제 2 교시

# 6평 대비 미니 모의고사 1회 문제지

# 수학 영역

**홀수형**

| 성명 | |
|---|---|

| 수험 번호 | | | | | — | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

**공부 하기 싫다.**

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.



**※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.**

제 2 교시

# 수학 영역



**5지선다형**

9. 등차수열 $\{a_n\}$에 대해, $\sum_{n=1}^{5} a_n < 0$ 이고, $|a_3| = a_4 + a_5$를 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{8} a_n = 8$일 때, $a_{10}$의 값은? [4점]

↳ 양수

① 4　② 6　③ 8　④ 10　⑤ 12

$\sum_{1}^{5} a_n = 5a_3 < 0 \Rightarrow a_3 < 0$

$\Rightarrow |a_3| = -a_3 = a_4 + a_5$

$a_3 + a_4 + a_5 = 0$

$\therefore a_4 = 0$ (등차중항)

$\Downarrow$

$\sum_{1}^{8} a_n = \underbrace{(a_1 + \cdots + a_7)}_{0} + a_8 = 8$

$\downarrow$

$d = 2.$

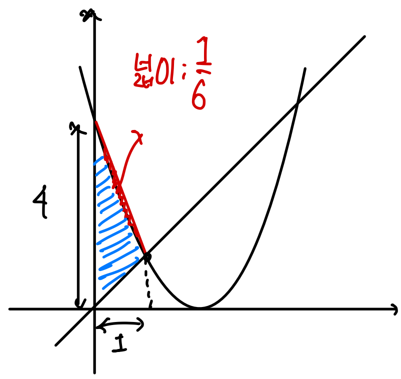
$a_{10} = 12$

10. 이차함수 $f(x) = (x-2)^2$에 대해, 직선 $y = mx\ (m > 0)$와 곡선 $y = f(x)$, $y$축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 $S$라고 하자. 직선 $y = mx$와 곡선 $y = f(x)$의 두 교점의 $x$좌표의 합이 5일 때, $6S$의 값은? [4점]

① 14　② 13　③ 12　④ 11　⑤ 10

$f(x) - mx = x^2 - (4+m)x + 4$

$\Rightarrow$ 두 근의 합 : 5 $\Rightarrow m = 1$




$4 \times 1 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{11}{6}$

$S = 11$

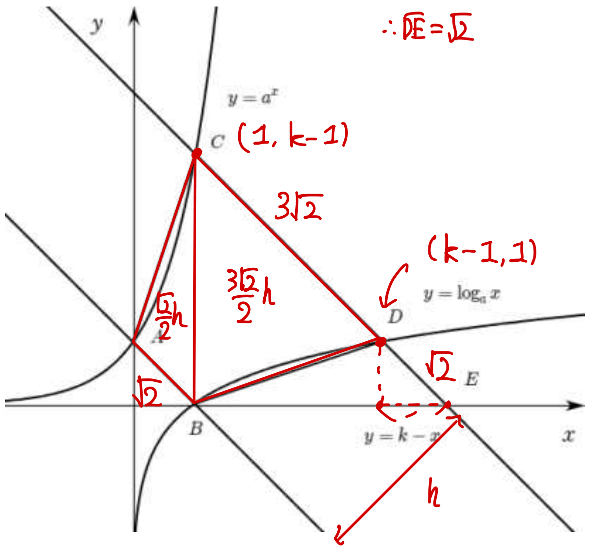
**11.** 그림과 같이 1보다 큰 양수 $a$에 대해 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$가 직선 $y=1-x$와 만나는 점을 각각 A, B, 직선 $y=k-x$와 만나는 점을 각각 C, D 라고 하자. 직선 $y=k-x$가 $x$축과 만나는 점을 E라고 할 때, 다음을 만족시킨다.

> (가) $\overline{\mathrm{CD}}=3\sqrt{2}$
> (나) 사각형 ABDC의 넓이는 삼각형 BDE의 넓이의 4배이다.

