출제 및 해설 : 띵수학 연구실 (정다움, 양민석, 김서천)

공통과목				선택과목			
				확률과 통계		미적분	
문항번호	정답	문항번호	정답	문항번호	정답	문항번호	정답
1	⑤	12	②	23	③	23	①
2	③	13	⑤	24	②	24	③
3	②	14	①	25	②	25	②
4	①	15	⑤	26	⑤	26	④
5	①	16	9	27	④	27	⑤
6	③	17	18	28	⑤	28	③
7	④	18	15	29	189	29	14
8	③	19	30	30	230	30	156
9	③	20	17				
10	①	21	40				
11	②	22	10				

문항의 이용을 원하시거나 모의고사 출제 관련 문의사항이 있으신 경우 math_dding@hanmail.net 로 연락주시기 바랍니다.

해설강의는 띵수학 유튜브에서 찾아보실 수 있습니다!
https://www.youtube.com/c/띵수학mathdding/playlists

2411 MTM 공통 주요 문항 해설 강의

공통과목

1. 정답) ⑤ [수학Ⅰ - 지수함수와 로그함수]

해설 : $2^{2+\sqrt{8}} \times 4^{1-\sqrt{2}} = 2^{2+2\sqrt{2}+2-2\sqrt{2}} = 2^4 = 16$

2. 정답) ③ [수학Ⅱ - 미분]

해설 : 함수 $f(x) = 2x^4 - x^2$의 도함수는 $f'(x) = 8x^3 - 2x$이다.

따라서 구하는 값은

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = f'(2)$$

$$= 8 \times 2^3 - 2 \times 2$$

$$= 60$$

이다.

3. 정답) ② [수학Ⅰ - 수열]

해설 : $\sum_{k=1}^{20} a_k = \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=11}^{20} a_k$

$$= \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=11}^{20} (-k+8)$$

$$= \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} (-k-2)$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (-2)$$

$$= 10 \times (-2)$$

$$= -20$$

4. 정답) ① [수학Ⅱ - 적분]

해설 : 곡선 $y = x^2 - 2x - 2$와 직선 $y = -x$의 교점의 x좌표는 방정식 $x^2 - 2x - 2 = -x$의 실근과 같다.

$x^2 - 2x - 2 = -x$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x+1)(x-2) = 0$

$\therefore x = -1$ 또는 $x = 2$

따라서 곡선 $y = x^2 - 2x - 2$와 직선 $y = -x$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{-1}^{2}|(x^2-2x-2)-(-x)|dx=\int_{-1}^{2}|x^2-x-2|dx$$
$$=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{2}$$
$$=\frac{9}{2}$$

이다.

5. 정답) ① [수학Ⅰ - 삼각함수]

해설 : $\sin(-\theta)+1=3\cos^2\theta$

$-\sin\theta+1=3(1-\sin^2\theta)$

$3\sin^2\theta-\sin\theta-2=0$

$(3\sin\theta+2)(\sin\theta-1)=0$

$\therefore \sin\theta=-\frac{2}{3}$ $(\because \pi<\theta<\frac{3\pi}{2})$

$\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$에서 $\cos\theta<0$이므로

구하는 값은 $\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$이다.

6. 정답) ③ [수학Ⅱ - 함수의 극한과 연속]

해설 : $t=-x$라 할 때,

$\lim_{x\to1+}f(-x)=\lim_{t\to-1-}f(t)=2$이다.

$\lim_{x\to2-}|f(x)|=\lim_{x\to2-}\{-f(x)\}$

$=-\lim_{x\to2-}f(x)$

$=1$

이고, $\lim_{x\to2+}|f(x)|=\lim_{x\to2+}f(x)=1$이다.

즉, 함수 $|f(x)|$의 $x=2$에서의 좌극한과 우극한이 같으므로

$\lim_{x\to2-}|f(x)|=\lim_{x\to2+}|f(x)|=\lim_{x\to2}|f(x)|$에서

$\lim_{x\to2}|f(x)|=1$이다.

따라서 구하는 값은 $\lim_{x\to1+}f(-x)+\lim_{x\to2}|f(x)|=2+1=3$이다.

7. 정답) ④ [수학Ⅰ - 지수함수와 로그함수]

해설 : 두 곡선 $y=\log_a(4x-3)$, $y=\log_{\sqrt{a}}x$의 교점의 x좌표는

방정식 $\log_a(4x-3)=\log_{\sqrt{a}}x$의 실근과 같다.

$\log_a(4x-3)=\log_{\sqrt{a}}x$

$\log_a(4x-3)=\log_a x^2$

$4x-3=x^2$

$x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

이때, 진수 조건에 의하여 $x>\frac{3}{4}$이므로 두 실근 모두 교점의 x좌표이다.

즉, 직선 AB는 두 점 $(1,0)$, $(3,2\log_a 3)$을 지나는 직선이므로

직선 AB의 방정식은

$y=\frac{2\log_a 3-0}{3-1}(x-1)=\log_a 3\times x-\log_a 3$이다.

위 직선이 점 $(-1,-6)$을 지나므로 $x=-1$, $y=-6$을 대입하면

$-6=-\log_a 3-\log_a 3$

$\log_a 3=3$

$\therefore a=3^{\frac{1}{3}}$

8. 정답) ③ [수학Ⅱ - 미분]

해설 : 함수 $f(x)=x^3-2x+1$라 할 때, 도함수는 $f'(x)=3x^2-2$이다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,2)$에서의 접선의 기울기는

$\therefore f'(-1)=1$ …… ㉠

같은 방법으로

함수 $g(x)=x^4+ax-1$라 할 때, 도함수는 $g'(x)=4x^3+a$이다.

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1,a)$에서의 접선의 기울기는

$\therefore g'(1)=4+a$ …… ㉡

이때, 두 접선이 평행하므로 기울기가 같다.

즉, $1=4+a$이므로 $a=-3$이다. ($\because$ ㉠, ㉡)

9. 정답) ③ [수학Ⅱ - 적분]

해설 : $\int_{-1}^{x}f(t)dt=(x-1)f(x)+2x^3-ax^2$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+(x-1)f'(x)+6x^2-2ax$이고,

위 식을 정리하면

$(x-1)f'(x)=-6x^2+2ax$이다.

$x\neq1$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=\frac{-6x^2+2ax}{x-1}$

$f'(x)$는 다항함수이므로 $f'(1)$의 값이 존재한다.

