@dlandut

제 2 교시

수학 영역

홀수형

5지선다형

1. $\sqrt[3]{24} \times 3^{\frac{2}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$(2 \times 3^{\frac{1}{3}}) \times 3^{\frac{2}{3}} = 2 \times 3$

$= 6$

2. 함수 $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3$ 에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

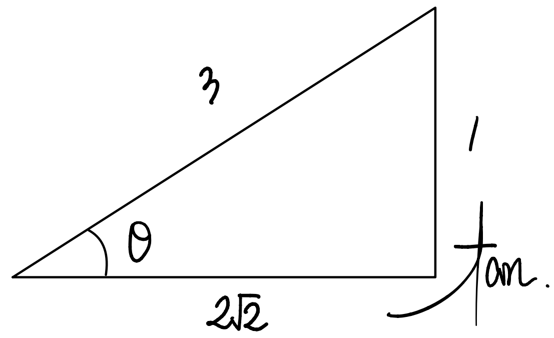
$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = f'(2)$

$f'(x) = 6x^2 - 10x$

$f'(2) = 4$

3. $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 인 θ 에 대하여 $\sin(-\theta) = \frac{1}{3}$ 일 때, $\tan\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{4}$



θ는 제 4사분면의 각.

$\therefore \tan\theta = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

4. 함수

$$f(x) = \begin{cases} 3x - a & (x < 2) \\ x^2 + a & (x \geq 2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\lim_{x \to 2-} f(x) = 6 - a$

$\lim_{x \to 2+} f(x) = f(2) = 4 + a$

$6 - a = 4 + a$

$\therefore a = 1$

5. 다항함수 $f(x)$가

$$f'(x)=3x(x-2),\quad f(1)=6$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

$\int f'(x)dx = x^3-3x^2+C = f(x)$

$f(1) = C-2=6$　$\therefore C=8$

$f(2) = 8-12+8$

$=4$

6. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$S_4-S_2=3a_4,\quad a_5=\frac{3}{4}$$

일 때, a_1+a_2의 값은? [3점]

① 27　② 24　③ 21　④ 18　⑤ 15

$S_4-S_2 = a_3+a_4 = 3a_4$

$a_3 = 2a_4 \Rightarrow r=\frac{1}{2}$

$\therefore a_1 = a_5 \cdot 16$

$a_2 = a_5 \cdot 8$

$a_1+a_2 = 24a_5$

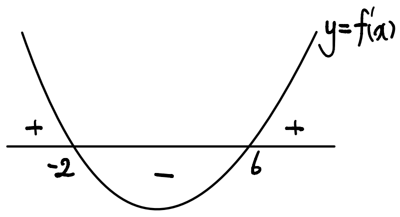
$=18$

7. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-12x+4$가 $x=\alpha$에서 극대이고 $x=\beta$에서 극소일 때, $\beta-\alpha$의 값은? (단, α와 β는 상수이다.) [3점]

① -4　② -1　③ 2　④ 5　⑤ 8

$f'(x) = x^2-4x-12$

$=(x+2)(x-6)$



$\therefore \alpha=-2,\ \beta=6$

$\beta-\alpha=8$

8. 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf(x)-f(x)=3x^4-3x$$

를 만족시킬 때, $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$의 값은? [3점]

① 12 ② 16 ③ 20 ④ 24 ⑤ 28

$(x-1)f(x) = 3x(x-1)(x^2+x+1)$

$\therefore f(x) = 3x(x^2+x+1)$

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx = \underbrace{\int_{-2}^{2}(3x^3+3x)dx}_{\text{기함수 적분, By 대칭성, 0이다.}} + \underbrace{\int_{-2}^{2} 3x^2 dx}_{\text{우함수 적분} \Rightarrow 2\int_0^2 3x^2 dx}$$

