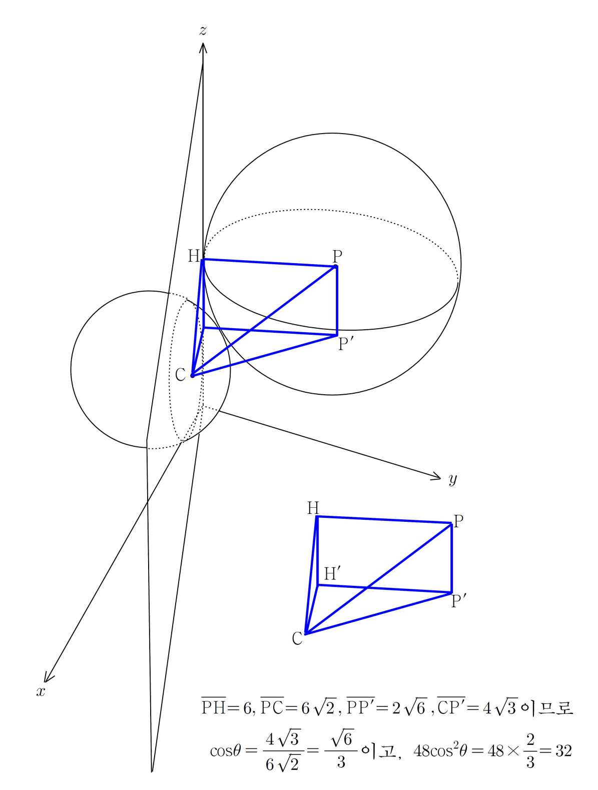
정답

1. 40

2. 32

[오르비닉 : 빛과소금같은님의 멋진 기하학적 해설]



[점 P를 구하는 과정은 해설강의를 참조하세요]

3. ⑤

두 직선 l, m의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(1,\ 3,\ 2)$, $\vec{v}=(2,\ -1,\ 4)$

두 직선 l, m이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

$\overline{\mathrm{AQ}}=2$이므로 $\overline{\mathrm{AP}}=2\sqrt{6}$

삼각형 APQ는 $\angle\mathrm{Q}=90^\circ$인 직각 삼각형이므로

선분 AP의 중점은 삼각형 APQ의 외접원의 중심이고

$\overline{\mathrm{QM}}$은 이 원의 반지름의 길이와 같다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{QM}}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{6}$

4. 12

원 C의 방정식이

$S\ :\ (x-2)^2+(y-2\sqrt{3})^2=4,\ z=0$ 이고

원점에서 그은 두 접선의 접점은 $(0,2\sqrt{3},0)$, $(3,\sqrt{3},0)$이고

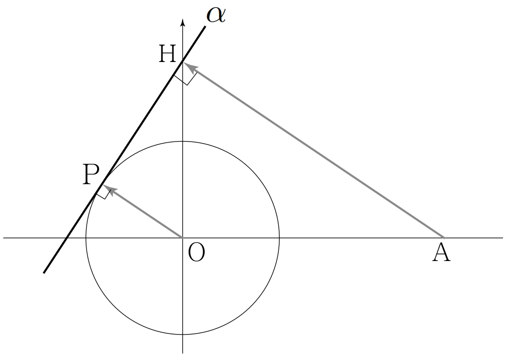
A에서 더 멀리 떨어진 점이 B이므로 $\mathrm{B}(3,\sqrt{3},0)$이다.

5. ④

점 A에서 구 S에 그은 접선 중에서 zx평면과 만나지 않는 두 접선은 점 A를 지나고 zx평면에 평행한 평면인 $y=2$ 에 포함된 두 접선이다. 이 평면과 구를 평면도형화(단면화)하여 나타낸후 해결하면 P, Q의 좌표를 구하는 과정이 생략된다.

6. 22

평면 α와 xy평면의 교선 방향으로 바라보면 다음과 같이 보인다.



