J. 이항정리: 다양한 공식

• 조합: 이항정리

예제 1

다음 등식이 성립함을 증명하여라.

(1) ${}_{n}\mathrm{C}_0 - {}_{n}\mathrm{C}_1 + {}_{n}\mathrm{C}_2 - \cdots + (-1)^n {}_{n}\mathrm{C}_n = 0$

(2) ${}_{2n}\mathrm{C}_0 + {}_{2n}\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n}$

$= {}_{2n}\mathrm{C}_1 + {}_{2n}\mathrm{C}_3 + \cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}$

증명

(1) 이항정리에 의하여

$(1+x)^n = {}_{n}\mathrm{C}_0 + {}_{n}\mathrm{C}_1 x + {}_{n}\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + {}_{n}\mathrm{C}_n x^n$

이 식에 $x=-1$을 대입하면

$0 = {}_{n}\mathrm{C}_0 - {}_{n}\mathrm{C}_1 + {}_{n}\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_{n}\mathrm{C}_n(-1)^n$

(2) 이항정리에 의하여

$(1+x)^{2n} = {}_{2n}\mathrm{C}_0 + {}_{2n}\mathrm{C}_1 x + {}_{2n}\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n} x^{2n}$

이 식에 $x=-1$을 대입하면

$0 = {}_{2n}\mathrm{C}_0 - {}_{2n}\mathrm{C}_1 + {}_{2n}\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n}(-1)^{2n}$

정리하면

${}_{2n}\mathrm{C}_0 + {}_{2n}\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n}$

$= {}_{2n}\mathrm{C}_1 + {}_{2n}\mathrm{C}_3 + \cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}$

답 풀이참조

예제 2

아래 식의 값을 구하여라.

$\log_3({}_{20}\mathrm{C}_0 + {}_{20}\mathrm{C}_1 \cdot 2 + {}_{20}\mathrm{C}_2 \cdot 2^2 + \cdots + {}_{20}\mathrm{C}_{20} \cdot 2^{20})$

풀이

이항정리에 의하여

$(1+x)^n = {}_{n}\mathrm{C}_0 + {}_{n}\mathrm{C}_1 x + {}_{n}\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + {}_{n}\mathrm{C}_n x^n$

$n=20$, $x=2$를 대입하면

$3^{20} = {}_{20}\mathrm{C}_0 + {}_{20}\mathrm{C}_1 2 + {}_{20}\mathrm{C}_2 2^2 + \cdots + {}_{20}\mathrm{C}_{20} 2^{20}$

∴ (주어진 식)

$= \log_3 3^{20} = 20$

답 20

J. 포함 배제의 원리

예제 1

모자를 쓴 3명의 사람 A, B, C가 모자를 벗어서 섞은 후 임의로 다시 쓸 때, 모든 사람이 자기 자신의 모자가 아닌 다른 사람의 모자를 쓰는 경우의 수를 구하시오.

풀이1

수형도를 이용하여 문제를 해결하자.

3명의 사람 A, B, C의 모자를 각각 a, b, c라고 하자.

A	B	C
b	c	a
c	a	b

따라서 구하는 경우의 수는 2이다.

답 2

풀이2

포함 배제의 원리를 이용하여 문제를 해결하자.

A가 자기 자신의 모자를 쓸 사건을 A,

B가 자기 자신의 모자를 쓸 사건을 B,

C가 자기 자신의 모자를 쓸 사건을 C

라고 하자.

구하는 경우의 수는

$n(A^C \cap B^C \cap C^C)$

이다. 드모르간의 법칙에 의하여

$n(A^C \cap B^C \cap C^C) = n(S) - n(A \cup B \cup C)$ $\cdots(*)$

포함 배제의 원리에 의하여

$n(A \cup B \cup C)$

$= n(A) + n(B) + n(C)$

$- n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C)$

$+ n(A \cap B \cap C)$

$= 2! + 2! + 2! - 1 - 1 - 1 + 1$

$= 4$ $\cdots$㉠

이유는 다음과 같다.

$n(A)$: A가 자기 자신의 모자를 선택하고, B, C는 남은 두 개의 모자 중에서 아무거나 선택하면 되므로 경우의 수는 $2!$이다. $n(B)$, $n(C)$도 마찬가지이다.

$n(A \cap B)$: A, B가 각각 자기 자신의 모자를 선택하면 C는 자동적으로 자기 자신의 모자를 선택하게 된다. 이때, 경우의 수는 1이다. $n(B \cap C)$, $n(A \cap C)$도 마찬가지이다.

$n(A\cap B\cap C)$: A, B, C가 각각 자기 자신의 모자를 선택할 경우의 수는 1이다.
한편
$n(S)=3!=6$ ⋯㉡
이므로 ㉠, ㉡을 (*)에 대입하면
$n(A^C\cap B^C\cap C^C)=6-4=2$
답 2

위의 문제를 수형도를 이용하는 편이 더 빠르지만, 사람의 숫자(즉, 모자의 숫자)가 많아질수록 포함과 배제의 원리를 이용하는 편이 낫다.

예제 2

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 f 중에서 다음 조건을 만족시키는 일대일함수의 개수를 구하여라.
집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)\neq x$이다.

풀이1
일대일함수 f의 치역의 원소의 개수는 4이므로 함수 f는 일대일대응이다.
$f(1)\neq 1,\ f(2)\neq 2,\ f(3)\neq 3,\ f(4)\neq 4$
가 되도록 함수 f의 대응을 수형도로 나타내면 다음과 같다.

<table>
<tr><th>$f(1)$</th><th>$f(2)$</th><th>$f(3)$</th><th>$f(4)$</th></tr>
<tr><td rowspan="3">2</td><td>1</td><td>4</td><td>3</td></tr>
<tr><td>3</td><td>4</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4</td><td>1</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3</td><td>1</td><td>4</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="3">4</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td></tr>
</table>

따라서 일대일대응 f의 개수는 9이다.
답 9

참고
다음과 같이 빠르게 계산할 수 있어야 한다.

<table>
<tr><th>$f(1)$</th><th>$f(2)$</th><th>$f(3)$</th><th>$f(4)$</th></tr>
<tr><td rowspan="3">2</td><td>1</td><td>4</td><td>3</td></tr>
<tr><td>3</td><td>4</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4</td><td>1</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">4</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

1이 2에 대응되던, 1이 3에 대응되던, 1이 4에 대응되던 1과 다른 수에 대응되는 것이므로 위의 표의 빈 칸을 모두 채우지 않아도 일대일대응 f의 개수가
$3\times$(1이 2에 대응될 때의 일대일대응 f의 개수)
$=3\times 3=9$
임을 알 수 있다.