$\therefore 2[x^3]_0^2 = 16.$

9. 수직선 위의 두 점 $\mathrm{P}(\log_5 3)$, $\mathrm{Q}(\log_5 12)$에 대하여 선분 PQ를 $m:(1-m)$으로 내분하는 점의 좌표가 1일 때, 4^m의 값은? (단, m은 $0<m<1$인 상수이다.) [4점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

$$\frac{m\cdot\log_5 12 + (1-m)\cdot\log_5 3}{m+(1-m)} = 1.$$

$\log_5 12^m \cdot 3^{1-m} = \log_5 3\cdot 4^m = 1$

$\therefore 3\cdot 4^m = 5$

$4^m = \frac{5}{3}$

10. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t\ge 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=t^2-6t+5,\quad v_2(t)=2t-7$$

이다. 시각 t에서의 두 점 P, Q 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, 함수 $f(t)$는 구간 $[0, a]$에서 증가하고, 구간 $[a, b]$에서 감소하고, 구간 $[b, \infty)$에서 증가한다. 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 Q가 움직인 거리는? (단, $0<a<b$) [4점]

① $\frac{15}{2}$ ② $\frac{17}{2}$ ③ $\frac{19}{2}$ ④ $\frac{21}{2}$ ⑤ $\frac{23}{2}$

두 점 사이 거리

⇒ 상대속도 "v_1-v_2" 적분.

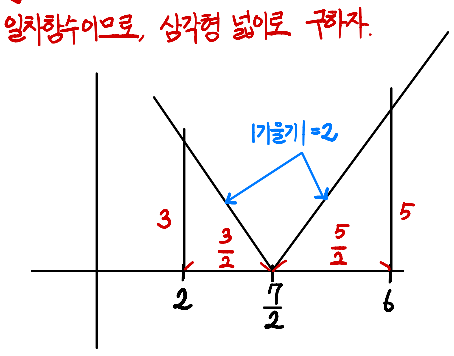
$v_1-v_2 = t^2-8t+12$

$= (t-2)(t-6)$

$\therefore a=2,\ b=6.$

$\int_2^6 |v_2|dt.$

일차함수이므로, 삼각형 넓이로 구하자.



$\therefore \int_2^6 |v_2|dt = \frac{9}{4}+\frac{25}{4}$

$= \frac{17}{2}$

11. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$|a_6| = a_8, \quad \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{5}{96}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{15} a_k$의 값은? [4점]

① 60 ② 65 ③ 70 ④ 75 ⑤ 80

$|a_6| = a_8$, $d \neq 0$ 에서,

$\begin{cases} (\text{i})\ a_7 = 0 \\ (\text{ii})\ d > 0 \end{cases}$ 를 얻어내고, $a_1 = -6d$ 임을 바로 설정할 것.

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{a_k \cdot a_{k+1}} = \frac{1}{d} \cdot \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_6}\right)$$

바로 안되면 반성하자.
등차 한 칸 차이므로
첫항 & 끝항만 살아남음

$$= \frac{1}{d} \cdot \frac{5}{6d} \qquad \therefore d = 4.$$

$$\sum_{k=1}^{15} a_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{13} a_k}_{} + a_{14} + a_{15}$$

가운데 항이 a_7

$\therefore \sum_{k=1}^{13} a_k = 13 \cdot a_7 = 0.$

$= a_{14} + a_{15}$

$= (a_7 + 7d) + (a_7 + 8d)$

$= 15d = 60.$

12. 함수 $f(x) = \frac{1}{9}x(x-6)(x-9)$와 실수 $t\,(0 < t < 6)$에 대하여 함수 $g(x)$는

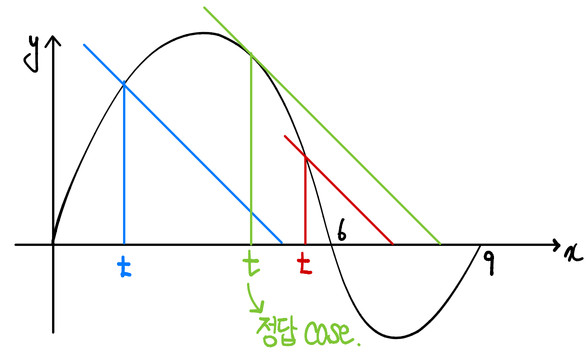
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < t) \\ -(x-t) + f(t) & (x \geq t) \end{cases}$$

이다. 함수 $y = g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이의 최댓값은? [4점]

① $\frac{125}{4}$ ② $\frac{127}{4}$ ③ $\frac{129}{4}$ ④ $\frac{131}{4}$ ⑤ $\frac{133}{4}$

$-(x-t) + f(t)$: $(t, f(t))$를 지나는 기울기가 -1인 직선.