$\mathrm{A}(6,2\sqrt{3},0)$에서 평면 α에 내린 수선의 발을

$\mathrm{H}(0,0,p)$라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{HA}}=(6,2\sqrt{3},-p)$가 평면 α의 법선벡터라 할 수 있다.

$\mathrm{H}(0,0,p)$가 α 위의 점이므로

$\alpha:6x+2\sqrt{3}y-pz+p^2=0$

라 두고

구 S와 접한다는 조건을 이용하면 $p=\pm4$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ 가 평행하고 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=2$, $|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=8$ 이므로

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\pm1)$

$\therefore\ 8a^2+4b^2+c^2=22$

7. ④

점 Q는 점 P의 원점에 대한 대칭점이므로

점 Q의 자취는

$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=16 \\ \sqrt{3}y-z-4=0 \end{cases}$ 이므로

$z=-1$을 대입하면

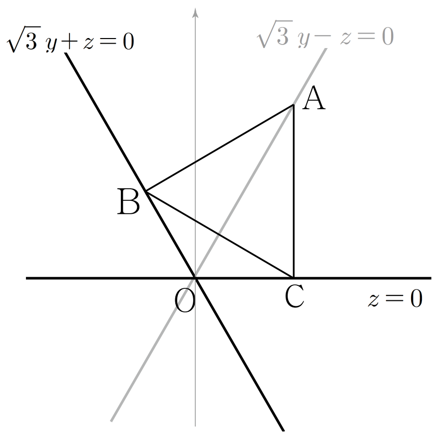
$y=\sqrt{3}$, $x=\pm2\sqrt{3}$

따라서, 두 점 사이의 거리는 $4\sqrt{3}$

8. 100

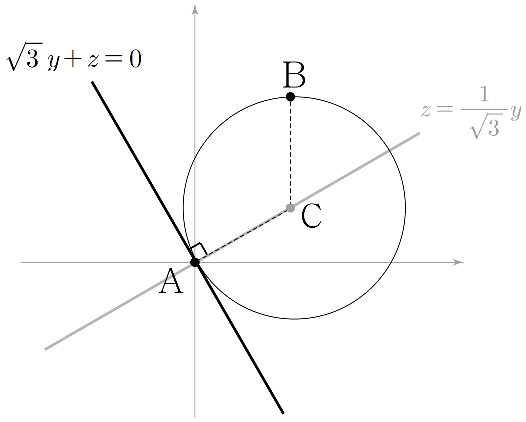
점 A가 평면 $2x+y-\sqrt{3}z=4$ 위의 점이라는 점을 이용하고 좌표와 방정식만으로 진행하는 풀이는 불가능한 수준은 아니나 매우 복잡해짐

[평면도형화를 통한 기하학적 풀이]
세 개의 평면 중에서 좌표계에서 관찰하기 쉬운
$\sqrt{3}\,y+z=0$, $z=0$를 기준으로 시작하는 것이 핵심



두 평면의 교선이 x축이므로 x축을 바라보는 방향으로
평면도형화하여 점 A가 평면 $z=\sqrt{3}y$위에 있음을 파악하고
평면 ABC가 x축에 수직임을 이해하여 원점에서 평면
ABC에 이르는 거리가 곧 점 A의 x좌표의 절댓값임을
이해하면 점 A의 x좌표는 -6또는 6임
넓이조건에 의하면
$\mathrm{A}(6,\ 4,\ 4\sqrt{3})$이 아니고 $\mathrm{A}(-6,\ -8,\ -8\sqrt{3})$임
$\therefore \mathrm{G}(-6,\ -4,\ -4\sqrt{3})$

9. 72
평면 $\sqrt{3}\,y+z=0$가 x축을 포함하고
직선 $y=2\sqrt{3}$, $z=6$가 x축에 평행하므로
x축 방향으로 바라보면 다음과 같이 보인다.



