1

2024 6월 모의고사 **9번**

9. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)a_k} = n^2 + 2n$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은? [4점]

① $\frac{10}{21}$ ② $\frac{4}{7}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{16}{21}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

'$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)a_k} = n^2 + 2n$'

"n^2+2n이 원점을 지나는 이차함수 꼴이네. 그럼 $\frac{1}{(2n-1)a_n}$는 **첫째항이** 3**이고 공차가** 2**인 등차수열**이겠다."

(NOTES 참고)

$\therefore \frac{1}{(2n-1)a_n} = 2n+1 \Rightarrow a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$ (합을 구해야 한다는 것을 염두해두자.)

따라서, $\sum_{n=1}^{10} a_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{21}\right) = \frac{10}{21}$이다.

답: ①

| NOTES

- 어떤 수열의 합이 **원점을 지나는 이차함수**의 꼴을 지니고 있다면, 그 수열은 **등차수열**이다.

$\sum_{k=1}^{n} = an^2 + bn$이 주어졌다면, $a_n = 2an - a + b$이다.

2

2024 6월 모의고사 **10번**

10. 양수 k에 대하여 함수 $f(x)$는

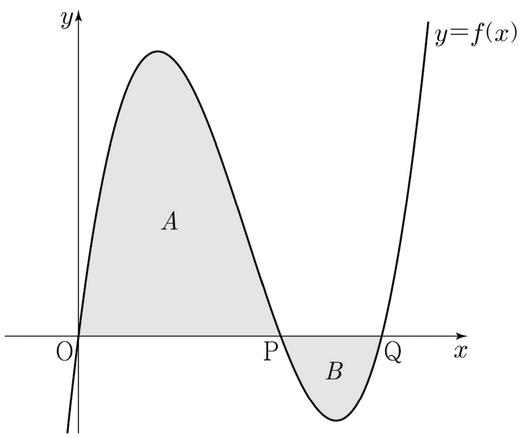
$$f(x)=kx(x-2)(x-3)$$

이다. 곡선 $y=f(x)$와 x축이 원점 O와 두 점 P, Q $(\overline{\mathrm{OP}}<\overline{\mathrm{OQ}})$에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$와 선분 OP로 둘러싸인 영역을 A, 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 영역을 B라 하자.

$$(A\text{의 넓이})-(B\text{의 넓이})=3$$

일 때, k의 값은? [4점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$



P$(2,\ 0)$, Q$(3,\ 0)$이고, $0<x<2$에서 $f(x)>0$, $2<x<3$에서 $f(x)<0$이므로,

각각의 넓이를 구할 필요 없이 (A의 넓이) − (B의 넓이)는 곧 $\int_0^3 f(x)dx=3$이다.

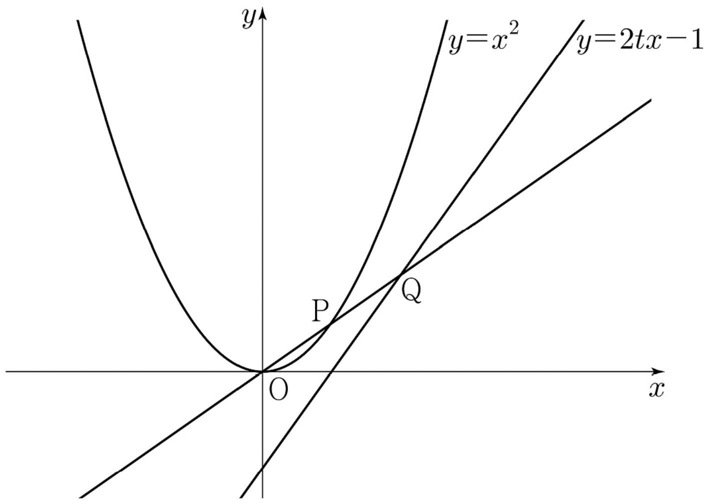
(정적분은 부호를 가진 넓이임을 참고하자.)

$$k\int_0^3(x^3-5x^2+6x)dx=k\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+3x^2\right]_0^3=\frac{9}{4}k=3 \Rightarrow k=\frac{4}{3}$$

답: ②

2024 6월 모의고사 **11번**

11. 그림과 같이 실수 $t\,(0<t<1)$에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 중에서 직선 $y=2tx-1$과의 거리가 최소인 점을 P라 하고, 직선 OP가 직선 $y=2tx-1$과 만나는 점을 Q라 할 때, $\lim_{t\to1-}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{1-t}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

곡선 위의 점과 직선 사이의 거리는 직관적으로 해당 직선의 기울기와 **같은 접선의 기울기를 갖는 점**에서 최소를 갖는다.

따라서 점 P에서의 접선의 기울기는 $2t$일 것이고,

$\frac{dy}{dx}=2x$이므로, $\mathrm{P}(t,\ t^2)$이다.

따라서 직선 OP의 방정식은 $y=tx$이고,
이 직선이 $y=2tx-1$과 만나는 교점이 Q이므로

두 직선을 연립하면 $\mathrm{Q}\left(\frac{1}{t},\ 1\right)$이다.