풀이2

일대일함수 f의 치역의 원소의 개수는 4이므로 함수 f는 일대일대응이다.

포함과 배제의 원리를 이용하여 문제를 해결하자.

$f(1)=1$인 일대일대응 f만을 원소로 갖는 집합을 A,
$f(2)=2$인 일대일대응 f만을 원소로 갖는 집합을 B,
$f(3)=3$인 일대일대응 f만을 원소로 갖는 집합을 C,
$f(4)=4$인 일대일대응 f만을 원소로 갖는 집합을 D
라고 하자. (그리고 전체 집합을 S라고 하자.)

구하는 방법의 수는 집합
$S-(A\cup B\cup C\cup D)$
의 원소의 개수와 같다.

$n(S)={}_4\mathrm{P}_4=4!=24$

포함 배제의 원리에 의하여

$n(A\cup B\cup C\cup D)$
$=n(A)+n(B)+n(C)+n(D)$
$-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(A\cap D)$
$-n(B\cap C)-n(B\cap D)-n(C\cap D)$
$+n(A\cap B\cap C)+n(A\cap B\cap D)+n(A\cap C\cap D)$
$+n(B\cap C\cap D)$
$-n(A\cap B\cap C\cap D)$
$=3!+3!+3!+3!$
$-2!-2!-2!-2!-2!-2!$
$+1+1+1+1$
-1
$=15$

이므로 일대일대응 f의 개수는
$24-15=9$
이다.

답 9

참고 완전순열(교란순열)

이 문제의 일반적인 경우를 생각해보자.

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 f 중에서 다음 조건을 만족시키는 일대일함수의 개수를 a_n이라고 하자. (단, n은 자연수)

집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)\neq x$이다.

수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는 다음과 같다.

$a_1=0,\ a_2=1,\ a_{n+2}=(n+1)(a_{n+1}+a_n)$

일반항 a_n은

$$a_n=n!\times\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

수능 대비를 위하여 위의 점화식과 일반항을 암기할 필요는 없다.

예제 3

(1) 서로 다른 6권의 책을 세 사람에게 나누어주는 방법의 수 (단, 책을 받지 못하는 사람이 있을 수 있다.)
(2) 서로 다른 6권의 책을 세 사람에게 나누어주는 방법의 수 (단, 책을 받지 못하는 사람은 없다.)

풀이

서로 다른 6권의 책을 각각
◓, ◒, ◐, ◑, ◉, ◍
세 사람을 각각
A, B, C
라고 하자.

(1) 중복순열의 수에 의하여 ${}_3\Pi_6=3^6=729$이다.

(2)
이전 문제의 풀이에서
책을 2권, 2권, 2권으로 나누어 세 사람에게 나누어주는 방법의 수:

$${}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{3!}\times 3!=90$$

책을 3권, 2권, 1권으로 나누어 세 사람에게 나누어주는 방법의 수:

$${}_6C_3\times{}_3C_2\times{}_1C_1\times 3!=360$$

책을 4권, 1권, 1권으로 나누어 세 사람에게 나누어주는 방법의 수:

$${}_6C_4\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}\times 3!=90$$

따라서 구하는 방법의 수는 $90+360+90=540$이다.
이제 여집합의 관점에서 방법의 수를 구해보자.
세 사람에게 6권의 책을 나누어줄 때, 다음의 세 경우만이 가능하다.
(경우1) 책을 받지 못하는 사람의 수가 2인 경우
(경우2) 책을 받지 못하는 사람의 수가 1인 경우
(경우3) 책을 받지 못하는 사람이 없는 경우 (←구해야 하는 방법의 수)
(경우1)+(경우2)+(경우3)$={}_3\Pi_6=3^6=729$이므로
여집합의 관점에서 (경우3)$=729-$(경우1)$-$(경우2)이다.
(경우1)

A	B	C
◓◒◐ ◑◉◍		
	◓◒◐ ◑◉◍	
		◓◒◐ ◑◉◍

방법의 수는 3이다.
(경우2)
예를 들어 아래의 표와 같이 나누어 줄 수 있다.

A	B	C
◓◒◐◑◉	◍	
◓◒◐◑	◉◍	
◓◒◐	◑◉◍	
◓◒	◐◑◉◍	
◓	◒◐◑◉◍	
⋮	⋮	⋮

방법의 수는 $3\times(2^6-2)$이다.
이때, 3은 책을 받지 못하는 사람을 선택하는 방법의 수, 2^6-2는 나머지 두 사람에게 책을 나누어주는 방법의 수이다. 2^6은 아래 표와 같이 책을 받아야 하는 사람이 책을 받지 못하게 되는 두 경우를 포함하고 있다. 따라서 방법의 수는 3×2^6이 아닌 $3\times(2^6-2)$이다.

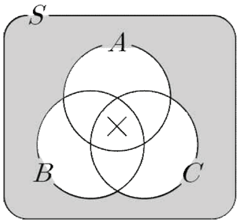
A	B	C
◓◒◐ ◑◉◍	B가 받지 못한다.	
A가 받지 못한다.	◓◒◐ ◑◉◍	

따라서 구하는 방법의 수는 $729-3-3\times(2^6-2)=540$이다.

답 (1) 729 (2) 540

포함배제의 원리를 이용하여 방법의 수를 구해보자.

A가 책을 받지 못하는 경우만을 원소로 갖는 집합을 A,
B가 책을 받지 못하는 경우만을 원소로 갖는 집합을 B,
C가 책을 받지 못하는 경우만을 원소로 갖는 집합을 C
라고 하자. (그리고 전체 집합을 S라고 하자.)
구하는 방법의 수는 집합
$S-(A\cup B\cup C)$
의 원소의 개수와 같다.



$n(S)={}_3\Pi_6=3^6=729$

포함 배제의 원리에 의하여

$n(A\cup B\cup C)$

$=n(A)+n(B)+n(C)$

$-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)$

$+n(A\cap B\cap C)$

$={}_2\Pi_6+{}_2\Pi_6+{}_2\Pi_6-1-1-1+0$

$=2^6+2^6+2^6-1-1-1-0$

$=189$

이므로 구하는 방법의 수는

$n(S-(A\cup B\cup C))$

$=n(S)-n(A\cup B\cup C)$

$=729-189=540$

포함과 배제의 원리에 대한 문제를 더 풀어보자.

예제 4

6개의 문자 A, A, B, B, C, C를 같은 문자끼리 이웃하지 않도록 일렬로 배열하는 방법의 수를 구하여라.

풀이

포함과 배제의 원리를 이용하여 문제를 풀어보자.