구 S의 중심을 C라 하면 두 점 A,B가 각각 평면과 직선이
구 S와 접하는 접점이므로
$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$가 평면 $\sqrt{3}\,y+z=0$의 법선이고
$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$는 직선 $y=2\sqrt{3}$, $z=6$에 수직이다.
따라서, 두 점 B,C의 x좌표는 점 A의 x좌표와 같은
4이고, 점 C는 평면 $z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}y$ 위의 점이다.
$\mathrm{B}(4, 2\sqrt{3}, 6)$, $\mathrm{C}(4,\ \sqrt{3}c,\ c)$라 두고
$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$임을 이용하면 $c=2$를 얻는다.

따라서,
$\mathrm{B}(4, 2\sqrt{3}, 6)$, $\mathrm{C}(4, 2\sqrt{3}, 2)$
$S: (x-4)^2+(y-2\sqrt{3})^2+(z-2)^2=16$
이고

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}})\\&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}\\&=40+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{CP}}|\cos\theta\\&=40+8\times4\times\cos\theta\end{aligned}$$

$\therefore \theta=0$일 때, 내적의 최댓값은 72

10. 67
$\mathrm{B}(0, -3\sqrt{2},\ 2)$
굳이 S의 중심의 좌표를 찾는다면 $\left(0, \dfrac{-\sqrt{2}}{3}, \dfrac{-2}{3}\right)$
가장 작은 구의 반지름은 $\dfrac{8}{\sqrt{3}}$
구하는 단면의 넓이는 $\dfrac{64}{3}\pi$
$\therefore\ p+q=67$

[해설강의에 자세한 풀이와 전략 안내했습니다. 참조하세요]
https://www.youtube.com/watch?v=Hpzt6Ywz-EM

11. 32
직선과 구의 교점을 직접 찾아 $\mathrm{A}(2, -4, 4)$,
$\mathrm{B}(4, -2,\ -4)$라 두고
점 P에 대해
i) 구 위에 있음
ii) C로부터 거리가 12임
iii) 삼각형의 넓이가 최대가 되려면 평면 OAB 위에 있음
을 적용하여 구하면 점 $\mathrm{P}(-2, 4, -4)$임을 구할 수 있음
(계산상으로는 두 점이 나오는데 C로부터 거리가 더 먼 것을
고르면 됨)

[평면도형화를 이용한 기하학적 해법]
평면 OAB에서 점 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$, $\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{OPC}=90^\circ$임을
이용하면 중점연결정리에 의해 점 P가 원점 O에 대한 점
A의 대칭점임을 파악할 수도 있음

12. ③
$\mathrm{P}(t-1, 2t, 1)$, $\mathrm{A}(a, b, 6)$라 두고 두 점사이의 거리공식을
적용하여 정리해 보자.
$\forall \mathrm{P}$, $\overline{\mathrm{AP}}>\overline{\mathrm{BP}}$

$\Leftrightarrow$ $\forall \mathrm{P}$, $\overline{\mathrm{AP}}^2 > \overline{\mathrm{BP}}^2$

$\Leftrightarrow$ $\forall t$, $(t-a-1)^2+(2t-b)^2+5^2 > (t-3)^2+(2t-4)^2+1^2$

$\Leftrightarrow$ $\forall t$, $2(10-a-2b)t+a^2+2a+b^2>0$

임의의 실수 t에 대하여 이 부등식이 성립하려면

$10-a-2b=0$이면 된다.

자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)은

$(8,1)$, $(6,2)$, $(4,3)$, $(2,4)$로 네 개다.

[참고]

직선 l 위의 임의의 점 P에 대해

$\overline{\mathrm{AP}} > \overline{\mathrm{BP}}$이려면 $\overline{\mathrm{AB}} \perp l$ 이어야 한다.

직선 l의 방향벡터 $\vec{u}=(1,2,0)$에 대해

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \vec{u}=0$ 에서 $10-a-2b=0$를 이끌어 낼 수 있다.