따라서 마지막으로 $\overline{\mathrm{PQ}}$를 계산해보면, $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\left(\frac{1}{t}-t\right)^2+(1-t^2)^2}=(1-t^2)\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}$ 이다.

따라서, $\lim_{t\to1-}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{1-t}=\lim_{t\to1-}\frac{(1-t)(1+t)\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}}{1-t}=2\sqrt{2}$

답: ③

| 무엇을 기준으로 학생들을 변별했는가?

1. 직선과 접선이 **평행한 상태**에서 거리가 최소가 됨을 파악할 수 있다.

4

2024 6월 모의고사 **12번**

12. $a_2=-4$이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n=a_n+a_{n+1}\,(n\geq 1)$이라 하고, 두 집합 A, B를

$$A=\{a_1,\,a_2,\,a_3,\,a_4,\,a_5\},\quad B=\{b_1,\,b_2,\,b_3,\,b_4,\,b_5\}$$

라 하자. $n(A\cap B)=3$이 되도록 하는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{20}의 값의 합은? [4점]

① 30 ② 34 ③ 38 ④ 42 ⑤ 46

"$b_n=a_n+a_{n+1}$이므로 b_n 또한 등차수열이겠네? a_n의 공차를 d라고 한다면 b_n의 공차는 $2d$겠다."

집합 A와 B를 나열해보자.

구조화하면 다음과 같다.

$A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5\}=\{-4-d,\ -4,\ -4+d,\ -4+2d,\ -4+3d\}$
$B=\{b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5\}=\{-8-d,\ -8+d,\ -8+3d,\ -8+5d,\ -8+7d\}$

"**공차가 두 배 차이**가 나니까, $a_1=b_1$라면 $a_3=b_2$, $a_5=b_3$ $\cdots$
이런식으로 a_n에선 **두 항 이후가** b_n에서 **바로 다음항**과 같다는 형태로 전개되겠지..?"

"그렇다면, $n(A\cap B)=3$이 되기 위해선 **무조건 a_1과 같은 값을 가지는 b_n이 있어야겠다.**"
(그래야만 $a_1=b_n$, $a_3=b_{n+1}$, $a_5=b_{n+2}$가 되기 때문이다.)

"이제 케이스를 나눠보자."

i) $a_1=b_1$일 때, $-4-d=-8-d$이므로 성립하지 않는다.

ii) $a_1=b_2$일 때, $-4-d=-8+d \Rightarrow d=2$이다. 이때, $a_{20}=-4+2\times 18=32$

iii) $a_1=b_3$일 때, $-4-d=-8+3d \Rightarrow d=1$이다. 이때, $a_{20}=-4+1\times 18=14$

$a_5=b_{n+2}$을 만족하려면 $n\leq 3$이어야하므로, 오직 위 경우만 가능하다.

따라서, 가능한 모든 a_{20}의 값의 합은 $32+14=46$이다.

답: ⑤

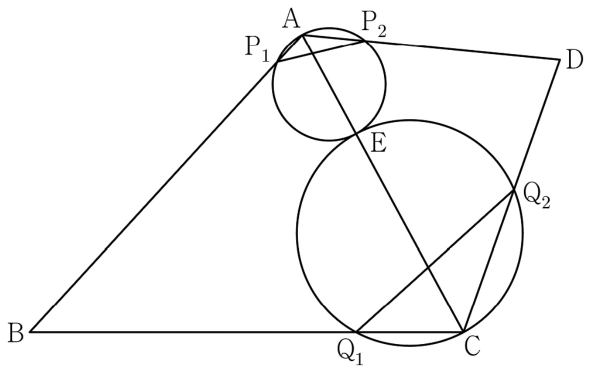
5

2024 6월 모의고사 **13번**

13. 그림과 같이

$$\overline{BC}=3,\ \overline{CD}=2,\ \cos(\angle BCD)=-\frac{1}{3},\ \angle DAB>\frac{\pi}{2}$$

인 사각형 ABCD 에서 두 삼각형 ABC 와 ACD 는 모두 예각삼각형이다. 선분 AC 를 $1:2$ 로 내분하는 점 E 에 대하여 선분 AE 를 지름으로 하는 원이 두 선분 AB, AD 와 만나는 점 중 A 가 아닌 점을 각각 P_1, P_2 라 하고, 선분 CE 를 지름으로 하는 원이 두 선분 BC, CD 와 만나는 점 중 C 가 아닌 점을 각각 Q_1, Q_2 라 하자. $\overline{P_1P_2}:\overline{Q_1Q_2}=3:5\sqrt{2}$ 이고 삼각형 ABD 의 넓이가 2 일 때, $\overline{AB}+\overline{AD}$ 의 값은? (단, $\overline{AB}>\overline{AD}$) [4점]



① $\sqrt{21}$ ② $\sqrt{22}$ ③ $\sqrt{23}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ 5

"조건들이 상당히 복잡하게 얽혀있는 것 같다. 구할 수 있는 것이 무엇인지 살펴보아야겠다."

"일단 변 $\overline{BC}$, $\overline{CD}$가 주어졌으니, $\cos(\angle BCD)=-\frac{1}{3}$을 통해 코사인법칙을 사용하여 ΔBCD에서 $\overline{BD}$를 구할 수 있겠다."