두 문자 A, A가 서로 이웃하는 경우만을 원소로 갖는 집합을 A,

두 문자 B, B가 서로 이웃하는 경우만을 원소로 갖는 집합을 B,

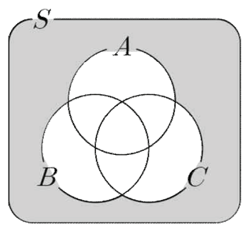
두 문자 C, C가 서로 이웃하는 경우만을 원소로 갖는 집합을 C

라고 하자. (그리고 전체 집합을 S라고 하자.)

구하는 방법의 수는 집합

$S-(A\cup B\cup C)$

의 원소의 개수와 같다.



$n(S)=\dfrac{6!}{2!2!2!}=90$

포함 배제의 원리에 의하여

$n(A\cup B\cup C)$

$=n(A)+n(B)+n(C)$

$-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)$

$+n(A\cap B\cap C)$

$=\dfrac{5!}{2!2!}+\dfrac{5!}{2!2!}+\dfrac{5!}{2!2!}-\dfrac{4!}{2!}-\dfrac{4!}{2!}-\dfrac{4!}{2!}+3!$

$=60$

이므로 구하는 방법의 수는

$n(S-(A\cup B\cup C))$

$=n(S)-n(A\cup B\cup C)$

$=90-60=30$

답 30

K. 여사건의 확률(중복조합)

K067

○○○
(2019(9)–가형28)

방정식 $a+b+c=9$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$ 중에서 임의로 한 개를 선택할 때, 선택한 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$가

$$a<2 \text{ 또는 } b<2$$

를 만족시킬 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

K068

●●●
(2018–가형28)

방정식 $x+y+z=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$ 중에서 임의로 한 개를 선택한다. 선택한 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$가

$$(x-y)(y-z)(z-x)\neq 0$$

을 만족시킬 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

K. 조건부 확률(계산)

K069

○
(2007–나형5)

두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4},\ \mathrm{P}(B)=\frac{2}{3},\ A\subset B$$

일 때, $\mathrm{P}(A\mid B)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{8}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{3}{8}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{5}{8}$

K070

○
(2021–가형4)

두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{4},\ \mathrm{P}(A|B)=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{7}{10}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{7}$　② $\frac{1}{8}$　③ $\frac{1}{9}$　④ $\frac{1}{10}$　⑤ $\frac{1}{11}$

K071

○○
(2023(9)–확률과통계24)

두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cup B)=1,\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4},\ \mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(B|A)$$

일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{9}{16}$　③ $\frac{5}{8}$　④ $\frac{11}{16}$　⑤ $\frac{3}{4}$

예제 3

5명의 사람을 일렬로 나열할 때,

(1) 특별한 두 사람이 이웃하지 않을 확률을 구하시오.

(2) 특별한 두 사람이 이웃할 확률을 구하시오.

풀이

5명의 사람을 각각 A, B, C, D, E, 이 중에서 특별한 두 사람을 A, B라고 하자.

우선 (2)의 확률을 구하고 나서, 여사건의 확률의 정의를 이용하여 (1)의 확률을 구하자.

(2) 5명을 일렬로 나열하는 경우의 수는 5!이다.

A와 B를 한 사람으로 생각하면 모두 4명이고, 4명을 일렬로 나열하는 경우의 수는 4!이다. 이때 각 경우에 대하여 A와 B의 두 사람이 자리를 바꾸는 경우의 수가 2!이다.

예를 들어

D, E, $\boxed{\text{A, B}}$, C 또는 D, E, $\boxed{\text{B, A}}$, C

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{4!2!}{5!}=\dfrac{2}{5}$이다.

(1) 여사건의 확률의 정의에 의하여 구하는 확률은

$1-\dfrac{2}{5}=\dfrac{3}{5}$이다.

답 (1) $\dfrac{3}{5}$, (2) $\dfrac{2}{5}$

K. 조건부 확률

• 조건부 확률

일반적으로 두 사건 A, B에 대하여 사건 A가 일어났다고 가정할 때 사건 B가 일어날 확률을 사건 A가 일어났을 때 사건 B의 조건부확률이라고 하며, 이것을 기호로

$\mathrm{P}(B|A)$

와 같이 나타낸다.

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$$

(←A가 새로운 표본공간이 된 것이다. 왜냐하면 A가 일어나면 A^C는 일어나지 않기 때문이다.)

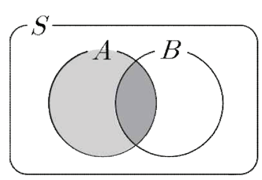
$$=\frac{\dfrac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\dfrac{n(A)}{n(S)}}$$

(←수학적 확률의 정의로 확률을 구하기 위하여 분자, 분모를 $n(S)$로 나눈다. 이때, 표본공간의 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대되어야 함을 명심하자.)

$$=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

표본공간이 S인 어떤 시행에서 각 결과가 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때, 사건 A가 일어났을 때 사건 B의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$



아래의 두 등식을 음미해보자.

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(B|S)=\dfrac{\mathrm{P}(B\cap S)}{\mathrm{P}(S)}$: 사건 S가 일어났을 때 사건 B의 조건부확률

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$: 사건 A가 일어났을 때 사건 B의 조건부확률

사건 B가 일어날 확률 $\mathrm{P}(B)$는 사건 S가 일어났을 때 사건 B가 일어날 조건부확률 $\mathrm{P}(B|S)$와 같다. 이처럼 모든 확률은 조건부확률로 해석할 수 있다.
조건부확률 $\mathrm{P}(B|A)$는 사건 A를 새로운 표본공간으로 생각하고, 사건 A 안에서 사건 $A\cap B$가 일어날 확률을 계산한 것이라고 생각해도 좋다.
요컨대 조건부확률을 이해하는데 필요한 핵심적인 아이디어는 '어떤 사건이 새로운 표본공간인가?' 에 있다.

예를 들어 아래의 두 경우 각각에 대한 표본공간을 써보자.
한 개의 주사위를 던졌을 때, 짝수의 눈이 나올 사건:
표본공간은 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이다.
한 개의 주사위를 던져서 짝수의 눈이 나왔을 때, 그 눈이 소수일 사건:
새로운 표본공간은 $\{2, 4, 6\}$이다.

예제 1

한 개의 주사위를 던져서 홀수의 눈이 나왔을 때, 그 눈이 소수일 확률을 구하시오.

풀이

한 개의 주사위를 던져서 홀수의 눈이 나올 사건을 A, 소수의 눈이 나올 사건을 B라고 하자.