§ 관찰이 필요한 문제.



결국 접선이다.

$f'(x) = -1$

$\frac{1}{9} \cdot (3x^2 - 30x + 54) = -1$

$x^2 - 10x + 21 = (x-3)(x-7) = 0$

한편 $0 < t < 6$ 이므로, $t = 3$.

$$\therefore \int_0^3 f(x)\,dx + \underbrace{\int_3^{\square} \{-(x-3) + f(3)\}\,dx}_{\text{직각이등변}\triangle}$$

$f(3) = 6$이므로, 적분값은 18이다.

$$= \frac{1}{9}\left[\frac{1}{4}x^4 - 5x^3 + 27x^2\right]_0^3 + 18$$

$$= \frac{1}{\cancel{9}} \cdot \left(\frac{\cancel{81}^{\,9}}{4} - \cancel{27}^{\,3} \cdot 5 + 27 \cdot \cancel{9}\right) + 18$$

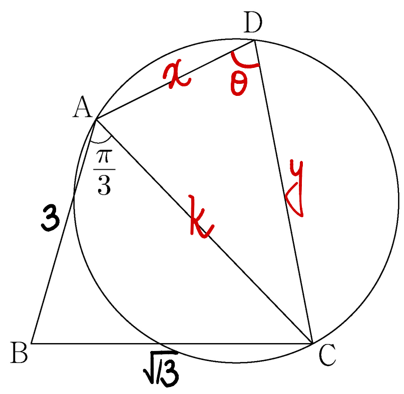
$$= \frac{129}{4}$$

13. 그림과 같이

$$\overline{AB}=3,\quad \overline{BC}=\sqrt{13},\quad \overline{AD}\times\overline{CD}=9,\quad \angle BAC=\frac{\pi}{3}$$

인 사각형 ABCD가 있다. 삼각형 ABC의 넓이를 S_1, 삼각형 ACD의 넓이를 S_2라 하고, 삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하자.

$S_2=\frac{5}{6}S_1$일 때, $\frac{R}{\sin(\angle ADC)}$의 값은? [4점]



① $\frac{54}{25}$ ② $\frac{117}{50}$ ③ $\frac{63}{25}$ ④ $\frac{27}{10}$ ⑤ $\frac{72}{25}$

† 사용하는 문자는 그림의 표시를 참고.

Cosine law 변형 $\left(\cos\theta=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{9+k^2-13}{6k}$

$\therefore k=4$.

By Sine law,

$\frac{4}{\sin\theta}=2R \Longrightarrow$ (구해야 할 값) $=\frac{R}{\sin\theta}=\frac{2}{\sin^2\theta}$

이제 $\sin\theta$를 구하자.

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\cdot \sin\frac{\pi}{3}$

$=3\sqrt{3}$

$\therefore \triangle ACD=\frac{1}{2}\cdot x\cdot y\cdot \sin\theta=\frac{5}{6}\cdot 3\sqrt{3}$

$\sin\theta=\frac{5\sqrt{3}}{9}$

$\frac{2}{\sin^2\theta}=\frac{54}{25}$

14. 두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} 2x^3-6x+1 & (x\le 2) \\ a(x-2)(x-b)+9 & (x>2)\end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자.