코사인법칙을 적용하면, $-\frac{1}{3}=\frac{3^2+2^2-\overline{BD}^2}{12}\ \Rightarrow\ \overline{BD}=\sqrt{17}$

"그 다음, 점 E가 $1:2$ 내분점임을 이용해보자."

먼저 $\overline{AE}=2r$, $\overline{EC}=4r$이라 하자. 이후 각 삼각형 ΔP_1AP_2와 ΔQ_1CQ_2에서 사인법칙을 적용한 다음에,

$$\frac{\overline{Q_1Q_2}}{\sin(\angle BCD)}=\frac{3\overline{Q_1Q_2}}{2\sqrt{2}}=4r\ \Rightarrow\ \overline{Q_1Q_2}=\frac{8\sqrt{2}}{3}r\ \cdots ㉠$$

$$\frac{\overline{\mathrm{P_1P_2}}}{\sin(\angle \mathrm{BAD})} = 2r \implies \overline{\mathrm{P_1P_2}} = 2r\sin(\angle \mathrm{BAD}) \ \cdots ㉡$$

㉠, ㉡과 $\overline{\mathrm{P_1P_2}} : \overline{\mathrm{Q_1Q_2}} = 3:5\sqrt{2}$ 임을 이용하면

$2r\sin(\angle \mathrm{BAD}) : \frac{8\sqrt{2}}{3}r = 3:5\sqrt{2} \implies \sin(\angle \mathrm{BAD}) = \frac{4}{5}$ 임을 알 수 있다.

이제, $\sin(\angle \mathrm{BAD}) = \frac{4}{5}$ 를 이용하여 $\overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{AD}}$의 길이를 구해보자.

"$\overline{\mathrm{AB}} = b$, $\overline{\mathrm{AD}} = d$라고 하면, **사인 넓이공식**과 **코사인법칙**을 통해 b와 d에 대한 연립방정식을 세울 수 있겠다."

1) 먼저 $\triangle \mathrm{ABD}$에서 코사인법칙을 사용하면, $\cos(\angle \mathrm{BAD}) = \frac{b^2+d^2-17}{2bd} \implies b^2+d^2+\frac{6}{5}bd-17=0$

2) 발문에 주어진 $\triangle \mathrm{ABD} = 2$를 이용해, $\frac{1}{2}\sin(\angle \mathrm{BAD}) \times b \times d = 2 \implies bd = 5$

두 식을 연립하기 전, $b^2+d^2=11$, $bd=5$와 같이 정리할 수 있다.

따라서, $(b+d)^2 = b^2+d^2+2bd = 21 \implies b+d = \sqrt{21}$

답: ①

❙ 무엇을 기준으로 학생들을 변별했는가?

1. 비례식 $\overline{\mathrm{P_1P_2}} : \overline{\mathrm{Q_1Q_2}} = 3:5\sqrt{2}$을 통해 서로 다른 두 원의 반지름이 $1:2$임과 엮어 **사인법칙**을 사용할 수 있는가?

2. 하나의 삼각형 내 하나의 각에 대해, **사인법칙**과 **코사인법칙**을 둘 다 사용함으로써 **연립방정식**을 세울 수 있는가?

2024 6월 모의고사 **14번**

14. 실수 $a\,(a \geq 0)$에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$를

$$v(t) = -t(t-1)(t-a)(t-2a)$$

라 하자. 점 P가 시각 $t=0$일 때 출발한 후 운동 방향을 한 번만 바꾸도록 하는 a에 대하여, 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량의 최댓값은? [4점]

① $\frac{1}{5}$　② $\frac{7}{30}$　③ $\frac{4}{15}$　④ $\frac{3}{10}$　⑤ $\frac{1}{3}$

운동 방향이 한 번만 바뀌도록 하려면 $v(t)$의 부호변화가 한 번만 발생해야 한다.

따라서 세 가지 경우가 존재한다.

i) $a=0$일 때, $v(t)=-t^3(t-1)$이므로, $\int_0^2 v(t)dt=-\frac{12}{5}$

ii) $a=1$일 때, $v(t)=-t(t-1)^2(t-2)$이므로, $\int_0^2 v(t)dt=\frac{4}{15}$

iii) $a=\frac{1}{2}$일 때, $v(t)=-t(t-\frac{1}{2})(t-1)^2$이므로, $\int_0^2 v(t)dt=-\frac{11}{15}$

따라서 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량의 최댓값은 $a=1$일 때, $\frac{4}{15}$이다.

답: ③

2024 6월 모의고사 **15번**

15. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1 = k$이고, 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2n - k & (a_n \le 0) \\ a_n - 2n - k & (a_n > 0) \end{cases}$$
> 이다.

$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

① 10 ② 14 ③ 18 ④ 22 ⑤ 26

이 문제에서 모든 케이스를 가르는 핵심 요소는 a_n의 부호다.

그렇다면, 이 문제를 접근할 때 항상 **a_n의 부호가 어떻게 전개될지**에 초점을 맞추어보자.
이제 a_1부터 나열해보면,

$a_1 = k$
$a_2 = -2$
$a_3 = 2 - k$

..."여기서부터는 **a_3의 부호에 따라** 다르게 전개될 것 같다."

