제 2 교시 60분

수학 영역

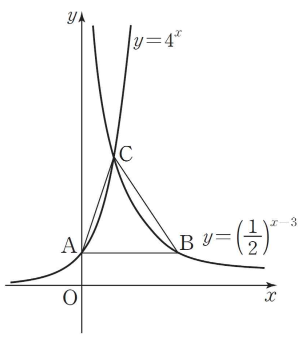
홀수형

5지선다형

1 $\int_{-2}^{2}(4x^3+3x^2+2x+1)dx$의 값은? [3점]

① 8 ② 12 ③ 16
④ 20 ⑤ 24

2 그림과 같이 함수 $y=4^x$의 그래프가 y축과 만나는 점을 A, 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$의 그래프와 만나는 점을 B, 두 함수 $y=4^x$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$의 그래프가 만나는 점을 C라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [3점]



① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$
④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

3 [3]네 양수 a, b, c, d가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $bcd=\left(\frac{1}{5}\right)^6 a^3$
>
> (나) 네 수 a, $10b$, 10^2c, 10^3d는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

$10^3\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{d}{a}\right)$의 값은?

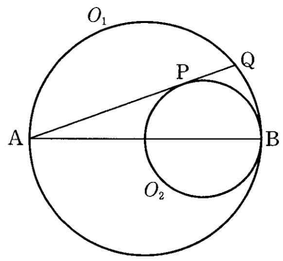
① 842 ② 428 ③ 248
④ 222 ⑤ 111

4 [4]0이 아닌 모든 실수에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 $f(x)=\frac{g(x)}{x^k}$이고 $g'(2)=0$이다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선의 x절편이 $\frac{5}{2}$일 때, $\frac{g'(1)}{g(1)}-\frac{f'(1)}{f(1)}$의 값은?

(단, $g(1)\neq 0$, $g(2)\neq 0$이고 k는 자연수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

5 그림과 같이 $\overline{AB}=2$인 선분 AB를 지름으로 하는 원 O_1과 반지름의 길이가 r인 원 O_2가 점 B에서 내접하고 있다. 점 A에서 원 O_2에 그은 접선의 접점을 P, 이 접선이 원 O_1과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 Q라 할 때, $\lim_{r\to+0}\frac{\overline{PQ}}{r}$의 값을 구하시오.



6 세 자연수 a, b, c에 대하여 등식

$$\log a+\log b+\log c=6(\log 2+\log 3)$$

을 만족시키는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는?

① 625 ② 676 ③ 784 ④ 841 ⑤ 900

7 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)<0$
(나) 함수 $y=|f(x)|$는 $x=0$에서만 극댓값을 갖고 $x=-2$, $x=2$에서만 극솟값을 갖는다.

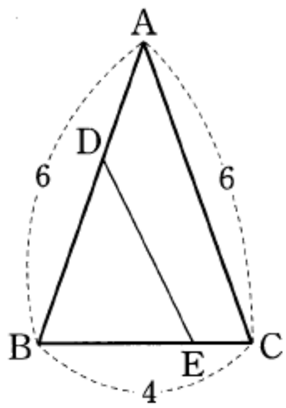
$f(3)$의 값은?

① 14 ② 24 ③ 34 ④ 44 ⑤ 54

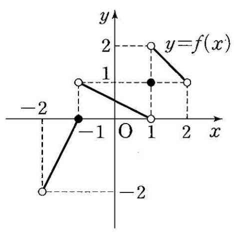
8 자연수 n에 대하여 $\frac{7}{2}-n$의 n제곱근 중 실수의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(2)+f(3)+f(4)$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

9 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}=6, \overline{BC}=4$ 인 삼각형 ABC 가 있다. 변 AB 위의 점 D 와변 BC 위의 점 E 를 잇는 선분 DE 에 의하여 삼각형 ABC 의 넓이가 이등분될 때, 선분 DE 의 길이의 최솟값을 구하시오.



10 $-2<x<2$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?



[보 기]

ㄱ. $\lim_{x\to -1+} f(x)=1$

ㄴ. $\lim_{x\to 1-} f^{-1}(x)=-1$

ㄷ. $\lim_{x\to a-} f^{-1}(x)+\lim_{x\to a+} f^{-1}(x)=1$을 만족시키는 실수 a는 2개다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11 $0<x<2\pi$ 에서 방정식 $\tan x+\sqrt{3}\,\dfrac{1}{\tan x}=1+\sqrt{3}$의 서로 다른 네 실근을 작은 것부터 차례로 x_1, x_2, x_3, x_4 라 할 때, $x_1+x_2+x_3+x_4$ 의 값을 구하시오.