S	1	2	3	4	5	6	←표본공간
A	1		3		5		←새로운 표본공간
$A\cap B$			3		5		

위의 표에서 구하는 확률은 $\dfrac{2}{3}\left(=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}\right)$이다. 조건부확률의 정의에 의하여 확률을 다시 구하면

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}}=\frac{2}{3}$$

답 $\dfrac{2}{3}$

예제 2

어느 위조지폐 감별사는 위조지폐를 위조지폐로 판별할 확률이 98%, 정상지폐를 정상지폐로 판별할 확률이 92%라 한다. 이 사람에게 판별이 위탁 된 지폐 중 40%가 위조지폐라고 할 때, 위조지폐라고 판별된 지폐가 실제로 위조지폐일 확률을 구하시오.

풀이

문제에서 문장으로 주어진 상황을 표로 정리하자.

	정상지폐	위조지폐	합계
정상지폐로 판별	$60\times\dfrac{92}{100}$	$40\times\dfrac{2}{100}$	56
위조지폐로 판별	$60\times\dfrac{8}{100}$	$40\times\dfrac{98}{100}$	44
합계	60	40	100

구하는 확률은 $\dfrac{40\times\frac{98}{100}}{44}=\dfrac{49}{55}$

답 $\dfrac{49}{55}$

예제 3

어느 고등학교의 남학생 100명과 여학생 70명의 안경 착용 여부를 조사하였더니 다음과 같았다.

	남학생	여학생	합계
안경○	60	20	80
안경×	40	50	90
합계	100	70	170

각각의 사건이 일어날 확률을 구하시오.

(1) 이 고등학교의 학생 중에서 한 명을 뽑았을 때, 남학생일 확률

(2) 이 고등학교의 학생 중에서 한 명을 뽑았을 때, 여학생일 확률

(3) 이 고등학교의 학생 중에서 한 명을 뽑았을 때, 남학생이었다. 이 남학생이 안경을 착용하였을 확률

(4) 이 고등학교의 학생 중에서 한 명을 뽑았을 때, 남학생이었다. 이 남학생이 안경을 착용하지 않았을 확률

(5) 이 고등학교의 학생 중에서 한 명을 뽑았을 때, 여학생이었다. 이 여학생이 안경을 착용하였을 확률

(6) 이 고등학교의 학생 중에서 한 명을 뽑았을 때, 여학생이었다. 이 여학생이 안경을 착용하지 않았을 확률

(7) 이 고등학교의 학생 중에서 한 명을 뽑았을 때, 안경을 착용하였다. 이 학생이 남학생일 확률

(8) 이 고등학교의 학생 중에서 한 명을 뽑았을 때, 안경을 착용하였다. 이 학생이 여학생일 확률

(9) 이 고등학교의 학생 중에서 한 명을 뽑았을 때, 안경을 착용하지 않았다. 이 학생이 남학생일 확률

(10) 이 고등학교의 학생 중에서 한 명을 뽑았을 때, 안경을 착용하지 않았다. 이 학생이 여학생일 확률

풀이

※ 앞선 문제와 마찬가지의 방법으로 풀면 되므로, 풀이를 생략합니다.

(1) $\frac{100}{100+70}=\frac{100}{170}$ (2) $\frac{70}{100+70}=\frac{70}{170}$

(3) $\frac{60}{100}$ (4) $\frac{40}{100}$

(5) $\frac{20}{70}$ (6) $\frac{50}{70}$

(7) $\frac{60}{80}$ (8) $\frac{20}{80}$

(9) $\frac{40}{90}$ (10) $\frac{50}{90}$

답 풀이 참고

참고1

(1)+(2)=1, (3)+(4)=1, (5)+(6)=1, (7)+(8)=1, (9)+(10)=1

임을 명심하자.

참고2

조건부 확률에서 다음이 성립한다.

(1) $\mathrm{P}(B^C|A)=1-\mathrm{P}(B|A)$

(2) A, B가 서로 배반사건이다.

$\Rightarrow \mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(B|A)=0$

예제 4

함수 f의 정의역과 공역은 모두 집합 $\{1,\ 2,\ 3\}$이다. 정의역과 공역이 모두 $\{1,\ 2,\ 3\}$인 함수 $f \circ f$의 치역의 원소의 개수가 1일 때, 함수 f의 치역의 원소의 개수가 2일 확률은? [4점]

① $\dfrac{2}{9}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{5}{12}$

④ $\dfrac{5}{9}$ ⑤ $\dfrac{2}{3}$

풀이

$X=\{1,\ 2,\ 3\}$으로 두자.

함수 $f \circ f$의 개수는 중복순열의 수에 의하여

${}_3\Pi_3(=3^3=27)$이다.

함수 f의 치역의 원소의 개수가 3이면 함수 f는 일대일대응이므로, 함수 $f \circ f$의 치역의 원소의 개수는 3이다. 따라서 함수 $f \circ f$의 치역의 원소의 개수가 1이면 함수 f의 치역의 원소의 개수는 1 또는 2이다.

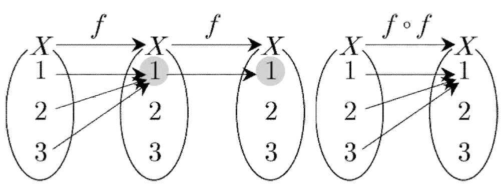
함수 $f \circ f$의 치역의 원소의 개수가 1일 때,

두 함수 f, $f \circ f$의 대응관계를 살펴보자.

(1) 함수 f의 치역의 원소의 개수가 1인 경우

예를 들어 함수 $f \circ f$의 치역이 $\{1\}$일 때,

두 함수 f, $f \circ f$의 대응관계는 다음과 같다.



함수 $f \circ f$의 치역이 $\{2\}$, $\{3\}$인 경우도

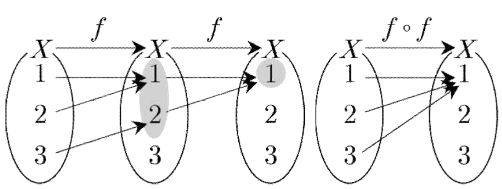
마찬가지로 생각할 수 있으므로

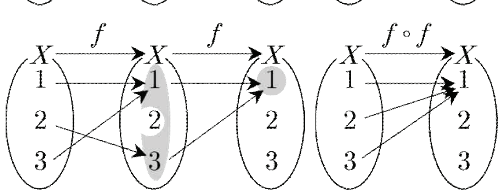
함수 f의 개수는 $3(=3\times1)$이다.

(2) 함수 f의 치역의 원소의 개수가 2인 경우

예를 들어 함수 $f \circ f$의 치역이 $\{1\}$일 때,

두 함수 f, $f \circ f$의 대응관계는 다음과 같다.