$k = 1$일 때,

$a_3 = 1$,
$a_4 = -6$,
$a_5 = 1$,
$a_6 = -10$이다.

a_3, a_4, a_5, a_6의 부호를 나타내보면
$(+,\ -,\ +,\ -)$이므로 $a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 > 0$ $\cdots$ $(\times)$

"앞으로 $k=2,\ 3\ \cdots$등 계속 대입해야하는데, 일일이 구하는 것은 지나치게 오래 걸릴 것 같은데..."

"a_{n+1}과 a_n사이에 어떤 규칙성이 있지 않을까..?"

$$a_{n+1}-a_n=\begin{cases}2n-k & (a_n\le 0)\\ -2n-k & (a_n>0)\end{cases}$$

"그렇다면, **a_n의 부호가 음수(또는 0)인 $a_{n+1}-a_n$들끼리 공차가 2인 등차수열을 이루겠네**." $\cdots$ ㉠

"그렇다면 **a_n의 부호가 바뀌는 지점들** 사이에도 어떠한 규칙성이 있는 걸까..?"

만약 p번째 항에 대해서 $a_p\le 0$, $a_{p+1}>0$이라고 해보자.

이때, $a_{p+1}=a_p+2p-k$이므로,
$a_{p+1}\le 2p-k$일 것이다.

그렇다면, $a_{p+2}=a_{p+1}-2(p+1)-k$이므로,
$a_{p+2}\le -2-2k<0$이다.

그 후, $a_n\ge 0$이 되는 그 순간까지 다시
$a_{n+1}-a_n=b_n$을 만족할 것이다.

즉, **어떠한 p번째 항에서 $p+1$번째 항으로 갈 때 음수항(또는 0)에서 양수항으로 부호가 바뀐다면,
$p+2$번째 항은 다시 음수항이 된다.** $\cdots$ ㉡

또한, **$a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6$ 중 하나라도 0이 된다면 $a_3\times a_4\times a_5\times a_6=0$이므로 더 생각할 필요가 없어진다.** $\cdots$ ㉢

마지막으로, **$k\ge 2$일 때, $a_4=8-2k$이다.**
이제부터, a_3과 a_4는 k만 대입하면 될 것 같다.

"이 이상의 규칙성은 보이지 않는다.. 이제 다시 전개해보자."

㉠, ㉡, ㉢을 염두해둔 채로 전개해보면,

$k=2$일 때, $a_3=0$이므로 ㉢에 의해 더 고려할 필요 없이 $a_3\times a_4\times a_5\times a_6=0$이다. $\cdots(\times)$

$k=3$일 때,
$a_3=-1$,
$a_4=2$,
$a_5=-9$,
$a_6=-2$이다.

$(-,\ +,\ -,\ -)$이므로 $a_3\times a_4\times a_5\times a_6<0$ $\cdots(\bigcirc)$

$k=4$일 때,

$a_3=-2$,

$a_4=0$이므로 ㉢에 의해 $a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6=0$이다. $\cdots(\times)$

$k=5$일 때,

$a_3=-3$,

$a_4=-2$, ㉠을 참고하여

$a_5=1$, ㉡을 참고하여

$a_6<0$이다.

$(-,\ -,\ +,\ -)$이므로 $a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6<0$ $\cdots(\bigcirc)$

$k=6$일 때,

$a_3=-4$,

$a_4=-4$, ㉠을 참고하여

$a_5=-2$,

$a_6=2$이다.

$(-,\ -,\ -,\ +)$이므로 $a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6<0$ $\cdots(\bigcirc)$

$k=7$일 때,

$a_3=-5$,

$a_4=-6$, ㉠을 참고하여

$a_5=-5$,

$a_6=-2$이다.

$(-,\ -,\ -,\ -)$이므로 $a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6>0$ $\cdots(\times)$

$k>7$일 때에도 전부 $(-,\ -,\ -,\ -)$일 것이다.

따라서 가능한 k는 오직 $3,\ 5,\ 6$ 뿐이다.

답: 14

| 무엇을 기준으로 학생들을 변별했는가?

1. k에 따라 $a_{3,}$ a_4, a_5, a_6을 나열할 수 있다.

2. 수열을 나열하는 과정에서 몇 가지 규칙성을 찾아내어, 나열하는 과정을 단축시킬 수 있다.

| NOTES

- 익숙하지 않은 수열에서 '**일단 나열해보기**'는 기본적인 접근방식이다. 그러나, 나열의 과정이 지나치게 길어진다면, **숨겨진 규칙성은 없는지, 나열 과정을 단축시킬 수 있는 방법은 없는지** 살펴볼 필요가 있다.

8

2024 6월 모의고사 **20번**

20. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(9)$의 값을 구하시오. [4점]

$x \geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \geq g(4)$이고 $\lvert g(x)\rvert \geq \lvert g(3)\rvert$이다.

$g(0)=0$이고, $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$g(x)=\dfrac{1}{3}x(x^2+ax+b)$꼴임을 알 수 있다.