12 함수 $f(x)=\begin{cases} x+4 & (x\le -1) \\ ax(x-2) & (-1<x\le 1) \\ 2x+b & (x>1) \end{cases}$에 대하여 함수 $g(x)=\dfrac{f(x)+|f(x)|}{2}$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 두 실수 a, b의 합 $a+b$의 최댓값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

13 수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n이라 하자. (단, $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < \ldots$ 이다.)

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3$$
$$(S_{n+1} - S_{n-1})^2 = 4a_n a_{n+1} + 4 \quad (n = 2, 3, 4, \ldots)$$

일 때, a_{20}의 값은?

① 39 ② 43 ③ 47 ④ 51 ⑤ 55

14 원점에서 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 위치를 각각 $f(t)$, $g(t)$라 하면

$$f(t) = t^3 + 3t^2 - 9t,\ g(t) = t^3 + t^2 - t$$

이다. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보 기

ㄱ. 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간은 $t = 2$일 때이다.

ㄴ. $\frac{1}{3} < t < 1$에서 두 점 P, Q는 서로 반대 방향으로 움직인다.

ㄷ. 선분 PQ의 중점을 M이라 할 때, 두 점 P, Q가 출발 후 처음으로 다시 만나는 순간 점 M의 속도는 59이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = -f(x)$이다.

(나) $\int \{f(x) + f'(x)\}dx = \frac{1}{2}x^4 + mx^3 + \frac{1}{2}x^2 + nx + C$

두 상수 m, n의 합 $m+n$의 값은? (단, C는 적분상수이다.)

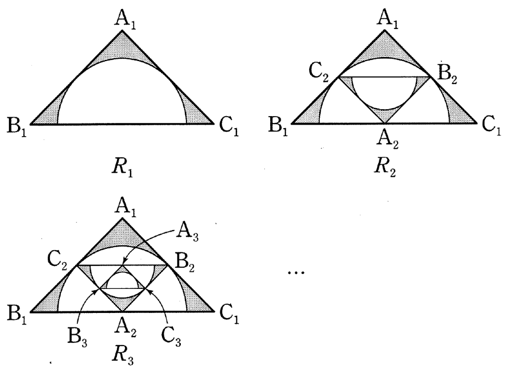
① -3 ② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

[미적분]

16 이차방정식 $x^2 - 6x + 4 = 0$의 두 근이 $\tan\alpha$, $\tan\beta$일 때, $|\tan(\alpha - \beta)|$의 값은?

① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{3\sqrt{5}}{10}$ ③ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
④ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

17 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=\overline{A_1C_1}=\sqrt{2}$이고, $\angle A_1=90°$인 직각삼각형 $A_1B_1C_1$의 내부와 이 직각삼각형의 두 변과 접하고 중심이 선분 B_1C_1 위에 있는 반원의 외부에 공통으로 속하는 영역을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 그린 반원의 중심을 A_2, 반원과 직각삼각형 $A_1B_1C_1$의 두 변이 접하는 접점을 각각 B_2, C_2라 할 때, 직각삼각형 $A_2B_2C_2$의 내부와 이 직각삼각형의 두 변과 접하고 중심이 선분 B_2C_2 위에 있는 반원의 외부에 공통으로 속하는 영역을 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에서 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?



① $\frac{\pi-3}{6}$ ② $\frac{4-\pi}{6}$ ③ $\frac{\pi-3}{3}$
④ $\frac{4-\pi}{3}$ ⑤ $\frac{\pi-3}{2}$

18 함수 $f(x)=\sin\frac{\pi}{3}x-1$에 대하여

$$a=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_2^{2+x}f(t)dt,$$

$$b=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^{x^2}f(t)dt$$

일 때, $2a-b$의 값은?