$\frac{\sqrt2 h}{2}+\frac{3\sqrt2}{2}h=2\sqrt2 h$

$\therefore \overline{DE}=\sqrt2$

$a$의 값은? [4점]



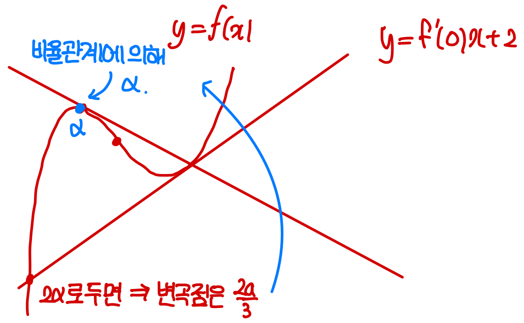

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$\log_a(k-1)=1$,

$k-1-1=3 \to k=5.$ $a=4$

**12.** 최고차항의 계수가 1이고, $f'(0)\neq 0$인, 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(0,2)$에서 곡선에 접하는 접선을 $l$이라고 하자. 이때 $l$과 곡선 $y=f(x)$는 $x$좌표가 음수인 점에서 만나고, 직선 $l$을 $y$축에 대하여 대칭이동 시킨 직선이 $y=f(x)$와 접한다. $f(1)=9$일 때, $f(2)$의 값으로 알맞은 것은? [4점]

① 15 ② 20 ③ 25 ④ 30 ⑤ 35




$\Rightarrow\ f(x)-f'(0)x-2 = x^2(x-2\alpha)$

$-\ \ f(x)+f'(0)x-2 = x(x-\alpha)^2$

$-2f'(0)x = -\alpha^2 x$

$f'(0)=\frac{\alpha^2}{2}$

$\therefore\ f(x)=x^2(x-2\alpha)+\frac{\alpha^2}{2}x+2$

$f(1)=\frac{\alpha^2}{2}-2\alpha+3=9$

$\alpha^2-4\alpha-12=0$

$\alpha=-2$ , $\alpha=6$ (X, 교점의 $x$좌표$<0$)

$\therefore f(2)=4\cdot(2+4)+4+2$

$=30.$

**13.** 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$항 까지의 합을 $S_n$이라 하자. 다음은 모든 자연수 $n$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{(n+1)!(n+1)} = \frac{1}{n+1}$$

이 성립할 때, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{(n-2)!}$를 구하는 과정이다.

---

$n=1$일 때, $\dfrac{S_1}{2!\times 2} = \dfrac{1}{2}$이므로, $a_1 = 2$이다.

$n=2$일 때, $\dfrac{S_2}{3!\times 3} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{6}$이고, $S_2 = -3$이므로,

$a_2 = -5$이다.

$n \ge 2$인 모든 자연수 $n$에 대하여,

$$\frac{S_n}{(n+1)!(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{(k+1)!(k+1)} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{(k+1)!(k+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

이다. 따라서,

$$S_n = -(n+1) \times \boxed{(가)}$$

이다. 이때, $n \ge 3$인 모든 자연수 $n$에 대해서

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$
$$= -(n-2)! \times \boxed{(나)}$$

이므로, $n \ge 3$일 때,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{(n-2)!} = a_2 - \sum_{k=3}^{n} \boxed{(나)}$$
$$= \boxed{(다)}$$

---

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n), g(n), h(n)$이라 할 때, $f(3) \times g(1) \times h(4)$의 값은? [4점]

① ~~12~~ 24 ② ~~15~~ 30 ③ ~~18~~ 36 ④ ~~21~~ 42 ⑤ ~~24~~ 48

(가) $\dfrac{S_n}{(n+1)!(n+1)} = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{-1}{n(n+1)}$

$\therefore S_n = -\dfrac{(n+1)!}{n} = -\dfrac{n\cdot(n+1)\cdot(n-1)!}{n}$

$= -(n+1)\cdot(n-1)! \to f(3) = 2! = 2$

(나) $S_n - S_{n-1} = -(n+1)\cdot(n-1)! + n\cdot(n-2)!$

$= -(n+1)(n-1)(n-2)! + n(n-2)!$

$= -(n^2-n-1)\cdot(n-2)! \Rightarrow g(1) = -1$

$(1^2-1-1=-1)$
$2^2-2-1=1$

(다) $-5-\displaystyle\sum_{k=3}^{n}(n^2-n-1) = -5-\sum_{k=1}^{n}(n^2-n-1)$

$\Rightarrow -5-\dfrac{4\cdot5\cdot9}{6}+\dfrac{4\cdot5}{2}+4$

$= -5-30+10+4 = -21$

$2\times(-1)\times(-21) = 42.$

**14.** 실수 $\alpha$에 대하여, 삼차함수 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-\alpha)$에 대해 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

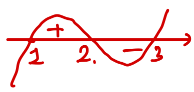
ㄱ. $\alpha = 3$일 때, $\displaystyle\int_1^\alpha f(x)dx = 0$이다.