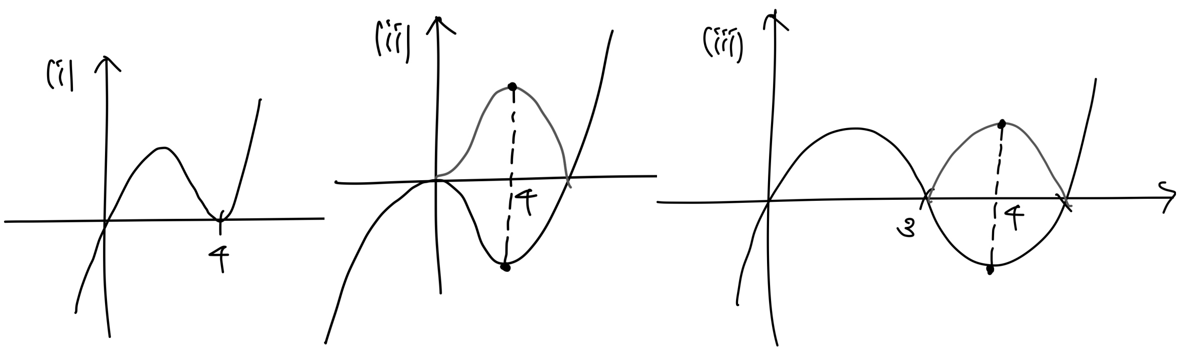
먼저, 발문에 따르면 모든 실수 x에 대해 $\lvert g(x)\rvert \geq \lvert g(3)\rvert$이다.

"굉장히 이상한 발문이다. 만약 $x \geq 4$에서 $g(x)=0$을 만족하는 **실근이 하나라도 있다면**,
당연히 $\lvert g(x)\rvert$의 최솟값은 0이다." ⋯ ㉠

또한, $x \geq 1$에서 $g(x) \geq g(4)$이다.
그 말은 즉, $x=4$에서 삼차함수 $g(x)$는 **극솟값을 가질 것이다**.

(직관적으로 바로 극소라고 판단하는 것을 권장한다.)

따라서, 그릴 수 있는 $g(x)$의 개형은 다음과 같다.



그러나, $(i), (ii)$의 경우는 $\lvert g(x)\rvert \geq \lvert g(3)\rvert$ 조건을 위배하기 때문에 만족할 수 없다.

$\therefore\ g(x)=\dfrac{1}{3}x(x-3)(x-k),\ g'(4)=0$

따라서, $g'(x)=x^2-\dfrac{2}{3}(k+3)x+k$에 $x=4$를 대입하면 $g'(4)=16-\dfrac{8}{3}(k+3)+k=0 \Rightarrow k=\dfrac{24}{5}$이다.

마지막으로, $g'(x)=f(x)$이므로 $f(x)=x^2-\dfrac{26}{5}x+\dfrac{24}{5}$이다.

$\therefore \ f(9) = 39$

답: 39

| 무엇을 기준으로 학생들을 변별했는가?

1. 주어진 부등식의 **특수한 경우**를 고려하여 그래프를 추론할 수 있다.

2. 적분 형태로 표현된 함수 $g(x)$가 원점을 삼차함수임을 추론할 수 있고, 이를 통해 개형을 추론할 수 있다.

| NOTES

- 거의 모든 조건들이 **오직 부등호로만** 이루어져 있어 일부 추론을 요구한다.

- 과거 기출들은 기존 기출들의 형식을 살짝 변형하여 정직하게 기출문항을 열심히 풀었다면 익숙한 형태의 문항을 풀 수 있게 출제를 하였다.

  그러나, 점점 과거 기출로부터 익숙한 느낌을 지우고 **스스로 추론하게끔 하는 문항**들이 출제되는 경향이 있다.

  따라서 우리는 '스스로' 문항을 마주하고 '어떻게 하면 조건을 만족시킬 수 있도록 개형을 그릴 수 있을까'에 초점을 맞춰가며 공부하는 것이 좋다.

2024 6월 모의고사 **21번**

21. 실수 t에 대하여 두 곡선 $y=t-\log_2 x$와 $y=2^{x-t}$이 만나는 점의 x좌표를 $f(t)$라 하자.
<보기>의 각 명제에 대하여 다음 규칙에 따라 A, B, C의 값을 정할 때, $A+B+C$의 값을 구하시오. (단, $A+B+C\neq 0$) [4점]

- 명제 ㄱ이 참이면 $A=100$, 거짓이면 $A=0$이다.
- 명제 ㄴ이 참이면 $B=10$, 거짓이면 $B=0$이다.
- 명제 ㄷ이 참이면 $C=1$, 거짓이면 $C=0$이다.

<보 기>

ㄱ. $f(1)=1$이고 $f(2)=2$이다.

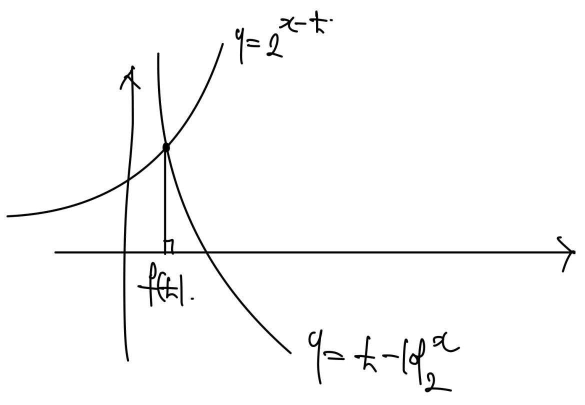
ㄴ. 실수 t의 값이 증가하면 $f(t)$의 값도 증가한다.