즉, $\lim_{x\to1}f'(x)=\lim_{x\to1}\frac{-6x^2+2ax}{x-1}$이 수렴하므로

$\lim\limits_{x\to1}(-6x^2+2ax)=0$에서

$-6+2a=0$

$\therefore\ a=3,\ f'(x)=\dfrac{-6x^2+6x}{x-1}=-6x$

㉠에 $x=-1$을 대입하면

$0=-2f(-1)-5$

$\therefore\ f(-1)=-\dfrac{5}{2}$ …… ㉡

이때, $f(x)=\displaystyle\int f'(x)dx$

$=\displaystyle\int(-6x)dx$

$=-3x^2+C$ (C는 적분상수)

에서 $f(-1)=-3+C$이고 ㉡과 연립하면

$\therefore\ C=\dfrac{1}{2},\ f(x)=-3x^2+\dfrac{1}{2}$

따라서 구하는 값은 $a+f(1)=3-\dfrac{5}{2}=\dfrac{1}{2}$이다.

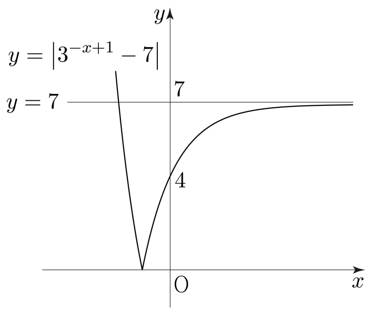
10. 정답) ① [수학Ⅰ - 지수함수와 로그함수]

해설 : 함수 $y=3^{-x+1}-7$은 실수 전체의 집합에서 감소하고

함수 $y=3^{-x+1}-7$의 그래프는

점 $(0,\ -4)$를 지나고 직선 $y=-7$을 점근선으로 갖는다.

이에 따라 함수 $y=\left|3^{-x+1}-7\right|$의 그래프는 아래 그림과 같다.



그림을 통해, 함수 $y=\left|3^{-x+1}-7\right|$의 그래프는

점 $(0,4)$를 지나고 직선 $y=7$을 점근선으로 가짐을 알 수 있다.

주어진 방정식의 서로 다른 양의 실근의 개수가 1이므로

직선 $y=k$와 제1사분면에서 교점의 개수도 1이다.

위 그림에 따라 $4<k<7$이므로

이를 만족시키는 모든 정수 k의 값의 합은 $5+6=11$이다.

11. 정답) ② [수학Ⅰ - 삼각함수]

해설 : 점 C는 선분 AB를 지름으로 하는 반원 내부의 점이므로

$0<\angle\mathrm{BAC}<\dfrac{\pi}{2}$이고 $\sin(\angle\mathrm{BAC})=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$에서

$\cos(\angle\mathrm{BAC})=\sqrt{1-\sin^2(\angle\mathrm{BAC})}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$이다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BC}}^2=4^2+(\sqrt{10})^2-\left(\boxed{\text{(가)}}\right)$

$=4^2+(\sqrt{10})^2-\left(2\times4\times\sqrt{10}\times\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\right)$

$=26-24$

$=2$

이고, $\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{2}$이다.

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{10}}{10}}=\frac{\sqrt{10}}{\sin(\angle\mathrm{ABC})}$$

$\sin(\angle\mathrm{ABC})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

이므로 $\angle\mathrm{ABC}=\boxed{\text{(나)}}=\dfrac{\pi}{4}$이다.

직각삼각형 ABE에서 삼각비에 의하여

$\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{AB}}\times\cos\dfrac{\pi}{4}$이고,

$=4\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$=2\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{CE}}=\overline{\mathrm{BE}}-\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{2},\ \angle\mathrm{ABE}=\angle\mathrm{CDE}=\dfrac{\pi}{4}$이므로

삼각형 CDE의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 할 때,

삼각형 CDE에서 사인법칙에 의하여

$$2R=\frac{\overline{\mathrm{CE}}}{\sin(\angle\mathrm{CDE})}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2$$

에서 $R=1$이다.

따라서 삼각형 CDE의 외접원의 넓이는

$\pi R^2=\boxed{\text{(다)}}=\pi$

이다.

위 박스 내용에 의하여 $p=24,\ q=\dfrac{\pi}{4},\ r=\pi$이고

구하는 값은 $\dfrac{p\times q}{r}=\dfrac{24\times\frac{\pi}{4}}{\pi}=6$이다.

12. 정답) ② [수학Ⅱ - 함수의 극한과 연속 + 적분]

해설 : 주어진 항등식을 정리하면

$\{g(x)\}^2 - |x|g(x) = 1 - |x|$

$\{g(x)\}^2 - |x| \times g(x) + |x| - 1 = 0$

$\{g(x) - 1\}\{g(x) - |x| + 1\} = 0$

$\therefore g(x) = 1$ 또는 $g(x) = |x| - 1$

함수 $g(x)$가 최솟값 -1을 갖고, 실수 전체의 집합에서 연속이므로

닫힌구간 $[-2, 2]$에서 $g(x) = |x| - 1$이다.

이때, $\displaystyle\int_{-2}^{2} xg(x)\,dx = \int_{0}^{2} x(x-1)\,dx + \int_{-2}^{0} x(-x-1)\,dx$

$\displaystyle = \int_{0}^{2}(x^2 - x)\,dx + \int_{-2}^{0}(-x^2 - x)\,dx$

$\displaystyle = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 + \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^0$

$\displaystyle = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}$

$= 0$

이다.

닫힌구간 $[-3, -2]$에서 $g(x) = 1$ 또는 $g(x) = -x - 1$이다.

구간 내에서 $x \ge -x^2 - x$이므로

$g(x) = 1$일 때, $\displaystyle\int_{-3}^{-2} xg(x)\,dx = \int_{-3}^{-2} x\,dx$

$g(x) = -x - 1$일 때, $\displaystyle\int_{-3}^{-2} xg(x)\,dx = \int_{-3}^{-2}(-x^2 - x)\,dx$이고

$\displaystyle\int_{-3}^{-2} x\,dx \ge \int_{-3}^{-2}(-x^2 - x)\,dx$이다.

즉, $\displaystyle\int_{-3}^{-2} xg(x)\,dx$의 최댓값은 $\displaystyle\int_{-3}^{-2} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{-2} = -\frac{5}{2}$이다.

닫힌구간 $[2, 3]$에서 $g(x) = 1$ 또는 $g(x) = x - 1$이다.

구간 내에서 $x \le x^2 - x$이므로

$g(x) = 1$일 때, $\displaystyle\int_{2}^{3} xg(x)\,dx = \int_{2}^{3} x\,dx$

$g(x) = x - 1$일 때, $\displaystyle\int_{2}^{3} xg(x)\,dx = \int_{2}^{3}(x^2 - x)\,dx$이고

$\displaystyle\int_{2}^{3} x\,dx \le \int_{2}^{3}(x^2 - x)\,dx$이다.