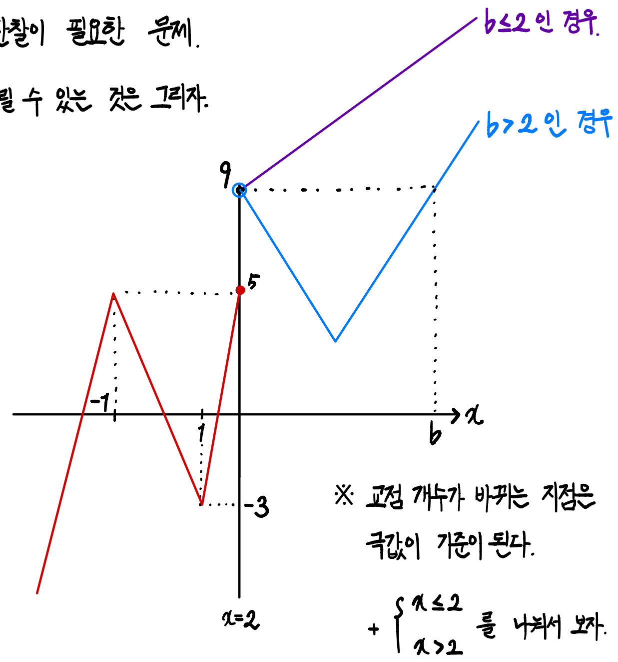
$$g(k)+\lim_{t\to k-}g(t)+\lim_{t\to k+}g(t)=9$$

를 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최댓값은? [4점]

① 51 ② 52 ③ 53 ④ 54 ⑤ 55

§ 관찰이 필요한 문제.

+ 그릴 수 있는 것은 그리자.



※ 교점 개수가 바뀌는 지점은 극값이 기준이 된다.

+ $\begin{cases} x\le 2 \\ x>2\end{cases}$ 를 나눠서 보자.

(ㄱ) $\boxed{x\le 2\text{인 지점에서 } g(k)+\lim_{t\to k-}g(t)+\lim_{t\to k+}g(t)}$를 구하자.

편의상 $h_1(t)$라 하자.

$$h_1(t)=\begin{cases} 3 & (t<-3) \\ 6 & (t=-3) \\ 9 & (-3<t<5) \\ 5 & (t=5) \\ 0 & (t>5)\end{cases}$$

(ㄱ) $\boxed{x>2\text{인 지점에서 } g(k)+\lim_{t\to k-}g(t)+\lim_{t\to k+}g(t)}$를 구하자.

편의상 $h_2(t)$라 하자.

$$h_2(t)=\begin{cases} 0 & (t<f(\frac{2+b}{2})) \\ 3 & (t=f(\frac{2+b}{2})) \\ 6 & (f(\frac{2+b}{2})<t<9) \\ 4 & (t=9) \\ 3 & (t>9)\end{cases}$$ (b≥2 인 경우)

$$h_2(t)=\begin{cases} 0 & (t<9) \\ 1 & (t=9) \\ 3 & (t>9)\end{cases}$$ (b<2 인 경우)

if $b<2$라면, $-3<k<5$인 모든 k에 대해

$g(k)+\lim_{t\to k-}g(t)+\lim_{t\to k+}g(t)=9$이므로 모순.

$\Longrightarrow b>2$

$h_1(t)+h_2(t)=9$가 되는 k가 유일하려면,

$(h_1(t), h_2(t))=(6,3)$, $f(\frac{2+b}{2})=-3$이 되는 것이 가장 합리적이고, 이때가 정답이다.

$\therefore f(\frac{2+b}{2})=\frac{a}{4}(b-2)(2-b)+9=-3$

$a(b-2)^2=48$. $\begin{cases} a=48. \\ b=3.\end{cases}$ $\therefore$ Max of "a+b" $=51$.

15. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2^{a_n} & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_6 + a_7 = 3$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 139 ② 146 ③ 153 ④ 160 ⑤ 167

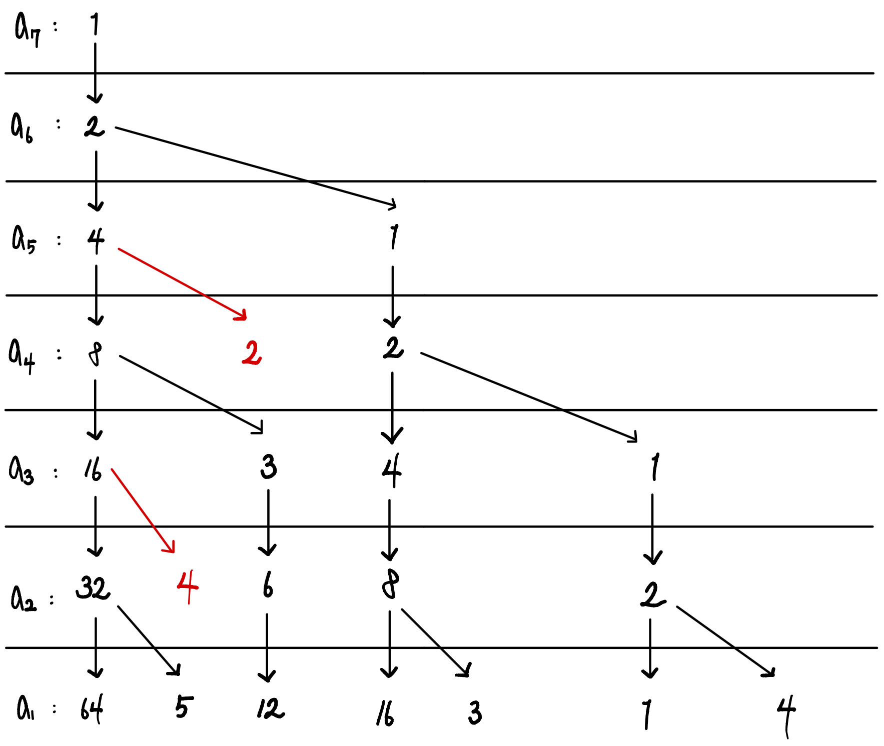
수열의 귀납적 정의 문제를 풀 때는,
천천히 관찰하고, Case 분류를 하자

Observe.
"모든 자연수 n에 대해, a_n은 자연수이다."

$\Longrightarrow$ 따라서 자연스러운 Case 분류는,

$\begin{cases} (\text{i})\ a_6 = 2,\ a_7 = 1 \\ (\text{ii})\ a_6 = 1,\ a_7 = 2 \end{cases}$ 이다.

역추적하자. ⟶ 모순인 Case.



$\therefore a_7 = 1$일 때 가능한 a_1 : 1, 3, 4, 5, 12, 16, 64.

☆ $a_6 = 1$일 때 표 다시 그리는 짓은 하지 말자.

위의 표에서 a_7을 a_6으로 보면,

a_2 위치의 숫자들이 $a_6 = 1$일 때, a_1의 후보가 된다.

$\therefore a_6 = 1$일 때 가능한 a_1 : 2, 6, 8, 32.

"153"

단답형

16. 방정식 $3^{x-8} = \left(\frac{1}{27}\right)^x$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$3^{x-8} = 3^{-3x}$

$x = 2.$

17. 함수 $f(x) = (x+1)(x^2+3)$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

$f'(x) = (x^2+3) + (x+1)\cdot 2x$

$f'(1) = 4+4$

$= 8.$

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} (2b_k - 1), \quad \sum_{k=1}^{10} (3a_k + b_k) = 33$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10} b_k$의 값을 구하시오. [3점]

$\sum_{k=1}^{10} a_k = x$, $\sum_{k=1}^{10} b_k = y$ 라 하자.

$$\begin{cases} x = 2y - \underline{10} \\ 3x + y = 33 \end{cases}$$

10이라 쓰지 않게 조심!

$y = 9$

19. 함수 $f(x) = \sin\frac{\pi}{4}x$라 할 때, $0 < x < 16$에서 부등식

$$f(2+x)f(2-x) < \frac{1}{4}$$

을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

$$f(2+x)f(2-x) = \sin\frac{\pi}{4}(2+x) \cdot \sin\frac{\pi}{4}(2-x)$$
$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}x\right)$$
$$= \cos^2 \frac{\pi}{4}x < \frac{1}{4}$$

$\therefore \left|\cos\frac{\pi}{4}x\right| < \frac{1}{2}$.

x는 자연수이므로, $\cos\frac{\pi}{4}x = 0$ 을 만족해야 한다.