ㄴ. $\left|\displaystyle\int_1^2 f(x)dx\right|$는 $\alpha = \dfrac{3}{2}$일 때, 최솟값을 갖는다.

ㄷ. $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)dx\right| = \displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$을 만족시키는 $a < b < \alpha$인 자연수의 순서쌍 $(a, b)$가 29개가 되도록 하는 $\alpha$의 최솟값은 10이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $\displaystyle\int_1^\alpha f(x)dx = 0 \Rightarrow$



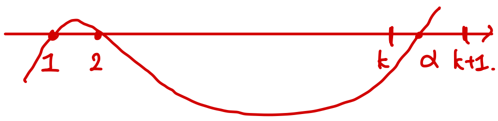

⇒ 대칭:0 (참)

ㄴ. $\alpha = \frac{3}{2}$일때 $\left|\int_1^2 f(x)dx\right| = 0$, $|A| \ge 0$ 이므로 최소 (참)

ㄷ. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \int_a^b |f(x)|dx$

⇒ $(a, b)$에서 부호변화 X.

$k \le \alpha < k+1$로 가정.




그러면 순서쌍의 개수는

(1,2) (2,3) (3,4) ... (k−1, k)
(2,4) (3,5)
⋮ ⋮
(2,k) (3,k)

총 $1+\displaystyle\sum_{n=1}^{k-2} n = 1+\dfrac{(k-1)(k-2)}{2} = 29.$

$k^2-3k-54=0$

$(k=-6)$ X or $k=9$

$9 \le \alpha < 10$ 이므로, $\min \alpha = 9.$

(거짓)

**15.** 모든 항이 정수인 수열 $\{a_n\}$에 대해, 모든 자연수 $n$에 대하여,

$$|a_{n+2}| = |a_{n+1}| + |a_n|, \qquad a_n a_{n+1} a_{n+2} < 0$$

$\hookrightarrow a_n \neq 0 \ (n \in \mathbb{N})$

를 만족시킨다. $a_3 = 4$일 때, $\sum_{n=1}^{6} |a_n| - a_n$이 최댓값을 갖도록 하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_9$의 값은? [4점]

① 70 ② 72 ③ 74 ④ 76 ⑤ 78

$a_n a_{n+1} a_{n+2} < 0$

↳ Case 1. 모든 $a_n$이 음수 ($a_3 = 4$ 와 모순) X

↳ Case 2. 음수항이 3번마다 나옴.

$|a_n|$을 먼저 나열해보자

$a_n$이 0이 아닌 정수 ⇒ $|a_n|$은 자연수.

| $\lvert a_1 \rvert$ | $\lvert a_2 \rvert$ | $\lvert a_3 \rvert$ | $\lvert a_4 \rvert$ | $\lvert a_5 \rvert$ | $\lvert a_6 \rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\boxed{3}$ | 4 | 7 | $\boxed{11}$ | 18. |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 10 | 16 |
| 3 | 1 | 4 | 5 | 9 | 14. |

이중 $\sum_{n=1}^{6} |a_n| - a_n$이 최대 ⇒ $|-3| - (-3) + |-11| - (-11) = 28$

따라서 $a_5 = -11 \to a_6 = 18$

$a_7 = 29, \quad a_8 = -47 \quad a_9 = 76$

## 단답형

**20.** 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대해, 함수 $g(x)$가 다음을 만족시킨다.

$$(x+2)g(x) = f(x) - f(2)$$

$f(x) = g(x)$가 서로 다른 두 실근을 가지도록 하는 $f(0)$의 최댓값이 존재할 때, $4g(-2)$의 값을 구하시오. [4점]