즉, $\displaystyle\int_{2}^{3} xg(x)\,dx$의 최댓값은

$\displaystyle\int_{2}^{3}(x^2 - x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_2^3 = \frac{19}{3} - \frac{5}{2} = \frac{23}{6}$이다.

$\displaystyle\int_{-3}^{3} xg(x)\,dx$의 최댓값은 각 구간 내에서의 적분값의 최댓값의

합이므로 구하는 값은

$\displaystyle\int_{-3}^{3} xg(x)\,dx = \int_{-3}^{-2} xg(x)\,dx + \int_{-2}^{2} xg(x)\,dx + \int_{2}^{3} xg(x)\,dx$

$\displaystyle = -\frac{5}{2} + 0 + \frac{23}{6}$

$\displaystyle = \frac{4}{3}$

이다.

13. 정답) ⑤ [수학Ⅱ - 적분]

해설 : 시각 $t(t \ge 0)$에서 점 P의 위치를 $x(t)$라 할 때,

$\displaystyle x(t) = \int v(t)\,dt = t^4 - 4t^3 - \frac{a}{2}t^2 + C$이고, ($C$는 적분상수)

두 점 A, P 사이의 거리는 $|x(t) - 1|$이다.

$t \ge 0$일 때, 방정식 $v(t) = 0$, 즉 $t(4t^2 - 12t - a) = 0$에서

$\displaystyle \therefore t = 0$ 또는 $\displaystyle t = \frac{3 + \sqrt{9+a}}{2}$ $(\because a > 0)$

이므로 함수 $x(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	$\frac{3+\sqrt{9+a}}{2}$	$\cdots$
$v(t)$	0	$-$	0	$+$
$x(t)$	극대	↘	극소	↗

두 점 A, P 사이의 거리가 시각 $t = 4$에서만 최소이므로

거리 $x(t)$가 $t = 4$에서 극솟값을 갖고,

$|x(4) - 1|$이 0이 아니므로 $x(4) > 1$이다.

즉, $\displaystyle\frac{3 + \sqrt{9+a}}{2} = 4$에서 $a = 16$이다.

$x(4) = -128 + C$에서 $C > 129$이고, $(\because x(4) > 1)$

$|x(4) - 1|$이 자연수이므로 C도 자연수이다.

$x(0) = C$이므로

시각 $t = 0$에서의 점 P의 위치의 최솟값은 130이다.

14. 정답) ① [수학Ⅰ - 수열]

해설 : 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d(d는 자연수)라 하면

일반항은 $a_n = a_1 + (n-1)d$라 할 때,

$S_{k+1} = a_{k-1} + a_{k+2}$

$S_{k+1} = (a_k - d) + (a_{k+1} + d)$

$= a_k + a_{k+1}$

즉, $S_{k+1}-a_k-a_{k+1}=0$

$S_{k-1}=0$

$a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}=0$

$\dfrac{(k-1)\{2a_1+(k-2)d\}}{2}=0$

$2a_1+(k-2)d=0\ (\because k-1>0)$

$\therefore a_1=-\dfrac{(k-2)d}{2},\ a_n=\left(n-\dfrac{k}{2}\right)d$ …… ㉠

$S_{k+2}=6k$에서

$S_{k-1}+a_k+a_{k+1}+a_{k+2}=6k$

$3a_{k+1}=6k\ (\because S_{k-1}=0,$ ㉠$)$

$a_{k+1}=2k$

$\left(\dfrac{k}{2}+1\right)d=2k\ (\because$ ㉠$)$

$\therefore d=\dfrac{4k}{k+2}$

이때, d는 자연수이므로 가능한 k와 d의 값은

$d=2,\ k=2$ 또는 $d=3,\ k=6$이고

$k\ge 3$이므로 $d=3,\ k=6,\ a_n=3n-9$이다.

따라서 구하는 값은

$k+S_{10}=6+\dfrac{-6+21}{2}\times 10=81$이다.

15. 정답) ⑤ [수학Ⅱ - 미분]

해설 : ㄱ. $f(x)=\begin{cases}-x^4+x^3+tx-t & (x\ge 0)\\ -x^4+x^3-tx-t & (x<0)\end{cases}$이고

$x\ne 0$에서 정의된 도함수 $f'(x)$는

$f'(x)=\begin{cases}-4x^3+3x^2+t & (x\ge 0)\\ -4x^3+3x^2-t & (x<0)\end{cases}$이다.

이때, $\lim\limits_{x\to 0-}f'(x)=-t<0,\ \lim\limits_{x\to 0+}f'(x)=t>0$이고

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이다.

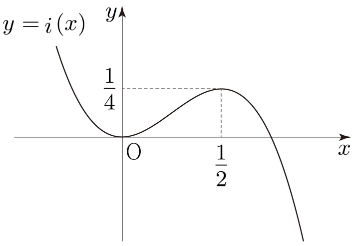
ㄴ. 함수 $i(x)=-4x^3+3x^2$에 대하여

도함수 $i'(x)=-12x^2+6x=-6x(2x-1)$이므로

함수 $i(x)$는 $x=0$에서 극솟값 0,

$x=\dfrac{1}{2}$에서 극댓값 $\dfrac{1}{4}$을 갖는다.

이때, 함수 $y=i(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



그림을 통해

$x>0$일 때, 방정식 $i(x)=-t$는 오직 하나의 실근을 갖고

$x<0$일 때, 방정식 $i(x)=t$도 오직 하나의 실근을 가짐을

알 수 있다. $(\because t>0)$

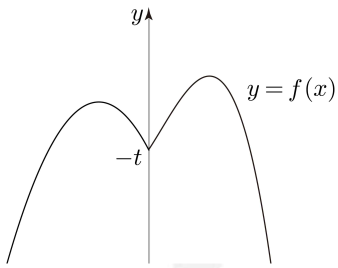
즉, 도함수 $f'(x)$가 $+\to-$로 부호변화를 갖는 x가 두 구간

$(-\infty,0)$, $(0,\infty)$에 각각 하나씩 존재하므로

함수 $f(x)$는 두 구간 $(-\infty,0)$, $(0,\infty)$에서 각각 극댓값을

오직 하나씩 갖는다.

이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



$g(t)$는 구간 $(-\infty,0)$에서의 함수 $f(x)$의 최댓값이고

구간 $(-\infty,0)$에서 함수 $f(x)$는 오직 하나의 극댓값을

가지므로 $g(t)>f(0)$이다.