$\therefore \frac{\pi}{4}x = \frac{2n-1}{2}\pi$.

$x = 2, 6, 10, 14$

32.

20. $a > \sqrt{2}$ 인 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = -x^3 + ax^2 + 2x$$

라 하자. 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $\mathrm{O}(0, 0)$에서의 접선이 곡선 $y = f(x)$와 만나는 점 중 O가 아닌 점을 A라 하고, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 A에서의 접선이 x축과 만나는 점을 B라 하자. 점 A가 선분 OB를 지름으로 하는 원 위의 점일 때, $\overline{\mathrm{OA}} \times \overline{\mathrm{AB}}$의 값을 구하시오. [4점]

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = f'(0)(x-0) + f(0) \\ \quad = f(0) \end{cases}$$

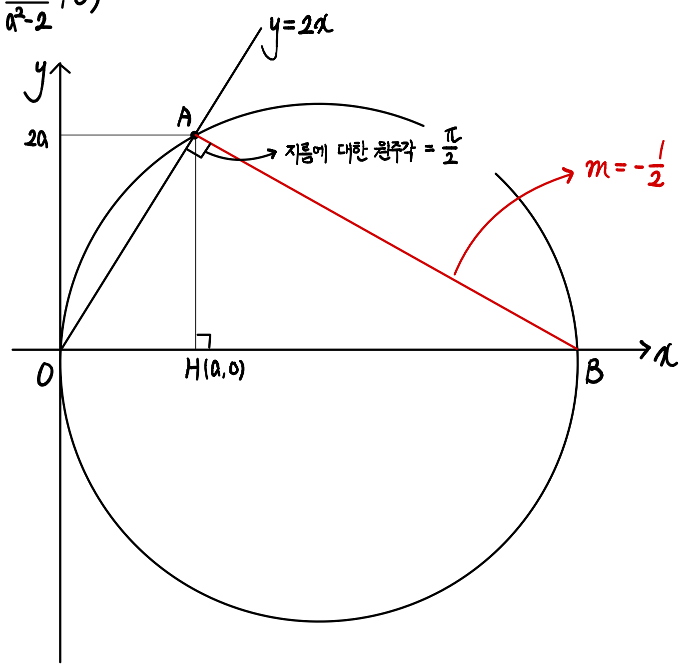
연립 $\Longrightarrow$ $x = a,\ 0$(중근)

삼차방정식 근과 계수와의 관계

$f(a) = 2a$이므로, $A(a, 2a)$ 이다.

A에서의 접선 l : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$
$= (2-a^2)(x-a) + 2a$
$= (2-a^2)x + a^3$

$\therefore B\left(\frac{a^3}{a^2-2}, 0\right)$



$$(\overline{AB}\text{의 기울기}) = \frac{2a}{a - \frac{a^3}{a^2-2}}$$
$$= \frac{2a}{\frac{a(a^2-2) - a^3}{a^2-2}}$$
$$= 2 - a^2 = -\frac{1}{2} \qquad \therefore a^2 = \frac{5}{2}$$