ㄷ. 모든 양의 실수 t에 대하여 $f(t)\geq t$이다.

지수함수와 로그함수의 교점을 $f(t)$라고 하였다.

두 함수는 초월함수이므로, **직접 연립하여 x좌표를 구하는 것은 불가능**해보인다.
따라서 **기하학적 관점**에서 풀이를 진행해보자.

먼저 각 그래프를 그려보면 다음과 같다.



앞으로 두 함수의 관계를 파악할 일이 많아보이니,
$g(x)=t-\log_2 x$, $h(x)=2^{x-t}$라고 해두자.

ㄱ. $f(1)=1$이고 $f(2)=2$이다. 일단 $g(x)=t-\log_2 x$와 $h(x)=2^{x-t}$에 직접 대입해보자.

1) $t=1$일 때, 두 함수에 $x=1$을 대입해보면
$g(1)=t=1$, $h(1)=2^{1-t}=1$로, 두 함수 모두 점 $(1,\ 1)$을 지난다.

2) $t=2$일 때 마찬가지로 $x=2$을 대입해보면
$g(2)=t-1=1$, $h(2)=2^{2-t}=1$로, 두 함수 모두 점 $(2,\ 1)$을 지난다. ⋯ ㉠

따라서 ㄱ은 참이다 ⋯ (참)

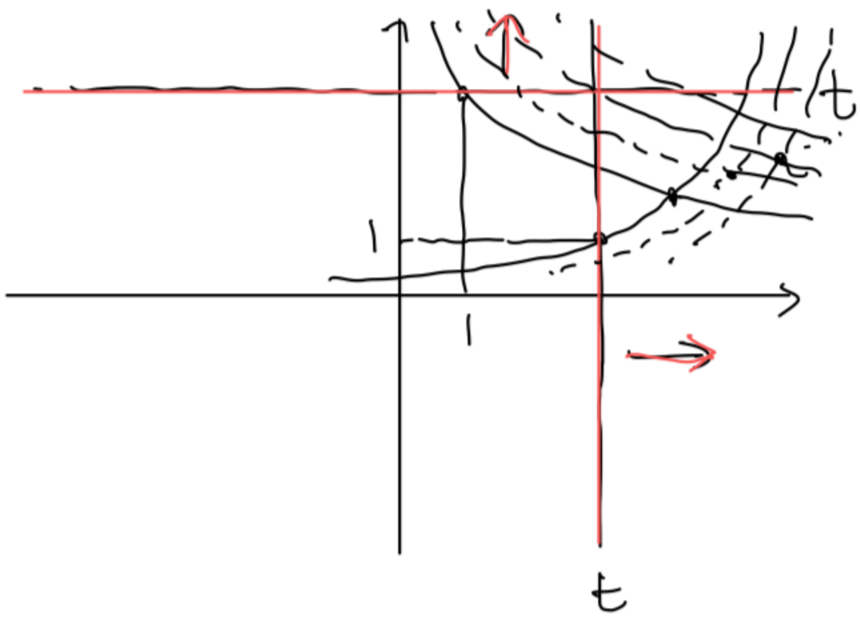
ㄴ. 실수 t의 값이 증가하면 $f(t)$의 값도 증가한다.

두 그래프의 교점이 $f(t)$이므로, $x=f(t)$를 대입하면
$t-\log_2 f(t)=2^{f(t)-t} \Rightarrow 2^{f(t)-t}+\log_2 f(t)=t$라고 식을 세울 수 있다.

그러나, 정리하여 $f(t)$만 따로 좌변에 떼놓고 표현하기는 어려울 것 같다.
따라서 $f(t)$가 증가함수임을 **대수적으로 접근하기는 어려워보인다**.

"그렇다면 남은 방법은.. **직접 t를 움직여**보는 수 밖에 없겠네."

각 그래프에서 t를 점점 증가시켜가며 $y=t$를 **점점 위로**, $x=t$를 **점점 오른쪽**으로 움직여보며 교점의 위치를 관찰해보자.



관찰해보면 $y=2^{x-t}$ 그래프가 우측으로 이동하고 $y=t-\log_2 x$ 그래프가 위로 이동하므로,
교점은 **우상향하며 증가함**을 알 수 있다. 따라서 실수 t의 값이 증가하면 $f(t)$의 값도 증가한다. ⋯ (참)

ㄷ. 모든 양의 실수 t에 대하여 $f(t)\ge t$이다.

위에서 $f(1)=1$, $f(2)=2$임을 확인했다.

그러나 $f(t) \geq t$가 모든 양의 실수 t에 대하여 성립하는지 확인하려면,

1) **수식**을 통해 증명하거나,
2) **반례**를 찾거나,
3) **기하적인 양상**을 파악하면 된다.

$SOL1$) 수식을 이용해 풀어보자.

$g(x) = t - \log_2 x$는 감소함수이고, $h(x) = 2^{x-t}$는 증가함수이다.