이때, 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극대이면

$i(1)=-t$에서 $t=1$이다.

따라서 $t=1$일 때, $g(1)>f(0)=-1$이므로

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극대일 때, $g(t)>-1$이다. (참)

ㄷ. 구간 $(-\infty,0)$에서 $f(x)=-x^4+x^3-tx-t$이고

$f'(x)=-4x^3+3x^2-t$이다.

ㄴ에서 구한 함수 $y=i(x)$의 그래프를 참고할 때,

구간 $(-\infty,0)$에서 도함수 $f'(x)$는 $+\to-$로 부호변화를

갖는 x가 오직 하나 존재하고, 이를 $x=\alpha$라 하자.

이때, $f'(\alpha)=-4\alpha^3+3\alpha^2-t=0$에서

$t=-4\alpha^3+3\alpha^2$이다. $(\alpha<0,\ t>0)$

구간 $(-\infty,0)$에서 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서만 극댓값을 갖고,

극솟값을 갖지 않으므로 함수 $f(x)$의 최댓값은

$f(\alpha) = -\alpha^4 + \alpha^3 - t\alpha - t$

$= -\alpha^4 + \alpha^3 - (-4\alpha^3 + 3\alpha^2)\alpha - (-4\alpha^3 + 3\alpha^2)$

$= 3\alpha^4 + 2\alpha^3 - 3\alpha^2$

이고, $g(t) = 3\alpha^4 + 2\alpha^3 - 3\alpha^2$이다.

구간 $(-\infty, 0)$에서 정의된 함수 $h(x)$를

$h(x) = 3x^4 + 2x^3 - 3x^2$이라 할 때,

$h'(x) = 12x^3 + 6x^2 - 6x = 6(x+1)x(2x-1)$에서

도함수 $h'(x)$는 $x = -1$에서 $- \rightarrow +$로 부호변화를 갖는다.

이에 따라 함수 $h(x)$는 $x = -1$에서 극솟값을 갖고, 극댓값을

갖지 않으므로 함수 $h(x)$의 최댓값은 $h(-1) = -2$이다.

이에 따라 $3\alpha^4 + 2\alpha^3 - 3\alpha^2$는 $\alpha = -1$에서 최솟값 -2를 갖고

$\alpha = -1$일 때, $t = -4(-1)^3 + 3(-1)^2 = 7$이므로

함수 $g(t)$는 $t = 7$에서 최솟값 -2를 갖는다. (참)

16. 정답) 9 [수학Ⅱ - 적분]

해설 : $f'(x) = 4x^3 + 7$의 양변을 부정적분하면

$f(x) = x^4 + 7x + C$이다. (C는 적분상수)

$f(0) = 1$이므로 $C = 1$이다.

따라서 구하는 값은 $f(1) = 1 + 7 + 1 = 9$이다.

17. 정답) 18 [수학Ⅰ - 수열]

해설 : 등비중항의 성질에 의하여

$(a_2 \times a_6)^{\frac{1}{3}} = (a_4{}^2)^{\frac{1}{3}} = a_4{}^{\frac{2}{3}} = 4$이므로

$a_4 = 8$이다.

$a_3 = 3$, $a_4 = 8$에서 등비수열 $\{a_n\}$의 공비는 $\dfrac{a_4}{a_3} = \dfrac{8}{3}$이고,

구하는 값은 $16 \times a_2 = 16 \times \dfrac{a_3}{\frac{8}{3}} = 16 \times \dfrac{9}{8} = 18$이다.

18. 정답) 15 [수학Ⅰ - 지수함수와 로그함수]

해설 : 2 이상의 자연수 n에 대하여 $f(n)$의 n제곱근 중 실수인 것이

존재하지 않으려면 n이 짝수이고, $f(n) < 0$이어야 한다.

이때, $f(2) = 0$이므로

$f(4) < 0$, $f(6) < 0$, $f(8) \geq 0$, $f(10) \geq 0$, $\cdots$ 이다.

이를 만족시키는 정수 k는

$f(6) = 24 - 4k < 0$에서 $k > 6$이고

$f(8) = 48 - 6k \geq 0$에서 $k \leq 8$이므로

$k = 7$ 또는 $k = 8$이다.

따라서 구하는 값은 $7 + 8 = 15$이다.

19. 정답) 30 [수학Ⅱ - 함수의 극한과 연속]

해설 : $x \neq -1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) = \dfrac{2x^3 + ax + b}{(x+1)^2}$이고

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$x = -1$에서도 연속이다.

즉, $f(-1) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^3 + ax + b}{(x+1)^2}$에서

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^3 + ax + b}{(x+1)^2}$이 수렴해야하므로

$\lim\limits_{x \to -1} (2x^3 + ax + b) = 0$이고, $b = a + 2$이다.

$$\lim_{x \to -1} \frac{2x^3 + ax + a + 2}{(x+1)^2} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(2x^2 - 2x + a + 2)}{(x+1)^2}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{2x^2 - 2x + a + 2}{x+1}$$

에서 같은 방법으로

$\lim\limits_{x \to -1} (2x^2 - 2x + a + 2) = 0$이고, $a = -6$, $b = -4$이다.

$$\lim_{x \to -1} \frac{2x^3 - 6x - 4}{(x+1)^2} = \lim_{x \to -1} \frac{2(x+1)^2(x-2)}{(x+1)^2}$$

$$= \lim_{x \to -1} (2x - 4) = -6$$

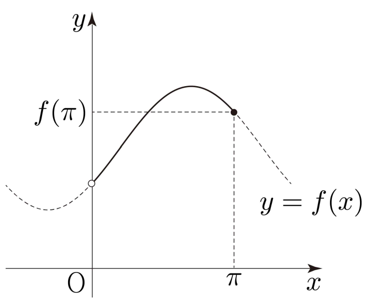
에서 $f(-1) = -6$이고

구하는 값은 $ab - f(-1) = (-6)(-4) - (-6) = 30$이다.

20. 정답) 17 [수학Ⅰ - 삼각함수]

해설 : a의 범위에 따라 케이스를 나누면

(ⅰ) $0 < a \leq \dfrac{\pi}{2}$일 때

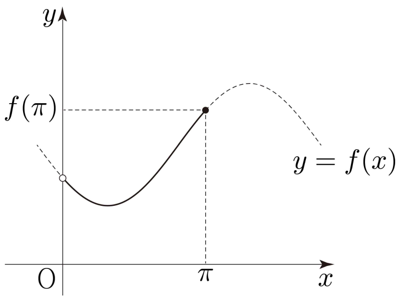


그림을 통해, 구간 $(0, \pi]$에서 함수 $f(x)$는 최댓값 3을 갖고,

최솟값은 갖지 않음을 알 수 있다.