① $-2\sqrt{3}$ ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ $2\sqrt{3}$

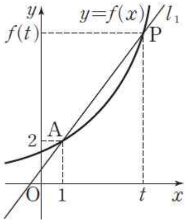
19 두 함수 $f(x)=x+\ln x$, $g(x)=e^x$에 대하여

$$\int_2^4\{f(g(x))+g(f(x))\}dx=p+qe^2+re^4$$

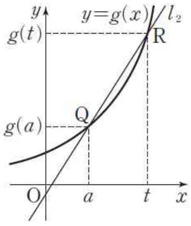
을 만족시키는 세 정수 p, q, r의 합 $p+q+r$의 값은? (단, e는 자연로그의 밑이다.)

① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

20 [그림 가]는 $f(1)=2$인 미분가능한 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$, $\mathrm{P}(t,\ f(t))$를 지나는 직선 l_1을 나타낸 것이다. [그림 나]는 미분가능한 함수 $y=g(x)$의 그래프 위의 서로 다른 두 점 $\mathrm{Q}(a,\ g(a))$,$\mathrm{R}(t,\ g(t))$를 지나는 직선 l_2를 나타낸 것이다.



가



나

직선 l_1의 기울기가 t^2+2t이고 직선 l_2의 기울기가 $a^2+2at+t^2$일 때, 곡선 $y=g(f(x))$위의 점 $\mathrm{B}(1,\ g(f(1)))$에서의 접선의 기울기를 구하시오.

※ 확인 사항
문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

해설

1) [정답] ④

$$\int_{-2}^{2}(4x^3+3x^2+2x+1)dx$$
$$=\int_{-2}^{2}(3x^2+1)dx$$
$$=2\int_{0}^{2}(3x^2+1)dx$$
$$=2\Big[x^3+x\Big]_0^2$$
$$=2\times(8+2)=20$$

2) [정답] ①

점 A의 x좌표는 0이므로 $y=4^x$에 $x=0$을 대입하면 $y=1$

즉, $\mathrm{A}(0,\ 1)$이다.

또, 점 B의 y좌표는 1이므로 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$에 $y=1$을 대입하면

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}=1$$

$\therefore\ x=3$

즉, $\mathrm{B}(3,\ 1)$이다.

또, 점 C는 두 함수 $y=4^x$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$의 그래프가 만나는 점이므로

$4^x=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$에서

$2^{2x}=2^{-x+3}$

$2x=-x+3$

$\therefore\ x=1$

즉, $\mathrm{C}(1,\ 4)$이다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times3\times3=\frac{9}{2}$

3) ③

조건 (나)에서 등비수열 $a,\ 10b,\ 10^2c,\ 10^3d$의 공비를 $r(r>0)$라 하면

$10b=ar,\ 10^2c=ar^2,\ 10^3d=ar^3$

$b=\frac{r}{10}a,\ c=\left(\frac{r}{10}\right)^2a,\ d=\left(\frac{r}{10}\right)^3a$ …… ㉠

조건 (가)에서 $bcd=\left(\frac{r}{10}\right)^6a^3=\left(\frac{1}{5}\right)^6a^3$이고 $a>0$이므로

$r^6=2^6,\ (r^3+2^3)(r^3-2^3)=0$

$\therefore\ r=2\ (\because\ r>0)$

㉠에서 $\frac{b}{a}=\frac{2}{10},\ \frac{c}{a}=\left(\frac{2}{10}\right)^2,\ \frac{d}{a}=\left(\frac{2}{10}\right)^3$이므로

$$10^3\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{d}{a}\right)=10^3\left(\frac{2}{10}+\frac{4}{100}+\frac{8}{1000}\right)$$
$$=10^3\times\frac{200+40+8}{1000}=248$$

[참고]

네 수 $a,\ b,\ c,\ d$는 이 순서대로 공비가 $\frac{r}{10}=\frac{1}{5}$인 등비수열을 이룬다.

4) ④

$g(x)=x^kf(x)$이므로 $g'(x)=kx^{k-1}f(x)+x^kf'(x)$이다.

문제의 조건으로부터 $g'(2)=0$이고 $g(2)\neq0$이므로

$k\times2^{k-1}f(2)+2^kf'(2)=0$이고 $f(2)\neq0$이다.

따라서 $f'(2)\neq0$이고 $\frac{f(2)}{f'(2)}=-\frac{2}{k}$이다.