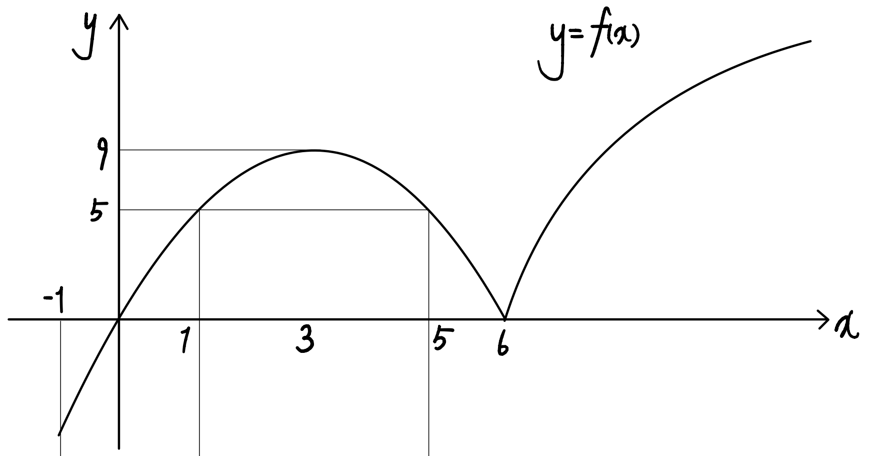
$$\overline{OA} \times \overline{AB} = \overline{OB} \times \overline{AH}$$
$$= \frac{a^3}{a^2-2} \times 2a$$
$$= \frac{2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}} = 25.$$

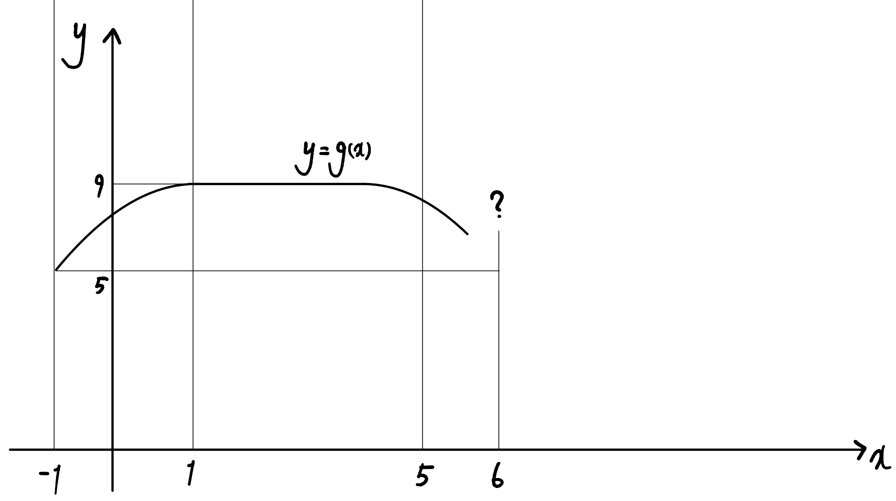
21. 양수 a에 대하여 $x \ge -1$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+6x & (-1 \le x < 6) \\ a\log_4(x-5) & (x \ge 6) \end{cases}$$

이다. $t \ge 0$인 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t-1,\ t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 구간 $[0,\ \infty)$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 5가 되도록 하는 양수 a의 최솟값을 구하시오. [4점]

§ 관찰이 필요한 문제





$y=f(x)$에서 $\begin{cases} [5,6]\text{에서 감소} \\ [6,7]\text{에서 증가} \end{cases}$ 하므로,

$g(6)=\min\{f(5), f(7)\}$이다. ($\min\{a,b\}$은 a, b중 크지 않은 값을 택하는 함수)

한편 $f(5)=5$이므로,

$f(7)<5$이면 $g(6)=f(7)<5$가 되어 $g(t)$의 최솟값이 5라는 조건에 모순.

$\therefore f(7)=a\log_4(7-5)$

$=\frac{a}{2} \ge 5$ 를 만족해야 한다.

(a의 최솟값) = 10.

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $f(x)$에 대하여
>
> $f(k-1)f(k+1)<0$
>
> 을 만족시키는 정수 k는 존재하지 않는다.

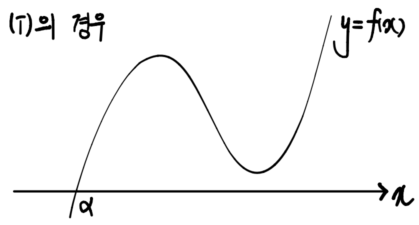
$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$, $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$일 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

§ 관찰이 필요한 문제.