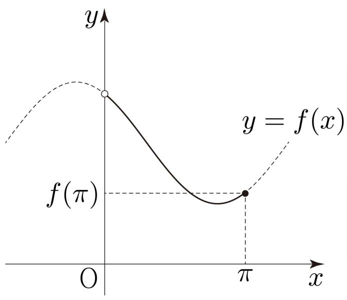
이는 최댓값과 최솟값이 모두 존재한다는 조건에 모순이다.

(ii) $\frac{\pi}{2} < a \le \pi$일 때



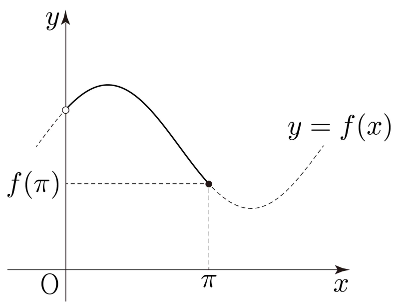
그림을 통해, 구간 $(0,\ \pi]$에서 함수 $f(x)$는 최댓값 $f(\pi)$를 갖고, 최솟값 1을 가짐을 알 수 있다.
이때, $f(\pi) = \sin(\pi - a) + 2 < 3$이므로
$M \times m = f(\pi) < 3$이고, $M \times m = 5$에 모순이다.

(iii) $\pi < a \le \frac{3\pi}{2}$일 때



그림을 통해, 구간 $(0,\ \pi]$에서 함수 $f(x)$는 최댓값은 갖지 않고, 최솟값 1을 가짐을 알 수 있다.
이는 최댓값과 최솟값이 모두 존재한다는 조건에 모순이다.

(iv) $\frac{3\pi}{2} < a < 2\pi$일 때



그림을 통해, 구간 $(0,\ \pi]$에서 함수 $f(x)$는 최댓값 3을 갖고, 최솟값 $f(\pi)$를 가짐을 알 수 있다.

이때, $M \times m = 5$에서 $m = f(\pi) = \frac{5}{3}$이다.

$f(\pi) = \sin(\pi - a) + 2 = \frac{5}{3}$에서

$\sin(\pi - a) = -\frac{1}{3}$

$\therefore \sin a = -\frac{1}{3}$

(i) ~ (iv)에 의하여 $\frac{3\pi}{2} < a < 2\pi$, $\sin a = -\frac{1}{3}$이다.

$\frac{3\pi}{2} < a < 2\pi$에서 $\cos a > 0$이므로

$\cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$이다.

따라서 $\cos a + \tan a = \frac{5}{12}\sqrt{2}$에서 $p = 12$, $q = 5$이고

구하는 값은 $p + q = 17$이다.

21. 정답) 40 [수학Ⅰ - 수열]

해설 : $a_1 = a$, $a_2 = b$라 할 때, 조건 (가)에 의하여 항을 나열하면

$a_3 = b - a$, $a_4 = -a$, $a_5 = -b$, $a_6 = a - b$, $a_7 = a$, $a_8 = b \cdots$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 6개의 항을 주기로 값이 반복된다.

즉, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = a_{n+6}$이다. …… ㉠

조건 (나)에 의하여

$a_3 = a_5$

$b - a = -b$

$\therefore 2b = a$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 아래 표와 같다.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
a_n	$2b$	b	$-b$	$-2b$	$-b$	b	$2b$	b	$\cdots$

$\sum_{k=1}^{6} a_k = 2b + b - b - 2b - b + b = 0$이고 …… ㉡

$\sum_{k=1}^{6} k a_k = 2b + 2b - 3b - 8b - 5b + 6b = -6b$이다. …… ㉢

이때, 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=6n+1}^{6n+6} k a_k = (6n+1)a_{6n+1} + \cdots + (6n+6)a_{6n+6}$$

$$= (6n+1)a_1 + \cdots + (6n+6)a_6 \ (\because ㉠)$$

$$= 6n \times \sum_{k=1}^{6} a_k + \sum_{k=1}^{6} k a_k$$

$$= -6b \ (\because ㉡, ㉢)$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{50} ka_k = \sum_{k=1}^{6} ka_k + \sum_{k=7}^{12} ka_k + \cdots + \sum_{k=43}^{48} ka_k + 49a_{49} + 50a_{50}$$
$$= (-6b)\times 8 + 49a_1 + 50a_2$$
$$= -48b + 98b + 50b$$
$$= 100b$$

이다. $\sum_{k=1}^{50} ka_k = 20$이므로

$100b = 20$

$\therefore\ b = \frac{1}{5}$

따라서 구하는 값은 $100\times a_7 = 100\times a_1 = 100\times\frac{2}{5} = 40$이다.

22. 정답 : 10 [수학Ⅱ 미분]

해설 : 주어진 항등식을 함수 $g(x)$에 대하여 나타내면

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{|f(x)|}{2} & (x < 0) \\ x - |f(x)| & (x \geq 0) \end{cases}$$ 이다.

함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

(1) $x=3$에서 미분가능하고

(2) $x=0$에서 연속이며

(3) $x=0$에서 미분가능하다.

(1)의 경우

$x=3$에서 $g(x) = x - |f(x)|$가 미분가능하므로

$|f(x)|$도 미분가능하다.

이때, $f(3)=0$ $f'(3)\neq 0$인 경우

함수 $|f(x)|$의 좌미분계수와 우미분계수의 부호가 반대이므로

미분가능하지 않다.

따라서 $f(3) = f'(3) = 0$이고

$f(x)$는 $(x-3)^2$을 인수로 갖는다.

(2)의 경우

$\lim_{x\to 0-} g(x) = g(0) = \lim_{x\to 0+} g(x)$에서

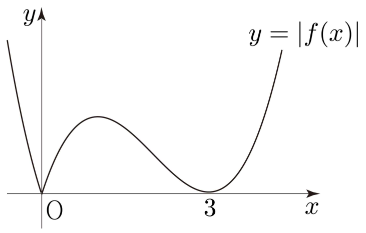
$\frac{|f(0)|}{2} = -|f(0)|$이므로 $f(0) = 0$이다.

따라서 $f(x)$는 x를 인수로 갖는다.

(1), (2)에 의하여 $f(x) = kx(x-3)^2\ (k\neq 0)$이라 둘 수 있다.