따라서, 교점을 기준으로 좌우를 살펴보면

1) 교점보다 **왼쪽**에서 $(x < f(t))$ $g(x) > h(x)$ $\cdots$ ㉡
2) 교점보다 **오른쪽**에서 $(x > f(t))$ $g(x) < h(x)$

"이를 통해 $f(t)$의 **대략적인 범위**를 유추할 수 있겠다."

따라서, $x = t$를 대입해봄으로써 t**와** $f(t)$**의 대소를 비교**할 수 있다.

$g(t) = t - \log_2 t$, $h(t) = 1$이다.

여기서, $g(t)$는 명백하게 t가 증가할 때 같이 증가하며, $t \to \infty$에서 발산하므로,
t가 어느 지점을 지나면 $g(t) > h(t)$ $\Rightarrow$ $t - \log_2 t > 1$를 만족할 것이다.

이는 ㉡의 상황으로, 따라서 t가 어느 지점을 지날 때부터는 $t < f(t)$임을 알 수 있다. $\cdots$ (거짓)

$SOL2$) 기하적인 양상을 파악해보자.

ㄴ에서 우리는 t를 점점 증가시켜가며 교점의 위치를 관찰해보았고,
그 결과 교점은 **우상향하며 증가함**을 알 수 있었다.

그런데, 위 그래프를 다시 한번 살펴보자.

$y = h(t)$는 **점** $(t,\ 1)$**을 지나는 증가함수**이다.

"그럼 만약 교점의 y좌표가 1보다 크다면, 교점의 x좌표도 t보다 크겠네..?"

그런데, 교점은 **우상향하며 증가**한다.
당장 ㉠에서도 $t = 2$일때의 교점이 $(2,\ 1)$이므로, 필연적으로 교점의 y좌표가 1보다 큰 상황이 생기게 된다.

따라서, $t > 2$일 때 $t < f(t)$이다. $\cdots$ (거짓)

$SOL3$) 반례를 찾아보자. (NOTES 참고)

그렇다면 이를 대입해보았을 때, $f(3) \geq 3$이어야한다.

$g(x) = t - \log_2 x$는 감소함수이고, $h(x) = 2^{x-t}$는 증가함수이므로,
$x < f(t)$에서 $g(x) > h(x)$이고, $\cdots$ ㉡
$x > f(t)$에서 $g(x) < h(x)$일 것이다.

"이를 통해 $f(t)$의 **<u>대략적인 범위</u>**를 유추할 수 있겠다."

그렇다면, $f(3) \geq 3$인지 알아보기 위해서는, $x = 3$일 때 $g(3)$과 $h(3)$의 대소관계를 파악하면 된다.

$g(3) = 3 - \log_2 3$, $h(3) = 1$

$1 < g(3) < 2$이므로, $g(3) > h(3)$이다.
이는 ㉡에 대응하는 상황으로, $3 < f(3)$이다.

이는 명백한 반례로, 따라서 ㄷ은 거짓이다. $\cdots$ (거짓)

따라서 $A = 100$, $B = 10$, $C = 0$이다.

$\therefore$ $A + B + C = 110$

답: 110

| 무엇을 기준으로 학생들을 변별했는가?

1. t를 직접 움직여보면서, **<u>교점의 위치가 변화하는 양상</u>**을 관찰할 수 있는가?

2. 두 그래프를 그린 뒤, 교점의 좌표의 **<u>대략적인 범위</u>**를 확인할 수 있는가?

3. 확정적으로 지나는 점 $(1,\ t)$, $(t,\ 1)$을 통해, 교점의 x좌표와 t간의 **<u>대소관계</u>**를 파악할 수 있는가>

| NOTES

- 위 문항에서 나온 두 함수는 초월함수이므로, 특수한 상황 이외의 **교점의 정확한 위치**를 찾는 것은 고등학교 교육과정 수준에서 불가능하다.

  직관적으로 두 그래프를 바로 그린 후에 교점의 변화 추이를 살펴보는 방향으로 접근해야한다.

- 이러한 유형의 문제에서, 반례를 찾아보자는 접근방식은 상당히 위험하다.

  반례를 찾으면 **명제가 거짓임을 바로 알 수 있지만**, 반례를 찾지 못했다고 해서 **명제가 참임을 확인할 수는 없기 때문**이다.
  그럼에도 만약 이 문제에서 반례를 찾고자 한다면, $f(1)=1$, $f(2)=2$임을 토대로

  "$f(t)=t$인 순간이 두 개나 있다. 그럼에도 모든 양수 t에 대해 $f(t) \geq t$이려면,
  $t=1$, $t=2$일 때 모두 $f'(t)=1$이어야 할텐데..? **그러한 상황이 나오기는 쉽지 않겠다**."

  명제가 거짓일 것이라는 직관적인 확신을 갖고 대입해보는 것이 좋다.

10

2024 6월 모의고사 **22번**

22. 정수 $a\,(a \neq 0)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = x^3 - 2ax^2$$

이라 하자. 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 곱이 -12가 되도록 하는 a에 대하여 $f'(10)$의 값을 구하시오. [4점]

> 함수 $f(x)$에 대하여
> $$\left\{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right\} \times \left\{\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}\right\} < 0$$
> 을 만족시키는 세 실수 x_1, x_2, x_3이 열린구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에 존재한다.

$$\left\{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right\} \times \left\{\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}\right\} < 0$$

얼핏보면 이런 생각이 든다.