함수 $f \circ f$의 치역이 $\{2\}$, $\{3\}$인 경우도

마찬가지로 생각할 수 있으므로

함수 f의 개수는 $6(=3\times2)$이다.

(1), (2)에서 함수 $f \circ f$의 치역의 원소의 개수가 1일 확률은 $\dfrac{9}{27}$이다. 그리고 두 함수 f, $f \circ f$의 치역의 원소의 개수가 각각 2, 1일 확률은 $\dfrac{6}{27}$이다.

조건부확률의 정의에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{\frac{6}{27}}{\frac{9}{27}}=\frac{2}{3}$$

답 ⑤

K. 조건부 확률

K089
○
(2017(9)−가형12)

한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 하자. 두 수의 곱 ab가 6의 배수일 때, 이 두 수의 합 $a+b$가 7일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{7}{30}$ ③ $\frac{4}{15}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

K090
○○
(2024(6)−확률과통계27)

한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 하자. $a\times b$가 4의 배수일 때, $a+b\leq 7$일 확률은? [3점]

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{7}{15}$ ③ $\frac{8}{15}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

K091
○○
(2018−가형13)

한 개의 주사위를 두 번 던진다. 6의 눈이 한 번도 나오지 않을 때, 나온 두 눈의 수의 합이 4의 배수일 확률은? [3점]

① $\frac{4}{25}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{6}{25}$ ④ $\frac{7}{25}$ ⑤ $\frac{8}{25}$

K092
○○
(2011(6)−가형27확률통계)

14명의 학생이 특별활동 시간에 연주할 악기를 다음과 같이 하나씩 선택하였다.

피아노	바이올린	첼로
3명	5명	6명

14명의 학생 중에서 임의로 뽑은 3명이 선택한 악기가 모두 같을 때, 그 악기가 피아노이거나 첼로일 확률은? [3점]

① $\frac{13}{31}$ ② $\frac{15}{31}$ ③ $\frac{17}{31}$ ④ $\frac{19}{31}$ ⑤ $\frac{21}{31}$

K093
○○
(2008−가형12/나형12)

주머니 A에는 1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드가 들어 있고, 주머니 B에는 6, 7, 8, 9, 10의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드가 들어 있다. 두 주머니 A, B에서 각각 카드를 임의로 한 장씩 꺼냈다. 꺼낸 2장의 카드에 적혀 있는 두 수의 합이 홀수일 때, 주머니 A에서 꺼낸 카드에 적혀 있는 수가 짝수일 확률은? [3점]

① $\frac{5}{13}$ ② $\frac{4}{13}$ ③ $\frac{3}{13}$ ④ $\frac{2}{13}$ ⑤ $\frac{1}{13}$

K094

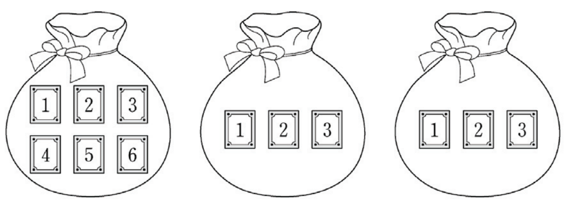
○○
(2006(9)−가형23/나형23)

네 학생 A, B, C, D가 각각 자신의 수학 교과서를 한 권씩 꺼내어 4권을 섞어 놓고, 한 권씩 임의로 선택하기로 하였다. D가 먼저 A의 교과서를 선택하였을 때, 나머지 세 학생이 아무도 자신의 교과서를 선택하지 못할 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $10(p+q)$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

K095

○○○
(2018(9)−가형28)

그림과 같이 주머니 A에는 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적힌 6장의 카드가 들어 있고 주머니 B와 C에는 1부터 3까지의 자연수가 하나씩 적힌 3장의 카드가 각각 들어 있다. 갑은 주머니 A에서, 을은 주머니 B에서, 병은 주머니 C에서 각자 임의로 1장의 카드를 꺼낸다. 이 시행에서 갑이 꺼낸 카드에 적힌 수가 을이 꺼낸 카드에 적힌 수보다 클 때, 갑이 꺼낸 카드에 적힌 수가 을과 병이 꺼낸 카드에 적힌 수의 합보다 클 확률이 k이다. $100k$의 값을 구하시오. [4점]



A B C

K096

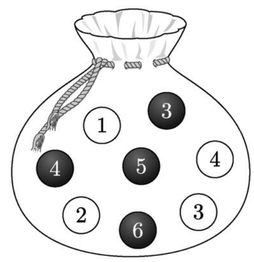
○○○
(2018(6)−나형28)

흰 공 3개, 검은 공 4개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내어, 꺼낸 흰 공과 검은 공의 개수를 각각 m, n이라 하자. 이 시행에서 $2m \geq n$일 때, 꺼낸 흰 공의 개수가 2일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

K097

○○○
(2021(6)−가형27/나형20)

주머니에 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 흰 공 4개와 숫자 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 검은 공 4개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내는 시행을 한다. 이 시행에서 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 같은 것이 있을 때, 꺼낸 공 중 검은 공이 2개일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



K098

(2022(예시문항)-확률과통계28)

1부터 10까지의 자연수 중에서 임의로 서로 다른 3개의 수를 선택한다. 선택된 세 개의 수의 곱이 짝수일 때, 그 세 개의 수의 합이 3의 배수일 확률은? [4점]

① $\frac{14}{55}$　② $\frac{3}{10}$　③ $\frac{19}{55}$
④ $\frac{43}{110}$　⑤ $\frac{24}{55}$

K099

(2019(6)-가형28)

자연수 $n(n \geq 3)$에 대하여 집합 A를
$A=\{(x,\ y) | 1 \leq x \leq y \leq n,\ x$와 y는 자연수$\}$
라 하자. 집합 A에서 임의로 선택된 한 개의 원소 $(a,\ b)$에 대하여 b가 3의 배수일 때, $a=b$일 확률이 $\frac{1}{9}$이 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

K100

(2023(6)-확률과통계30)

주머니에 1부터 12까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 12개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 작은 수부터 크기 순서대로 a, b, c라 하자. $b-a \geq 5$일 때, $c-a \geq 10$일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

K101

★★★ (2006(6)-가형29확률통계)

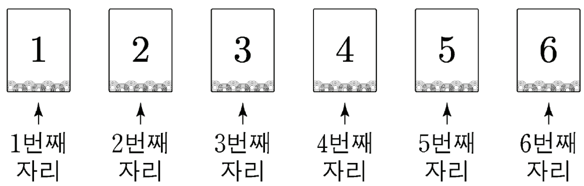
어느 과일 가게에서는 사과를 3개씩 묶어 사과의 총 무게가 850g 이상이면 1등급, 850g 미만이면 2등급으로 분류하여 판매한다. 무게 300g인 사과 4개와 250g인 사과 2개 중에서 임의로 3개씩 선택하여 2개의 묶음으로 만들었다. 하나의 묶음이 1등급으로 분류되었을 때, 다른 묶음도 1등급일 확률은? [4점]

① $\frac{2}{5}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{3}{5}$
④ $\frac{3}{4}$　⑤ $\frac{4}{5}$

K102

★★★
(2023-확률과통계29)

앞면에는 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있고 뒷면에는 모두 0이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다.
이 6장의 카드가 그림과 같이 6 이하의 자연수 k에 대하여 k번째 자리에 자연수 k가 보이도록 놓여 있다.