(3)의 경우

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 아래 그림과 같다.



$|f'(0)| = a\ (a>0)$이라 둘 때,

그림을 통해,

$\lim_{x\to 0-} \frac{|f(x)|-|f(0)|}{x} = -a$, $\lim_{x\to 0+} \frac{|f(x)|-|f(0)|}{x} = a$임을

알 수 있다. …… ㉠

이때, $\lim_{x\to 0-} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{g(x)-g(0)}{x}$에서

㉠에 의하여

$$\lim_{x\to 0-} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{\frac{|f(x)|}{2} - \frac{|f(0)|}{2}}{x}$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0-} \frac{|f(x)|-|f(0)|}{x}$$
$$= -\frac{a}{2}$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{x-|f(x)|-0+|f(0)|}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0+} \left(1 - \frac{|f(x)|-|f(0)|}{x}\right)$$
$$= 1-a$$

이므로 $-\frac{a}{2} = 1-a$, $a=2$이다.

$f'(x) = k(x-3)^2 + 2kx(x-3)$에서

$f'(0) = 9k$이고, $|f'(0)| = a = 2$이므로

$k = -\frac{2}{9}$ 또는 $k = \frac{2}{9}$이다.

이때, $f'(2) = -3k > 0$에서 $k<0$이므로

$\therefore\ k = -\frac{2}{9}$, $f(x) = -\frac{2}{9}x(x-3)^2$

따라서 구하는 값은

$f'(0) + g(-3) = -2 + \frac{|f(-3)|}{2} = -2+12 = 10$이다.

확률과 통계

23. 정답) ③ [확률과 통계 | 경우의 수]

해설 : $\frac{6!}{5!}\times 2=12$

24. 정답) ② [확률과 통계 | 확률]

해설 : 두 사건 A, B는 서로 배반이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(A\cap B)=0$이다.

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)-\frac{1}{3}=0$에서 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$이고

$\mathrm{P}(A\cup B)=3\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$에서 $2\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)$,

곧, $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$이다.

25. 정답) ② [확률과 통계 | 통계]

해설 : $\mathrm{P}(0\le X\le 5)=1$에서 $\frac{1}{2}\times 5\times k=1$이므로 $k=\frac{2}{5}$

$\mathrm{P}\left(\frac{1}{k}\le X\le 4\right)=\mathrm{P}\left(\frac{5}{2}\le X\le 4\right)$의 값은

밑변의 길이가 $\frac{1}{2}$이고 높이가 $\frac{k}{2}=\frac{1}{5}$인 삼각형의 넓이와

밑변의 길이가 1이고 높이가 $k=\frac{2}{5}$인 삼각형의 넓이의 합이므로

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times 1\times\frac{2}{5}=\frac{1}{20}+\frac{1}{5}=\frac{1}{4}$

26. 정답) ⑤ [확률과 통계 | 경우의 수]

해설 : 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 함수 f의 치역으로 가능한 것은

$\{1,2,3\}$, $\{2,3,4\}$, $\{3,4,5\}$이다.

이때, 치역이 $\{1,2,3\}$인 함수 f의 개수를 구하자.

1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 5개를 뽑는 경우의 수는

${}_3\Pi_5=3^5=243$,

1, 2 중에서 중복을 허락하여 5개를 뽑는 경우의 수는

${}_2\Pi_5=2^5=32$이고,

1, 3 또는 2, 3 중에서 각각 중복을 허락하여 5개를 뽑는 경우의 수도 모두 32,

치역의 원소의 개수가 1인 경우의 수는 3이므로

치역이 $\{1,2,3\}$인 함수 f의 개수는

$243-3\times 32+3=150$이고

치역이 각각 $\{2,3,4\}$, $\{3,4,5\}$인 경우도 위와 같으므로

구하는 함수 f의 개수는 $3\times 150=450$

27. 정답) ④ [확률과 통계 | 통계]

해설 : 두 확률변수 $\overline{X}$, $\overline{Y}$는 각각 정규분포

$\mathrm{N}\left(4,\left(\frac{5}{4}\right)^2\right)$, $\mathrm{N}\left(4,\left(\frac{5}{6}\right)^2\right)$을 따른다.

$\mathrm{P}(\overline{X}\ge k)=\mathrm{P}\left(\overline{Y}\ge k+\frac{1}{2}\right)$에서

$$\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-4}{\frac{5}{4}}\ge\frac{k-4}{\frac{5}{4}}\right)=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{Y}-4}{\frac{5}{6}}\ge\frac{k-\frac{7}{2}}{\frac{5}{6}}\right)$$

곧, $\frac{4}{5}(k-4)=\frac{6}{5}\left(k-\frac{7}{2}\right)$이므로 $k=\frac{5}{2}$이고

$\mathrm{P}(\overline{X}\le 2k+1)+\mathrm{P}(\overline{Y}\le 2k)$

$=\mathrm{P}(\overline{X}\le 6)+\mathrm{P}(\overline{Y}\le 5)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-4}{\frac{5}{4}}\le\frac{6-4}{\frac{5}{4}}\right)+\mathrm{P}\left(\frac{\overline{Y}-4}{\frac{5}{6}}\le\frac{5-4}{\frac{5}{6}}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le 1.6)+\mathrm{P}(Z\le 1.2)$

$=(0.5+0.4452)+(0.5+0.3849)$

$=1.8301$

28. 정답) ⑤ [확률과 통계 | 확률]

해설 : 숫자 1, 2, 3이 적힌 공이 각각 2개씩 들어 있는 주머니에서

(i) 주머니에서 2개의 공을 동시에 꺼낼 때

$b=1$일 확률 : $\frac{{}_6\mathrm{C}_2-{}_4\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{15-6}{15}=\frac{3}{5}$

$b=2$일 확률 : $\frac{{}_4\mathrm{C}_2-{}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{6-1}{15}=\frac{1}{3}$

$b=3$일 확률 : $\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{1}{15}$

(ii) 주머니에서 3개의 공을 동시에 꺼낼 때

$b=1$일 확률 : $\frac{{}_6\mathrm{C}_3-{}_4\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{20-4}{20}=\frac{4}{5}$

$b=2$일 확률 : $\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{1}{5}$

(iii) 주머니에서 5개의 공을 동시에 꺼낼 때

항상 $b=1$

(i)의 경우 가능한 a는 1, 2, 4, 6이고

(ii)의 경우 $a=3$, (iii)의 경우 $a=5$이므로

$a\times b$가 홀수인 모든 순서쌍 (a,b)는

$(1,1)$, $(1,3)$, $(3,1)$, $(5,1)$이고 그 확률은

$\frac{1}{6}\times\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{15}\right)+\frac{1}{6}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{6}\times 1=\frac{37}{90}$이다.