"평균변화율을 살펴보아야하나..?"

그러나, 너무 많은 경우의 수가 떠오른다. 과연 **우리는 x_1, x_2, x_3를 모두 고려해야하는 것일까**..?

발문에 따르면 세 실수 x_1, x_2, x_3이 열린 구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에 존재하기만 하면 된다.

x_2에 초점을 맞춰 생각해보면, 열린 구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에서
$(x,\ f(x))$**와** $(x_2,\ f(x_2))$**를 잇는 직선의 기울기**가 음수가 되는 x와 양수가 되는 x가 공존하면 되는 것이다.

극단적인 경우, $x = x_2 -$(음극한)와 $x = x_2 +$(양극한)도 생각해볼 수 있다.

또한, x_2도 열린 구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$ 내의 어떠한 실수이든 상관이 없다.

"그렇다면... 아..! **순간변화율의 부호가 바뀌는지,**
즉 열린 구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에서 극대 또는 극소를 갖는지를 묻는 것이구나."

<u>**이 과정을 끝냈다면 문제의 절반을 푼 것이다.**</u>
(위의 모든 과정은 충분한 문제를 풀며 경험을 쌓아두었다면, 직관을 통해 바로 파악할 수도 있다.)

이제, 정수 k에 대해 삼차함수 $f(x)=x^3-2ax^2$이 열린 구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에서 극값을 가지면 된다.

$f'(x)=3x^2-4ax=3x\left(x-\frac{4}{3}a\right)=0$이므로,

$k=-1$**일 때 확정적으로 열린 구간** $\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$**에서 극값을 가진다.**

그리고, $\frac{4}{3}a$가 열린 구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에 포함되어 있다면 해당 k에 대해 열린 구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에서 극값을 가질 것이다.

만약 $\frac{4}{3}a$가 열린 구간 $\left(k,\ k+\frac{1}{2}\right)$안에 있다면, k와 $k+1$의 열린 구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$, $\left(k-1,\ k+\frac{1}{2}\right)$ 안에
공통적으로 존재하게 된다.

이를 알아보기 위해 $\frac{4}{3}a$에서 a를 $3p-2$, $3p-1$, $3p$인 경우로 나누어볼 필요가 있다. (p는 정수)

i) $a=3p-2$인 경우,

$\frac{4}{3}a=4p-\frac{8}{3}=(4p-3)+\frac{1}{3}$이므로, $4p-3=m$이라고 하면
$\frac{4}{3}a=m+\frac{1}{3}$이므로 열린 구간 $\left(m,\ m+\frac{3}{2}\right)$과 $\left(m-1,\ m+\frac{1}{2}\right)$ 안에 공통적으로 존재한다.

이 경우, $k=-1,\ 4p-3,\ 4p-4$로,

$p=0$일 때 $k=-1,\ -3,\ -4$이므로 모든 정수 k의 곱이 -12가 된다.

$\therefore\ a=-2$

이제, $f(x)=x^3+4x^2$을 미분하면 $f'(x)=3x^2+8x$이고, $x=10$을 대입하면

$f'(10)=380$

답: 380

이제 답을 구했으니, 나머지 경우도 살펴보자.

ii) $a=3p-1$인 경우,

$\frac{4}{3}a=4p-\frac{4}{3}=(4p-2)+\frac{2}{3}$이므로, $4p-2=m$이라고 하면

$\frac{4}{3}a = m + \frac{2}{3}$으로, 오직 열린 구간 $\left(m,\ m + \frac{3}{2}\right)$ 안에만 존재한다.
이 경우 $k = -1,\ 4p - 2$로, 어떠한 정수 p에 대해서도 모든 정수 k의 곱이 -12가 될 수 없다.

$iii)$ $a = 3p$인 경우,

$\frac{4}{3}a = 4p$이므로 오직 열린 구간 $(4p - 1,\ 4p + \frac{1}{2})$ 안에만 존재한다.
이 경우 $k = -1,\ 4p - 1$로, 어떠한 정수 p에 대해서도 모든 정수 k의 곱이 -12가 될 수 없다.

❙ 무엇을 기준으로 학생들을 변별했는가?

1. 주어진 조건을 해석하여 해당 조건이 열린 구간 내에서의 **극값의 존재여부를 묻고 있음**을 파악할 수 있다.

2. a가 정수임을 이용해 $\frac{4}{3}a$가 두 개의 열린 구간에 속해있는 경우와, 오직 하나의 열린 구간에 속해있는 경우로 나누어 그에 따른 가능한 정수 k를 구할 수 있다.

❙ NOTES

- 어떠한 기울기 조건과 임의의 실수 x_1, x_2라는 조건을 줬다면, **곧바로 순간변화율을 의심할 필요가 있다.**
  여러 기출들을 살펴보면, 임의의 실수 x_1, x_2라는 표현과 기울기 조건이 주어졌을 때 대부분
  평균변화율의 의미가 퇴색된 채 순간변화율로써 사용됨을 볼 수 있다.