이 6장의 카드와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 k이면 k번째 자리에 놓여 있는 카드를 한 번 뒤집어 제자리에 놓는다.

위의 시행을 3번 반복한 후 6장의 카드에 보이는 모든 수의 합이 짝수일 때, 주사위의 1의 눈이 한 번만 나왔을 확률은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

K. 곱셈정리(계산)

K103

○○
(2005(9)-나형4)

두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{4}$이며 $\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{1}{3}$일 때, $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)$의 값은?
(단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\dfrac{1}{6}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{1}{3}$
④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ $\dfrac{2}{3}$

K104

○○
(2009-나형26)

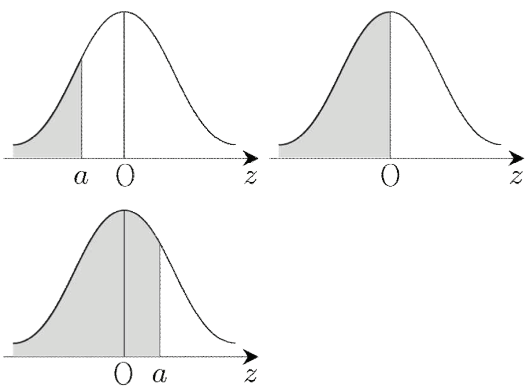
두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B^C)=\dfrac{2}{3}$이며 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{1}{6}$일 때, $\mathrm{P}(A^C|B)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{7}{12}$ ③ $\dfrac{2}{3}$
④ $\dfrac{3}{4}$ ⑤ $\dfrac{5}{6}$

L. 정규분포: 대칭성

정규분포에서 확률 계산을 할 때, 확률밀도함수의 대칭성을 이용하는 경우를 살펴보자.

확률변수 Z는 표준정규분포를 따른다고 하자.

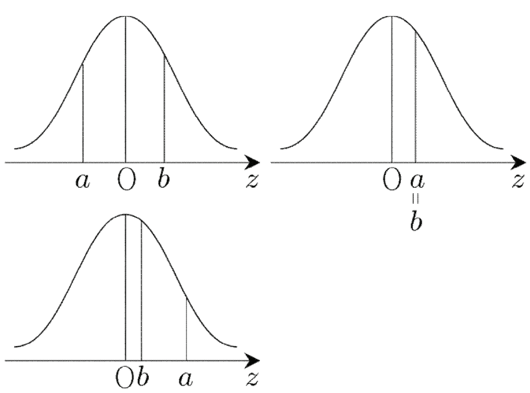


위의 그림에서

$\mathrm{P}(Z \leq a) < 0.5$ (즉, $\mathrm{P}(Z < a) < 0.5$) $\Leftrightarrow a < 0$

$\mathrm{P}(Z \leq a) = 0.5$ (즉, $\mathrm{P}(Z < a) = 0.5$) $\Leftrightarrow a = 0$

$\mathrm{P}(Z \leq a) > 0.5$ (즉, $\mathrm{P}(Z < a) > 0.5$) $\Leftrightarrow a > 0$



위의 그림에서

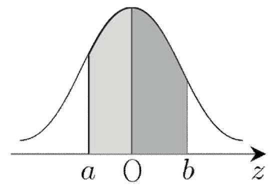
$\mathrm{P}(Z \leq a) < \mathrm{P}(Z \leq b) \Leftrightarrow a < b$

$\mathrm{P}(Z \leq a) = \mathrm{P}(Z \leq b) \Leftrightarrow a = b$

$\mathrm{P}(Z \leq a) > \mathrm{P}(Z \leq b) \Leftrightarrow a > b$

예제 1

확률변수 Z는 표준정규분포를 따른다고 하자.



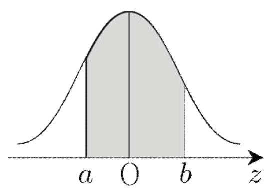
$\mathrm{P}(a \leq Z \leq 0) = 0.2$, $\mathrm{P}(0 \leq Z \leq b) = 0.3$일 때, 다음의 값을 구하시오.

(1) $\mathrm{P}(a \leq Z \leq b)$ (2) $\mathrm{P}(-a \leq Z \leq b)$

(3) $\mathrm{P}(-b \leq Z \leq a)$

풀이

(1)

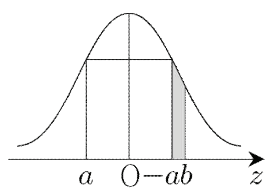


$\mathrm{P}(a \leq Z \leq b)$

$= \mathrm{P}(a \leq Z \leq 0) + \mathrm{P}(0 \leq Z \leq b)$

$= 0.2 + 0.3 = 0.5$

(2)

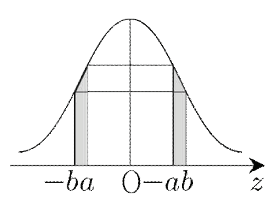


$\mathrm{P}(-a \leq Z \leq b)$

$= \mathrm{P}(0 \leq Z \leq b) - \mathrm{P}(0 \leq Z \leq -a)$

$= 0.3 - 0.2 = 0.1$

(3)



$\mathrm{P}(-b \leq Z \leq a) = \mathrm{P}(-a \leq Z \leq b) = 0.1$

답 (1) 0.5 (2) 0.1 (3) 0.1

예제 2

표준정규분포를 따르는 확률변수 Z의 확률밀도함수를 $f(z)$라고 할 때, 다음이 성립한다.