한편 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선의 방정식은

$y-f(2)=f'(2)(x-2)$

이 접선이 점 $\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$을 지나므로

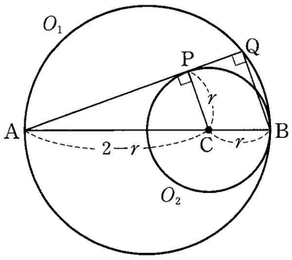
$\frac{f(2)}{f'(2)}=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ k=4$

이때 $g'(1)=4f(1)+f'(1)$이고 $g(1)=f(1)$이므로

$$\frac{g'(1)}{g(1)}-\frac{f'(1)}{f(1)}=\frac{g'(1)-f'(1)}{f(1)}=\frac{4f(1)}{f(1)}=4$$

5) 1



그림과 같이 원 O_2의 중심을 C라 할 때,

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(2-r)^2-r^2}$

$=\sqrt{4-4r}$

두 삼각형 ACP, ABQ는 닮은 삼각형이므로

$\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{CB}}=\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PQ}}$

$(2-r):r=\sqrt{4-4r}:\overline{\mathrm{PQ}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}=\frac{r\sqrt{4-4r}}{2-r}$

$\therefore\ \lim_{r\to+0}\frac{\overline{PQ}}{r}=\lim_{r\to+0}\frac{\sqrt{4-4r}}{2-r}=1$

6) ③

$\log abc=6\log6,\ abc=2^6\times3^6$이므로

$a=2^p\times3^l,\ b=2^q\times3^m,\ c=2^r\times3^n$ ($p,\ q,\ r,\ l,\ m,\ n$은 0 이상 6 이하의 정수)으로 놓으면

$abc=2^{p+q+r}\times3^{l+m+n}=2^6\times3^6$

이때, 두 방정식 $p+q+r=6,\ l+m+n=6$을 만족시키는 0 이상의 정수해를 정하면 그때 $a,\ b,\ c$의 값이 하나씩 정해진다.

$${}_{3+6-1}\mathrm{C}_6\times{}_{3+6-1}\mathrm{C}_6={}_8\mathrm{C}_6\times{}_8\mathrm{C}_6$$
$$={}_8\mathrm{C}_2\times{}_8\mathrm{C}_2$$
$$=28^2=784$$

따라서 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 784이다.

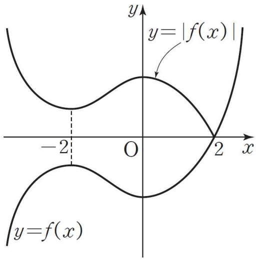
7) ③

조건 (가)에서 $f(0)<0$이고 함수 $y=|f(x)|$는 $x=0$에서 극댓값을 가지므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이다.

또, 함수 $y=|f(x)|$는 $x=-2$, $x=2$에서 극솟값을 가지므로 함

수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값을 갖고 $f(2)=0$이다.

이때, 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로



$f'(x)=3x(x+2)$

$=3x^2+6x$

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2+6x)dx$

$=x^3+3x^2+C$ (단, C는 적분상수)

한편 $f(2)=0$이므로

$f(2)=8+12+C=0$

$\therefore\ C=-20$

따라서 $f(x)=x^3+3x^2-20$이므로

$f(3)=27+27-20=34$

8) ①

$n=2$ 또는 $n=3$이면 $\frac{7}{2}-n>0$이고,

$n=4$이면 $\frac{7}{2}-n<0$이므로

$n=2$일 때, n제곱근 중 실수의 개수는 2

$n=2$일 때, n제곱근 중 실수의 개수는 1

$n=2$일 때, n제곱근 중 실수는 존재하지 않는다.

$\therefore\ f(2)+f(3)+f(4)=2+1+0=3$

9) 정답 4

$\overline{BD}=x$, $\overline{BE}=y$라 하면 $\triangle ABC=2\triangle DBE$이므로

$\frac{1}{2}\cdot4\cdot6\sin B=2\cdot\frac{1}{2}xy\sin B \qquad \therefore\ xy=12$

한편, $\triangle ABC$에서 제이코사인법칙에 의하여

$\cos B=\frac{6^2+4^2-6^2}{2\cdot6\cdot4}=\frac{1}{3}$

이므로 $\triangle DBE$에서 제2코사인법칙에 의하여

$\overline{DE}^2=x^2+y^2-2xy\cos B=x^2+y^2-\frac{2}{3}xy$

이 때, 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x^2+y^2\ge2\sqrt{x^2y^2}=2xy$(단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

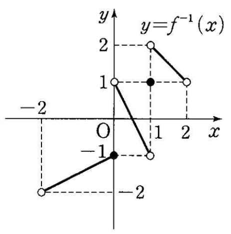
$\overline{DE}^2\ge2xy-\frac{2}{3}xy=\frac{4}{3}xy=16 \qquad \therefore\ \overline{DE}\ge4$

따라서 구하는 최솟값은 4이다.

