문과용

$F(x)=\int_0^x f(x)dx$라 놓겠습니다.

그러면 $F(0)=0$, $F(1)=1$을 만족하고, (조건 (나), (다)에 의해)
$y=F(x)$은 모든 실수에서 미분 가능합니다. ($y=f(x)$가 모든 실수에서 연속이므로)

$\int_0^x f(x)dx \geq x$이므로, $x=0$, $x=1$일 때 $y=F(x)$의 그래프는 $y=x$에 접해야 합니다.

이를 바탕으로 문제를 해결하시면 됩니당.

이과용

평균값의 정리를 이용해야 하는 문제입니다.

조건 (나)에서 $\dfrac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x} \leq xe^{-x}$를 만족합니다.

따라서 $\dfrac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x} = f'(c)$를 만족하는 c가 x와 $x+1$사이에 존재합니다.

그리고 $f(3)$이 최댓값을 가지려면 $f'(c)$의 값이 최대가 되어야 합니다.

그런데 $x \geq 1$일 때 $y=xe^{-x}$는 감소함수입니다.

따라서 $f'(x)=xe^{-x}$일 때 조건 (나)를 만족하면서 $f(3)$이 최댓값을 가집니다.
이를 바탕으로 문제를 해결하시면 됩니당.