따라서 $a\times b$가 짝수일 확률은 $1-\frac{37}{90}=\frac{53}{90}$이다.

$a\times b$가 짝수이고 $a+b\ge 6$인 모든 순서쌍 (a,b)는

$(4,\,2)$, $(4,\,3)$, $(6,\,1)$, $(6,\,2)$, $(6,\,3)$이고 그 확률은

$\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}\right)+\frac{1}{6}\times1=\frac{7}{30}$ 이다.

따라서 구하는 조건부 확률은 $\dfrac{\frac{7}{30}}{\frac{53}{90}}=\frac{21}{53}$ 이다.

29. 정답) 189 [확률과 통계 | 통계]

해설 : 세 개의 동전을 동시에 던져 앞면이 하나도 나오지 않을 확률은

$\frac{1}{8}$ 이므로 앞면이 적어도 하나 나올 확률은 $1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ 이다.

세 개의 동전을 동시에 던지는 시행을 n번 반복할 때,
앞면이 하나도 나오지 않은 횟수를 Y라 하자.

확률변수 Y는 이항분포 $\left(n,\ \frac{1}{8}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(Y)=\frac{n}{8}$, $\mathrm{V}(Y)=\frac{7}{64}n$이다.

시행을 n번 반복한 후 점 P의 좌표 X는

$X=2\times Y+(-1)\times(n-Y)=3Y-n$이므로

$\mathrm{E}(X)=3\times\mathrm{E}(Y)-n=\frac{3}{8}n-n=-\frac{5}{8}n$

$-\frac{5}{8}n=-30$에서 $n=48$이고

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(2X)&=\mathrm{V}(6Y-96)\\&=6^2\times\mathrm{V}(Y)\\&=36\times\frac{7}{64}\times48\\&=189\end{aligned}$$

30. 정답) 230 [확률과 통계 | 경우의 수]

해설 : e의 값에 따라 경우를 나누어 살펴보자.

(i) $e=0$인 경우

조건 (가)에서 $a+b+c+d=10$

$\frac{a+b+c+d}{d+e+1}=\frac{10}{d+1}$이 2 이상의 자연수가 되는 경우는

$d=0$ 또는 $d=1$ 또는 $d=4$인 경우이고 각각에서

$a+b+c=10$ 또는 $a+b+c=9$ 또는 $a+b+c=6$이므로

구하는 경우의 수는 각각

${}_3\mathrm{H}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_2=66$, ${}_3\mathrm{H}_9={}_{11}\mathrm{C}_2=55$, ${}_3\mathrm{H}_6={}_8\mathrm{C}_2=28$

(ii) $e=1$인 경우

조건 (가)에서 $a+b+c+d=9$

$\frac{a+b+c+d}{d+e+1}=\frac{9}{d+2}$가 2 이상의 자연수가 되는 경우는

$d=1$인 경우이고 $a+b+c=8$이므로 구하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_8={}_{10}\mathrm{C}_2=45$

(iii) $e=2$인 경우

조건 (가)에서 $a+b+c+d=8$

$\frac{a+b+c+d}{d+e+1}=\frac{8}{d+3}$이 2 이상의 자연수가 되는 경우는

$d=1$인 경우이고 $a+b+c=7$이므로 구하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_7={}_9\mathrm{C}_2=36$

(iv) $e\geq3$인 경우

조건 (가)에서 $a+b+c+d\leq7$이고 $d+e+1\geq4$이므로

$\frac{a+b+c+d}{d+e+1}$는 2 이상의 자연수가 될 수 없다.

(i), (ii), (iii), (iv)에 의하여 구하는 경우의 수는

$66+55+28+45+36=230$

미적분

23. 정답) ① [미적분 | 미분법]

해설 : $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(\pi+x)}{\ln(x+1)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\sin x}{\ln(x+1)}=-1$

24. 정답) ③ [미적분 | 적분법]

해설 :
$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}}\cos2x\,dx&=\left[\frac{1}{2}\sin2x\right]_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}}\\&=\frac{1}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}\\&=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

25. 정답) ② [미적분 | 수열의 극한]

해설 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_n=a_1+(n-1)d$이다.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{4n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+(n-1)d}{4n+1}=\frac{d}{4}$이므로

$\frac{d}{4}=\frac{1}{2}$, 곧 $d=2$이고

$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{a_{n+1}-a_n}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$에서

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)=\frac{1}{2a_1}$이므로

$\frac{1}{2a_1}=\frac{1}{2}$, 곧 $a_1=1$이다.

따라서 $a_4=a_1+3d=1+6=7$이다.

26. 정답) ④ [미적분 | 적분법]

해설 : $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{n+3k}{n^3}}f\left(\frac{n+3k}{n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{3}{n}k}\,f\left(1+\frac{3}{n}k\right)$

$=\frac{1}{3}\times\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{n}\sqrt{1+\frac{3}{n}k}\,f\left(1+\frac{3}{n}k\right)$

$=\frac{1}{3}\int_1^4\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}\,dx$

$\sqrt{x}=t$로 치환하면 $x=1$일 때 $t=1$, $x=4$일 때 $t=2$이고

$\frac{1}{2\sqrt{x}}\times\frac{dx}{dt}=1$에서 $\frac{dx}{dt}=2\sqrt{x}=2t$이므로

$\frac{1}{3}\int_1^4\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}\,dx=\frac{1}{3}\int_1^2 2t^2e^t\,dt$

$=\frac{2}{3}\left\{\left[t^2e^t\right]_1^2-\int_1^2 2te^t\,dt\right\}$

$=\frac{2}{3}\left\{\left[t^2e^t\right]_1^2-\left[2te^t\right]_1^2+\int_1^2 2e^t\,dt\right\}$

$=\frac{2}{3}\times\left[(t^2-2t+2)e^t\right]_1^2$

$=\frac{2(2e^2-e)}{3}$

27. 정답) ⑤ [미적분 | 미분법]

해설 : $0<x<\frac{\pi}{2}$에서 함수 $f(x)$는 증가하고

모든 양수 t에 대하여 $f(g(t))=t$이므로

함수 $g(t)$는 함수 $f(t)$의 역함수이다.

$g(k)=\alpha$라 할 때, $f(\alpha)=k$이므로

$f(\alpha)=k\sec\alpha-k=k$, 곧 $\sec\alpha=2$이고 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$이므로

$\alpha=\frac{\pi}{3}$이다.

