 듯.

[한성은 MF6032번]

12. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x(x-3)^2$과 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(g(x))=1-\cos\frac{\pi}{2}x$$

를 만족시킨다. $g(6)=g(0)+4$일 때, $g'(3)$의 값은?[12)]

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{3}$ ③ $\frac{\pi}{2}$

④ $\frac{2\pi}{3}$ ⑤ $\frac{5\pi}{6}$

▷ 합성함수 미분법 얹어서
[음함수의 기울기]
출제하기 좋은 듯.

1) ③

실수 전체의 집합에서 $f(x)$가 정의되므로 $g(x)$의 최고차항의 계수가 음수이다.

함수 $g(x)$가 $x=2$에서 최솟값 -2를 가진다. $g(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2-2$이다.

2) 14

$g(0)=2$이고, 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 최솟값 -2를 가진다. $g(x)=(x-2)^2-2$이다.

3) ④

$h(x)=x^2+2x$, $g(x)=ax^2+b$라 하자. $g(-1)=g(1)$에서 $f(1)=-3$, $f(-1)=1$이므로 $g(1)=3$이다.

함수 $g(x)$의 최솟값이 $h(x)$의 최솟값인 -1이므로 $b=-1$이다. $g(x)=4x^2-1$이다.

4) ⑤

대충 비슷한 문항. $g(x)=ax^4+bx^2$이라 할 때, $g(-2)=g(2)=0$이고

함수 $g(x)$의 두 극솟값은 모두 -1이다. 연립하여 풀면 $g(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2$이다.

5) 16

[2023학년도 수능 22번] 참고. $f(x)=x(x-3)^2+ax$이다.

$f'(0)=12$를 얻으면 $f(x)=x(x-3)^2+3x$이다.

6) ①

(나)에서 $g(x)$의 극댓값이 4이고, $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 차이에서 $f(x)=(x-1)(x-4)^2$이다.

$h(x)$가 정의되려면 $x\to\pm\infty$일 때 $f(x)\to-\infty$인 각. $f(x)$의 최댓값은 $g(x)$가 최대일 때이다.

7) 99

최고차항의 계수는 양수이다. 음수면 각이 안 선다. $\lim_{x\to-\infty}f(x)=a$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=b$라 할 때, $g(f(0))=g(a)=g(b)=0$이다.

건너가려면 $g(x)$의 극솟값, 극댓값이 각각 -1과 1이 되어야 한다. $g(x)=\frac{1}{2}(x+\sqrt{3})x(x-\sqrt{3})$이다.

8) 20

함수 x^2e^{-x+2}의 극솟값이 0, 극댓값이 4이다. $f(x)$도 같은 극솟값, 극댓값을 가진다.

극댓값과 극솟값의 차이에서 $g(0)-\lim_{x\to\infty}g(x)=3$이다. $g(0)+\lim_{x\to\infty}g(x)=5$이므로 $f(x)=(x-1)(x-4)^2$이다.

9) ②

곡선 $y=\frac{\ln x}{x}$를 그리자. $\pi<x<2\pi$일 때 $f(x)$가 정의되므로 $f(\pi)=1$이다.

건너가야 하므로 극댓값 일치. $a=\frac{1}{e}$이다.

※ $f(x)$의 최솟값을 m이라 할 때 $\frac{\ln m}{m}=-\frac{1}{e}$이지만 문항에서 별 의미는 없다.

10) ⑤

$g(x)$가 극대일 때 $f(x)$가 최소이다. 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극댓값 $\ln 2$를 갖는다.

$f(x)$의 극솟값이 0이므로 $g(x)$의 두 극솟값이 모두 0이다. $g(x)=\frac{\ln 2}{16}\times x^2(x-4)^2$이다.

11) 32

$f(x)$의 극댓값이 6, 극솟값이 2이고, 성질 좀 치면 $f(x)=(x-1)(x-4)^2+2$이다. 경로를 째려보면

$g(1)=3-\sqrt{3}$, $g(2)=2$, $g(3)=3$, $g(4)=4$, $g(5)=3$, $g(6)=2$, $g(7)=3$, $g(8)=4$, $g(9)=3+\sqrt{3}$, $g(10)=5$

이다. 답은 32이다.

12) ②

$f(g(0))=0$에서, $g(0)$의 값은 0 또는 3이고, $f(g(6))=2$에서 $g(6)$의 값은 1 또는 4이다.

$g(6)=g(0)+4$에서 $g(6)=4$, $g(0)=0$이다. 경로를 째려보면 $g(3)=2$이다.

미분하여 $f'(g(x))g'(x)=\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x$이다. $x=3$을 대입하면 $f'(2)g'(3)=-\frac{\pi}{2}$에서 $g'(3)=\frac{\pi}{3}$이다.