(가) $f(a) < f(c) < f(b)$
(나) $\mathrm{P}(Z \le a) < \mathrm{P}(Z \le b) < \mathrm{P}(Z \le c)$

이때, 아래의 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

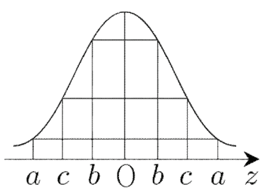
ㄱ. $c > 0$
ㄴ. $\mathrm{P}(Z \le b) \ge 0.5$
ㄷ. $a+b+c=0$, $b>0$이면 $\mathrm{P}(c \le Z \le -a) < \mathrm{P}(0 \le Z \le b)$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

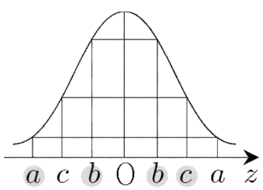
풀이

ㄱ. (참)

조건 (가)에 의하여 아래의 그림을 그리게 된다.



조건 (나)에 의하여 다음과 같이 a, b, c가 결정된다.



이때, $a < b < 0 < c$ 또는 $a < 0 < b < c$

$\therefore\ c > 0$

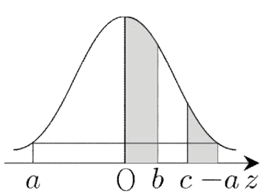
ㄴ. (거짓)

$b < 0$이면 $\mathrm{P}(Z \le b) \le 0.5$이고,

$b > 0$이면 $\mathrm{P}(Z \le b) \ge 0.5$이다.

ㄷ. (참)

$b > 0$이므로



$\mathrm{P}(c \le Z \le -a)$

$= \mathrm{P}(c \le Z \le c+b) < \mathrm{P}(0 \le Z \le b)$

($\because$ 구간의 길이가 b로 같다.)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

※ 통계 단원은 이 외의 특별한 실전 이론이 없으므로, 하나의 주제만을 다루었습니다.

L036

○○○
(2008(10)고3-가형27확률통계)

연속확률변수 X가 갖는 값은 구간 $[0,\ 1]$의 모든 실수이다. 구간 $[0,\ 1]$에서 두 함수 $F(x)$, $G(x)$를

$F(x)=\mathrm{P}(X \geq x)$, $G(x)=\mathrm{P}(X \leq x)$

로 정의할 때, 보기에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

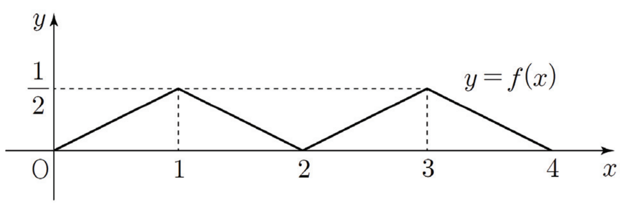
ㄱ. $F(0.3) \leq F(0.2)$
ㄴ. $F(0.4)=G(0.6)$
ㄷ. $F(0.2)-F(0.7)=G(0.7)-G(0.2)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

L037

●●●
(2023(7)고3-확률과통계29)

두 연속확률변수 X와 Y가 갖는 값의 범위는 $0 \leq X \leq 4$, $0 \leq Y \leq 4$이고, X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$, $g(x)$이다. 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



확률변수 Y의 확률밀도함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 연속이고 $0 \leq x \leq 4$인 모든 실수 x에 대하여

$\{g(x)-f(x)\}\{g(x)-a\}=0$ (a는 상수)

를 만족시킨다. 두 확률변수 X와 Y가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}(0 \leq Y \leq 1)<\mathrm{P}(0 \leq X \leq 1)$
(나) $\mathrm{P}(3 \leq Y \leq 4)<\mathrm{P}(3 \leq X \leq 4)$

$\mathrm{P}(0 \leq Y \leq 5a)=p-q\sqrt{2}$일 때, $p \times q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 자연수이다.) [4점]

L. 정규분포(계산)

L038

○○
(2011사관(1차)-문과12)

평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르는 확률변수 X와 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z가 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}(X \geq 58)=\mathrm{P}(Z \geq -1)$
(나) $\mathrm{P}(X \leq 55)=\mathrm{P}(Z \geq 2)$

$m+\sigma$의 값은? [3점]

① 62 ② 63 ③ 64
④ 65 ⑤ 66

L039

○○
(2015사관(1차)-A형14)

정규분포를 따르는 두 연속확률변수 X, Y가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $Y=aX(a>0)$
(나) $\mathrm{P}(X \leq 18)+\mathrm{P}(Y \geq 36)=1$
(다) $\mathrm{P}(X \leq 28)=\mathrm{P}(Y \geq 28)$

$\mathrm{E}(Y)$의 값은? [4점]

① 42 ② 44 ③ 46
④ 48 ⑤ 50

L040

○○ (2019(7)고3-가형16)

확률변수 X가 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따를 때, 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(t)$는

$$f(t) = \mathrm{P}(t \le X \le t+2)$$

이다. 함수 $f(t)$는 $t=4$에서 최댓값을 갖고, $f(m) = 0.3413$이다. 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 $f(7)$의 값을 구한 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.1359 ② 0.0919 ③ 0.0606
④ 0.0440 ⑤ 0.0166

L041

○○ (2017(10)고3-나형27)

확률변수 X는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르고

$F(x) = \mathrm{P}(X \le x)$라 하자.

m이 자연수이고

$$0.5 \le F\left(\frac{11}{2}\right) \le 0.6915,\ F\left(\frac{13}{2}\right) = 0.8413$$

일 때, $F(k) = 0.9772$를 만족시키는 상수 k의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

L042

○○ (2008(4)고3-가형13)

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X에 대하여 확률밀도함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(100-x) = f(100+x)$$

를 만족한다.

$\mathrm{P}(m \le X \le m+8) = 0.4772$일 때, 표준정규분포표를 이용하여 $\mathrm{P}(94 \le X \le 110)$을 구하면? [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938
3.0	0.4987

① 0.9104 ② 0.9270 ③ 0.9710
④ 0.9725 ⑤ 0.9759

L043

○○ (2020사관(1차)-가형24)

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}(X \ge 128) = \mathrm{P}(X \le 140)$
(나) $\mathrm{P}(m \le X \le m+10) = \mathrm{P}(-1 \le Z \le 0)$

$\mathrm{P}(X \ge k) = 0.0668$을 만족시키는 상수 k의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. (단, Z는 표준정규분포를 따르는 확률변수이다.) [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

L044

○○ (2021사관(1차)-가형16)

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 4^2)$을 따르고, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ \sigma^2)$을 따른다. 확률변수 X이 확률밀도함수가 $f(x)$일 때, $f(x)$와 두 확률변수 X, Y가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여
$f(x+10)=f(20-x)$이다.
(나) $\mathrm{P}(X \geq 17)=\mathrm{P}(Y \leq 17)$