10) ⑤

ㄱ. 주어진 그래프에서 $\lim_{x\to-1+0}f(x)=1$ (참)

$y=f^{-1}(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭 이동한 것이므로 그림과 같다.



ㄴ. 위의 그래프에서 $\lim_{x\to1-0}f^{-1}(x)=-1$ (참)

ㄷ. (ⅰ) $x=a$에서 극한값이 존재하는 경우

$\lim_{x\to a-0}f^{-1}(x)=\lim_{x\to a+0}f^{-1}(x)=\lim_{x\to a}f^{-1}(x)$이므로

$\lim_{x\to a-0}f^{-1}(x)+\lim_{x\to a+0}f^{-1}(x)=1$이 되려면

$2\lim_{x\to a}f^{-1}(x)=1$, 즉 $\lim_{x\to a}f^{-1}(x)=\frac{1}{2}$

이를 만족시키는 a는 위의 그래프에서 1개다.

(ⅱ) $x=a$에서 극한값이 존재하지 않는 경우

$\lim_{x\to1-0}f^{-1}(x)+\lim_{x\to1+0}f^{-1}(x)=(-1)+2=1$

$\lim_{x\to-0}f^{-1}(x)+\lim_{x\to+0}f^{-1}(x)=(-1)+1=0$

그러므로 $a=1$일 때, 주어진 조건을 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 조건을 만족시키는 실수 a는 2개다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

11) 정답 $\frac{19\pi}{6}$

$\tan x+\sqrt{3}\cot x=1+\sqrt{3}$의 양변에 $\tan x$를 곱하면

$\tan^2x-(1+\sqrt{3})\tan x+\sqrt{3}=0$

$\tan x=t$로 놓으면

$t^2-(1+\sqrt{3})t+\sqrt{3}=0, \qquad (t-1)(t-\sqrt{3})=0$

$\therefore\ t=1$ 또는 $t=\sqrt{3}$

(ⅰ) $t=1$, 즉 $\tan x=1$일 때,

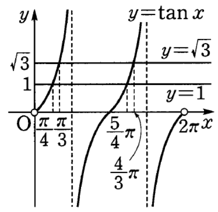
$0<x<2\pi$ 이므로

$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

(ⅱ) $t=\sqrt{3}$, 즉 $\tan x=\sqrt{3}$일 때,

$0<x<2\pi$ 이므로

$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$



따라서 $x_1=\frac{\pi}{4}$, $x_2=\frac{\pi}{3}$, $x_3=\frac{5}{4}\pi$, $x_4=\frac{4}{3}\pi$이므로

$x_1+x_2+x_3+x_4=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}+\frac{5\pi}{4}=\frac{3\pi+4\pi+16\pi+15\pi}{12}$

$=\frac{38\pi}{12}=\frac{19\pi}{6}$

12) ②

$g(x)=\frac{f(x)+|f(x)|}{2}$에서

$f(x)\ge0$이면 $g(x)=\frac{f(x)+f(x)}{2}=f(x)$

$f(x)<0$이면 $g(x)=\frac{f(x)-f(x)}{2}=0$

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-1$에서 연속이고

$\lim_{x\to-1-0}g(x)=\lim_{x\to-1+0}g(x)=g(-1)$

한편 $f(-1)=3>0$이므로 $g(-1)=f(-1)=3$이고

$\lim_{x\to-1-0}g(x)=\lim_{x\to-1-0}(x+4)=3$

$\lim_{x\to-1+0}g(x)=3$

즉, $\lim_{x\to-1+0}ax(x-2)=(-a)\times(-3)=3a=3$

$\therefore\ a=1$

또한, 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1-0} g(x)=\lim_{x\to1+0} g(x)=g(1)$이고 $f(1)=-a=-1<0$이다.