$\left\{\begin{array}{l} \text{최고차항 계수가 1인 삼차함수} \\ f'(-\frac{1}{4})=-\frac{1}{4}\ (\text{도함숫값 음수}) \end{array}\right.$ $\Longrightarrow$ 극대, 극소를 모두 갖는다.

Case 분류. $\left\{\begin{array}{l} \text{(i) 허근 2개 + 실근 1개} \\ \text{(ii) 중근 + 실근} \\ \text{(iii) 서로 다른 세 실근.} \end{array}\right.$

(i)의 경우



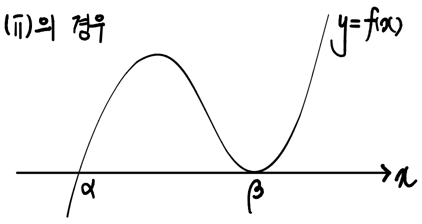
어떤 적당한 정수 n을 잡아

α를 포함하는 열린 구간 $(n-1, n+1)$을

항상 잡을 수 있다.

$\Longrightarrow f(n-1)f(n+1)<0$ 모순.

(ii)의 경우



α와 β가 이웃한 정수라면,

$f(k-1)f(k+1)<0$을 만족하는 정수 k가 존재하지 않는다.

(WLOG. $\alpha=0$, $\beta=1$이라 설정한 뒤 직접 관찰해보자.)

그러나 $f'(-\frac{1}{4})$, $f'(\frac{1}{4})$이 모두 음수이므로,

사잇값 정리에 의해 $f'(0)$ 또한 음수이다.

그러나 $f'(0)$이 음수가 되도록 α, β를 잡을 수 없다.

α와 β가 이웃한 정수가 아니라면,

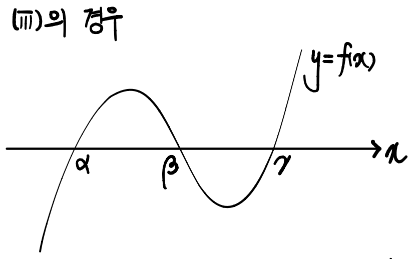
(i)과 동일하게, 어떤 적당한 정수 n을 잡아

α를 포함하는 열린 구간 $(n-1, n+1)$을

항상 잡을 수 있다.

$\Longrightarrow f(n-1)f(n+1)<0$ 모순.

(iii)의 경우



(ii)의 관찰에서 Hint를 얻었으면 좋겠다.

Hint 1 : $f(x)=0$의 실근 중 이웃한 정수가 존재한다.

Hint 2 : $f'(0)<0$이다.

I) α, β, γ가 모두 이웃한 정수인 경우. Hint 2에 의해 $\beta=0$

$\therefore f(x)=x(x-1)(x+1)$이므로, $f'(x)=3x^2-1$이다. $f'(-\frac{1}{4})=-\frac{13}{16}\ne-\frac{1}{4}$

II) α와 γ가 이웃한 정수인 경우. Hint 2 충족 X

III) α와 β가 이웃한 정수인 경우. Hint 2에 의해 $\beta=0$

$\therefore f(x)=x(x+1)(x-\gamma)$이므로, $f'(x)=3x^2+2(1-\gamma)x-\gamma$이다. $f'(-\frac{1}{4})=\frac{24\gamma-5}{16}=-\frac{1}{4}$

$\gamma=\frac{1}{24}$이며, $f'(\frac{1}{4})<0$ 조건에 위배된다.

IV) β와 γ가 이웃한 정수인 경우. Hint 2에 의해 $\beta=0$

$\therefore f(x)=x(x-1)(x-\alpha)$, $f'(x)=3x^2-(1+\alpha)x+\alpha$이다. $f'(-\frac{1}{4})=\frac{24\alpha+11}{16}=-\frac{1}{4}$

$\alpha=-\frac{5}{8}$이며, 모든 조건을 만족한다.

$f(x)=x(x-1)(x+\frac{5}{8})$이며, $f(8)=483$이다.

483