한편 $f'(x)=k\sec x\tan x$이고

$g'(k)=\frac{1}{f'(g(k))}=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)}=1$에서

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=k\times2\times\sqrt{3}=1$, 곧 $k=\frac{1}{2\sqrt{3}}$이다.

따라서 $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{3}}(\sec x-1)$, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{3}}\sec x\tan x$이다.

마찬가지의 방법으로 $f(\beta)=\frac{\sqrt{3}}{3}$이라 하면

$f(\beta)=\frac{1}{2\sqrt{3}}(\sec\beta-1)=\frac{\sqrt{3}}{3}$에서 $\sec\beta=3$이고

$1+\tan^2\beta=\sec^2\beta$에서 $\tan\beta>0$이므로 $\tan\beta=2\sqrt{2}$이다.

따라서 $g'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{1}{f'(\beta)}=\frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{3}}\times3\times2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{6}}$이고

$k\times g'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{1}{2\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{12}$

28. 정답) ③ [미적분 | 수열의 극한]

해설 : 조건 (가)에서 $b_3=b_4$, 곧 $|a_3-2|=|a_4-2|$이므로

$a_3=a_4$ 또는 $a_3+a_4=4$이다.

조건 (나)에서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-2)$가 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}b_n=2$에서 $\lim_{n\to\infty}a_n=4$ 또는 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}a_n=4$이면 모든 자연수 n에

대하여 $a_n=4$이므로 모든 자연수 n에 대하여 $b_n=2$이고

조건 (나)에서 $0=a_1-12$를 만족시켜야 하므로

모든 자연수 n에 대하여 $a_n=4$임에 모순이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이고 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$0<r<1$이다.

이때, $a_3+a_4=4$에서 $a_3>2>a_4$이어야 하므로

$$b_n=\begin{cases}a_n-2 & (n\le3)\\ -a_n+2 & (n\ge4)\end{cases}$$

이고

$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-2)=(a_1-4)+(a_2-4)+(a_3-4)-\sum_{n=4}^{\infty}a_n$

$=a_1+a_2+a_3-12-\frac{a_4}{1-r}$

이므로 조건 (나)에 의해 $a_2+a_3=\frac{a_4}{1-r}$이고

$1+r=\frac{r^2}{1-r}$,

$1-r^2=r^2$,

$r=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ($\because$ $0<r<1$)

한편 $a_3+a_4=4$에서 $a_1r^2(1+r)=4$,

곧 $\frac{a_1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=4$이므로 $a_1=\frac{16}{2+\sqrt{2}}=16-8\sqrt{2}$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{16-8\sqrt{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{16\sqrt{2}-16}{\sqrt{2}-1}=16$

29. 정답) 14 **[미적분 | 적분법]**

해설 : $\displaystyle\int_1^e f(x)\ln x^2\,dx=\int_1^e\{f(x)\times 2\ln x\}\,dx=A$ 라 하면

$f(x)=\ln x+A$ 이고

$f(x)\times 2\ln x=2(\ln x)^2+2A\ln x$ 에서

$$A=\int_1^e\{2(\ln x)^2+2A\ln x\}\,dx\ \cdots\ ㉠$$

$$\int_1^e(\ln x)^2\,dx=\int_1^e\{(\ln x)^2\times 1\}\,dx$$

$$=\Big[x(\ln x)^2\Big]_1^e-\int_1^e(2\ln x)\,dx$$

㉠에서

$$A=2\times\left\{\Big[x(\ln x)^2\Big]_1^e-\int_1^e(2\ln x)\,dx\right\}+2A\int_1^e\ln x\,dx$$

$$=2\times\Big[x(\ln x)^2\Big]_1^e+(2A-4)\times\int_1^e\ln x\,dx$$

$$=2e+(2A-4)\times\Big[x\ln x-x\Big]_1^e$$

$$=2e+2A-4$$

이므로 $A=4-2e$

따라서 $f(x)=\ln x+(4-2e)$ 이고

$$\int_e^{e^2}\frac{f(x)}{x}\,dx=\int_e^{e^2}\frac{\ln x+(4-2e)}{x}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2+(4-2e)\ln x\right]_e^{e^2}$$

$$=\left(2-\frac{1}{2}\right)+(4-2e)(2-1)$$

$$=\frac{11}{2}-2e$$

이때 $p=\dfrac{11}{2}$, $q=-2$ 이므로

$$4\times(p+q)=4\times\left\{\frac{11}{2}+(-2)\right\}=14$$

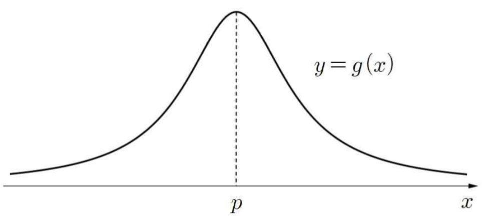
30. 정답) 156 **[미적분 | 미분법]**

해설 : 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $x=p$ 에 대하여 대칭이면

함수 $y=g(x)$ 의 그래프도 직선 $x=p$ 에 대하여 대칭이다.

$g'(x)=-\dfrac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}$ 에서 $f'(p)=g'(p)=0$ 이므로 함수 $g(x)$ 는

$x=p$ 에서 극대이다.



한편 x 에 대한 방정식 $g(x)=g'(t)(x-t)+g(t)$ 의 서로 다른 실근의 개수가 1 이 되도록 하는 모든 실수 t 가

-4, k, k^2+1 이므로 $k=p$ 이고

두 점 $(-4,\ g(-4))$, $(k^2+1,\ g(k^2+1))$ 은 곡선 $y=g(x)$ 의 변곡점이며 두 변곡점은 직선 $y=k$ 에 대하여 서로 대칭이다.

곧, $\dfrac{(-4)+(k^2+1)}{2}=k$ 에서

$k^2-2k-3=0$

$(k-3)(k+1)=0$

$k=3\ (\because\ k>0)$

따라서 $f(x)=(x-3)^2+m\ (m>0)$ 으로 나타낼 수 있고

$f'(x)=2(x-3)$, $f''(x)=2$ 이다.

한편 $g''(x)=\dfrac{-f(x)f''(x)+2\{f'(x)\}^2}{\{f(x)\}^3}$ 에서 $g''(-4)=0$ 이므로

$f(-4)f''(-4)=2\{f'(-4)\}^2$ 에서

$(49+m)\times 2=2\times(-14)^2$

$49+m=196$

$m=147$, $f(x)=(x-3)^2+147$

따라서 $f(0)=(-3)^2+147=156$ 이다.