$\mathrm{P}(X \leq m+\sigma)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, $\sigma > 0$) [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.6915 ② 0.7745 ③ 0.9104
④ 0.9332 ⑤ 0.9772

L045

○○ (2022(10)고3-확률과통계28)

정규분포를 따르는 두 확률변수 X, Y의 확률밀도함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 할 때, 모든 실수 x에 대하여
$g(x)=f(x+6)$
이다. 두 확률변수 X, Y와 상수 k가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}(X \leq 11)=\mathrm{P}(Y \geq 23)$
(나) $\mathrm{P}(X \leq k)+\mathrm{P}(Y \leq k)=1$

오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한
$\mathrm{P}(X \leq k)+\mathrm{P}(Y \geq k)$의 값이 0.1336일 때,
$\mathrm{E}(X)+\sigma(Y)$의 값은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① $\dfrac{41}{2}$ ② 21 ③ $\dfrac{43}{2}$
④ 22 ⑤ $\dfrac{45}{2}$

L046

○○○ (2021사관(1차)-나형17)

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 5^2)$을 따르고, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 5^2)$을 따른다. 두 확률변수 X, Y의 확률밀도함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 할 때,
두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 만나는 점의 x좌표를 k라 하자. $\mathrm{P}(Y \leq 2k)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, $m \neq 10$) [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.6915 ② 0.8413 ③ 0.9104
④ 0.9332 ⑤ 0.9772

L047

○○○ (2021(10)고3-확률과통계27)

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(8,\ 2^2)$, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(12,\ 2^2)$을 따르고, 확률변수 X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$와 $g(x)$이다.
두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표를 a라 할 때, $\mathrm{P}(8 \leq Y \leq a)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.1359 ② 0.1587 ③ 0.2417
④ 0.2857 ⑤ 0.3085

L048

○○○ (2023사관(1차)-확률과통계29)

서로 다른 두 자연수 a, b에 대하여 두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(a,\ \sigma^2)$, $\mathrm{N}(2b-a,\ \sigma^2)$을 따른다. 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$와 확률변수 Y의 확률밀도함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $\mathrm{P}(X \le 11) = \mathrm{P}(Y \ge 11)$
(나) $f(17) < g(10) < f(15)$

L049

○○○ (2009(7)고3-가형29확률통계)

확률변수 X, Y의 평균이 각각 m, $2m(m>0)$이고 표준편차가 각각 2σ, σ인 정규분포를 따를 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $\mathrm{P}(X \le 0) = \mathrm{P}\left(Y \ge \dfrac{5}{2}m\right)$

ㄴ. $\mathrm{P}(m \le X \le 2m) = \dfrac{1}{2}\mathrm{P}(2m \le Y \le 3m)$

ㄷ. 상수 a, b에 대하여
$\mathrm{P}(X \ge a) + \mathrm{P}(Y \le b) = 1$일 때, $b = \dfrac{a+3m}{2}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

L050

○○○ (2020(7)고3-나형18)

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m_1,\ \sigma_1^2)$, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m_2,\ \sigma_2^2)$을 따르고, 확률변수 X, Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$, $g(x)$이다.
$\sigma_1 = \sigma_2$이고 $f(24) = g(28)$일 때,
확률변수 X, Y는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}(m_1 \le X \le 24) + \mathrm{P}(28 \le Y \le m_2) = 0.9544$
(나) $\mathrm{P}(Y \ge 36) = 1 - \mathrm{P}(X \le 24)$

$\mathrm{P}(18 \le X \le 21)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.3830 ② 0.5328 ③ 0.6247
④ 0.6826 ⑤ 0.7745

L051

○○○ (2009(4)고3-가형16)

연속확률변수 X는 평균이 20, 표준편차가 4인 정규분포를 따른다. 함수 $f(k)$를

$$f(k) = \mathrm{P}(k-8 \le X \le k)$$

로 정의할 때, $f(k)$에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

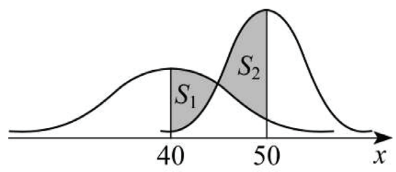
ㄱ. $f(12) = f(36)$
ㄴ. 함수 $f(k)$는 $k=24$일 때 최댓값을 갖는다.
ㄷ. 임의의 실수 k에 대하여 $f(k) = f(24-k)$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

L052

○○○
(2009(3)고3-가형27)

그림은 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 10^2)$, $\mathrm{N}(50,\ 5^2)$을 따르는 두 확률변수 X, Y의 정규분포곡선을 나타낸 것이다. 그림과 같이 $40 \le x \le 50$인 범위에서 두 곡선과 직선 $x=40$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 두 곡선과 직선 $x=50$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 할 때, S_2-S_1의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]



z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
2.0	0.4772
3.0	0.4987

① 0.1248 ② 0.1359 ③ 0.1575
④ 0.1684 ⑤ 0.1839

L053

○○○
(2023(10)고3-확률과통계28)

정규분포를 따르는 두 확률변수 X, Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$, $g(x)$이다.
$\mathrm{V}(X)=\mathrm{V}(Y)$이고, 양수 a에 대하여

$$f(a)=f(3a)=g(2a),$$
$$\mathrm{P}(Y \le 2a)=0.6915$$

일 때, $\mathrm{P}(0 \le X \le 3a)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.5328 ② 0.6247 ③ 0.6687
④ 0.7745 ⑤ 0.8185

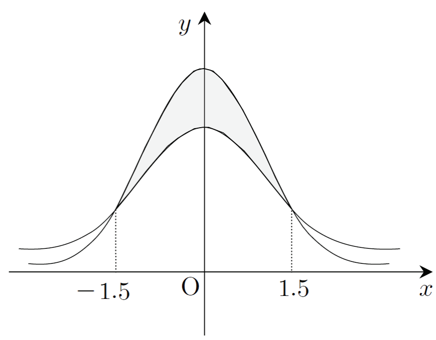
L054

○○○
(2008사관(1차)-문과16)

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(0,\ \sigma^2)$을 따르고, 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$을 따른다. 두 확률변수 X, Z의 확률밀도함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 할 때, 다음 조건이 모두 성립한다.

(가) $\sigma > 1$
(나) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 $x=-1.5$, $x=1.5$일 때 만난다.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이가 0.096일 때, X의 표준편차 σ의 값을 아래 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]



z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.2	0.385
1.5	0.433
2.0	0.477

① 1.20 ② 1.25 ③ 1.50
④ 1.75 ⑤ 2.00