$\therefore\ g(1)=0$

$\lim_{x\to1-0} g(x)=\lim_{x\to1-0} 0=0$에서

$\lim_{x\to1+0} g(x)=0$

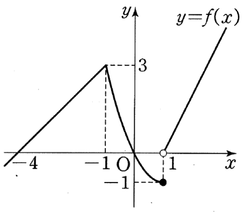
즉, $\lim_{x\to1+0} f(x)=\lim_{x\to1+0}(2x+b)=2+b\le 0$

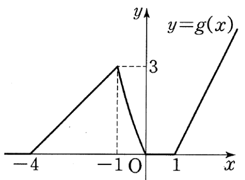
$\therefore\ b\le -2$

$\therefore\ a+b\le 1+(-2)=-1$

[참고]

$a=1,\ b=-2$일 때 두 함수 $y=f(x),\ y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.





13) ①

$S_{n+1}-S_{n-1}=a_{n+1}+a_n$ 이므로 주어진 식은

$(a_{n+1}+a_n)^2=4a_na_{n+1}+4$

따라서 $(a_{n+1}-a_n)^2=4$

$\therefore a_{n+1}-a_n=2\ (\because a_{n+1}>a_n)$

$\therefore a_{20}=1+2(20-1)=39$

14) ⑤

$f'(t)=3t^2+6t-9=3(t+3)(t-1)$

$g'(t)=3t^2+2t-1=(3t-1)(t+1)$

ㄱ. $f'(t)=g'(t)$에서

$3t^2+6t-9=3t^2+2t-1,\quad 4t=8\quad \therefore\ t=2$

그러므로 $t=2$일 때 두 점 P, Q의 속도가 같아진다. (참)

ㄴ. 점 P는 $0<t<1$에서 음의 방향으로 움직이고, $t>1$에서는 양의 방향으로 움직인다.

또한 점 Q는 $0<t<\frac{1}{3}$에서 음의 방향으로 움직이고, $t>\frac{1}{3}$에서는 양의 방향으로 움직인다.

따라서 $\frac{1}{3}<t<1$에서 두 점 P, Q는 서로 방대 방향으로 움직인다. (참)

ㄷ. 두 점 P, Q가 출발 후 처음으로 다시 만날 때 $f(t)=g(t)$이므로

$t^3+3t^3-9t=t^3+t^2-t,\quad 2t^2-8t=0$

$t(t-4)=0\quad \therefore\ t=4\ (\because\ t>0)$

즉, $t=4$일 때 다시 만난다.

선분 PQ의 중점 M의 위치를 $h(t)$라 하면

$h(t)=\frac{(t^3+3t^2-9t)+(t^3+t^2-t)}{2}=t^3+2t^2-5t$

$h'(t)=3t^2+4t-5$

그러므로 $t=4$일 때 중점 M의 속도는

$h'(4)=3\times4^2+4\times4-5=59$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

15) ④

조건 (나)에서 $f(x)$는 삼차함수이므로

함수 $f(x)=ax^2+bx^2+cx+d$ ($a,\ b,\ c,\ d$는 상수, $a\ne0$)로 놓으면 조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로

$-ax^3+bx^2-cx+d=-(ax^3+bx^2+cx+d)$

위 식은 x에 대항 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면

$b=-b,\quad d=-d\qquad \therefore\ b=0,\ d=0$

따라서 $f(x)=ax^3+cx$ 이므로 …… ㉠

$f'(x)=3ax^2+c$ …… ㉡

한편 조건 ㈏에서

$\int\{f(x)+f'(x)\}dx=\frac{1}{2}x^4+mx^3+\frac{1}{2}x^2+nx+C$

의 양변을 x에 대해 미분하면

$f(x)+f'(x)=2x^3+3mx^2+x+n$ …… ㉢

㉠, ㉡을 ㉢에 대입하면

$(ax^3+cx)+(3ax^2+c)=2x^3+3mx^2+x+n$

$ax^3+3ax^2+cx+c=2x^3+3mx^2+x+n$

$a=2,\ 3a=3m,\ c=1,\ c=n$

$\therefore\ m=a=2,\ n=c=1$

$\therefore\ m+n2+1=3$

16) ③

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\tan\alpha+\tan\beta=6,\ \tan\alpha\tan\beta=4$

이다. 이때

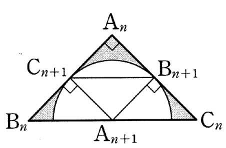
$$(\tan\alpha-\tan\beta)^2=(\tan\alpha+\tan\beta)^2-4\tan\alpha\tan\beta$$
$$=6^2-4\times4=20$$

이므로

$|\tan\alpha-\tan\beta|=2\sqrt{5}$

$|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|=\frac{2\sqrt{5}}{1+4}$

17) ④



직각이등변삼각형 $\mathrm{A_nB_nC_n}$에서 $\overline{\mathrm{A_nB_n}}=\overline{\mathrm{A_nC_n}}=\mathrm{a_n}$이라 하자.

점 $\mathrm{A_{n+1}}$이 반원의 중심이고, 두 점 $\mathrm{B_{n+1}}$, $\mathrm{C_{n+1}}$은 접점이므로

$\angle\mathrm{A_{n+1}C_{n+1}B_n}=\angle\mathrm{A_{n+1}B_{n+1}C_n}=90°$

이고,

$\overline{\mathrm{A_{n+1}C_{n+1}}}=\overline{\mathrm{A_{n+1}B_{n+1}}}$

이므로 사각형 $\mathrm{A_nC_{n+1}A_{n+1}B_{n+1}}$은 정사각형이다. 따라서

$\overline{\mathrm{A_{n+1}B_{n+1}}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{A_nC_n}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{A_nB_n}}$

$\therefore\ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$

한편, 그림 R_n에서 새로 색칠한 도형과 그림 R_{n+1}에서 새로 색칠한 도형의 닮음비가 $1:\frac{1}{2}$이므로 넓이의 비는 $1:\frac{1}{4}$이다.

이때

$S_1 = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} - \frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\pi}{4}$

이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{4^2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) + \cdots$$

$$= \frac{1 - \frac{\pi}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4-\pi}{3}$$

18) ③

$f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$a = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_2^{2+x} f(t)dt = \lim_{x\to 0} \frac{F(x+2) - F(2)}{x}$$

$$= F'(2) = f(2) = \sin\frac{2}{3}\pi - 1$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$$

$$b = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} \int_1^{x^2} f(t)dt$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{F(x^2) - F(1)}{(x-1)(x+1)} \cdot (x+1)$$

$$= 2F'(1) = 2f(1) = 2\left(\sin\frac{\pi}{3} - 1\right)$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) = \sqrt{3} - 2$$

$$\therefore\ 2a - b = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) - (\sqrt{3} - 2) = 0$$

19) ②

$f(x) = x + \ln x,\ \ g(x) = e^x$에서

$f(g(x)) = f(e^x) = e^x + \ln e^x = e^x + x$

$g(f(x)) = g(x + \ln x) = e^{x + \ln x} = xe^x$

$$\therefore\ \int_2^4 \{f(g(x)) + g(f(x))\} dx$$

$$= \int_2^4 (e^x + x + xe^x) dx$$

$$= \int_2^4 x\,dx + \int_2^4 (x+1)e^x\,dx$$

$$= \left[\ \frac{x^2}{2}\ \right]_2^4 + \left[\ (x+1)e^x\ \right]_2^4 - \int_2^4 e^x dx$$

$$= (8-2) + (5e^4 - 3e^2) - \left[\ e^x\ \right]_2^4$$

$$= 6 + 5e^4 - 3e^2 - (e^4 - e^2) = 6 - 2e^2 + 4e^4$$

$\therefore p = 6,\ \ q = -2,\ \ r = 4$

$\therefore p + q + r = 6 - 2 + 4 = 8$

20) 48

직선 l_1의 기울기가 $t^2 + 2t$이므로

$$f'(1) = \lim_{t\to 1}(t^2 + 2t) = 3$$

또, 직선 l_2의 기울기가 $a^2 + 2at + t^2$이므로

$$g'(a) = \lim_{t\to a}(a^2 + 2at + t^2) = 4a^2$$

함수 $y = g(f(x))$의 도함수는

$y' = g'(f(x))f'(x)$

따라서 점 $B(1,\ g(f(1)))$에서의 접선의 기울기는

$g'(f(1))f'(1) = g'(2)f'(1)\ \ (\because\ f(1) = 2)$

$= 16 \cdot 3 = 48$