양 변에 −2 대입: $f(-2) - f(2) = 0$

∴ $f(x)$는 $x^2 + a$ 꼴

$(x+2)g(x) = x^2 + a - 4 - a$
$= x^2 - 4$

⇒ $g(x) = \dfrac{x^2-4}{x+2} = x - 2 \quad (x \neq -2)$

이때 $f(x) = x - 2$ 의 근의 개수는

$x^2 + a = x - 2 \Rightarrow x^2 - x + a + 2 = 0$

$D = 1 - 4a - 8 = -4a - 7 > 0$

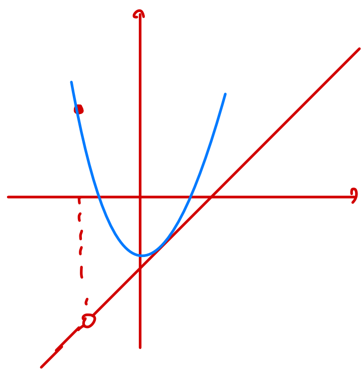
$a < -\frac{7}{4} \qquad f(0) < -\frac{7}{4}$

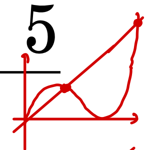
등호가 없는 부등호이므로, $f(0)$은 최댓값을 갖지 않음.

⇒ $g(-2) = (-2)^2 - \frac{7}{4}$ 일때만 $a = -\frac{7}{4}$ 일때

두 근을 가짐. (최댓값)

∴ $g(-2) = 4 - \frac{7}{4} = \frac{9}{4}, \quad 4g(-2) = 9.$

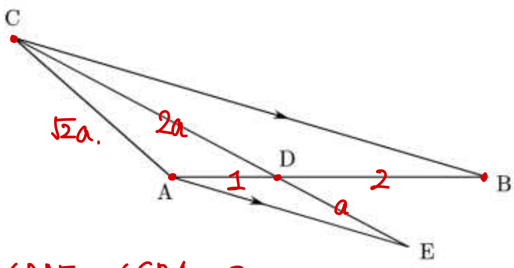




21. 그림과 같이 삼각형 ABC에서 길이가 3인 선분 $\overline{AB}$를 삼등분하는 점 중 A에 가까운 것을 D라 하자. 점 A에서 그은 선분 $\overline{BC}$에 평행한 직선과, 직선 CD가 만나는 점을 E라고 할 때, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 삼각형 ADE, BCA, BCD의 외접원의 반지름은 공비가 $r$인 등비수열을 이룬다.
(나) 삼각형 ADC의 외접원의 넓이는 삼각형 ADE의 외접원의 넓이의 $\frac{8}{11}$배 이다.

선분 BC의 길이를 $k$라 할 때, $k^2$의 값을 구하시오. [4점]




평행선 $\Rightarrow \angle BAE = \angle CBA = \theta$

$\Rightarrow \dfrac{\overline{DE}}{\sin\theta}, \dfrac{\overline{AC}}{\sin\theta}, \dfrac{\overline{CD}}{\sin\theta}$ 가 등비

$\Leftrightarrow \overline{DE}, \overline{AC}, \overline{CD}$ 도 등비, $\overline{DE}=a \to \overline{AC}=ar, \overline{CD}=ar^2$

이때, 평행선에서, $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{DE}:\overline{CD}$

$\Rightarrow 2a = ar^2, \ r=\sqrt{2}$

$\angle CDA \equiv \alpha$로 두면,

$\dfrac{\sqrt{2}a}{\sin\alpha} = 2r_1 \qquad \dfrac{\overline{AE}}{\sin(\pi-\alpha)} = 2r_2$

$r_1^2 : r_2^2 = 8 : 11 \Rightarrow r_2 = \dfrac{\sqrt{11}}{2\sqrt{2}} r_1$

$\Rightarrow \overline{AE} = \dfrac{\sqrt{11}}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}a = \dfrac{\sqrt{11}}{2}a,$

$\overline{CB} = 2\overline{AE} = \sqrt{11}a.$

이제 $\alpha$를 이용해 코사인법칙을 쓰면

$$\begin{cases} 1+4a^2-2\cdot 2a\cdot 1\cdot\cos\alpha = 2a^2 \\ 2+4a^2-2\cdot 2a\cdot 2\cdot\cos(\pi-\alpha) = 11a^2 \end{cases}$$

연립하면 $a=\sqrt{2}$를 얻는다. ( $k=\sqrt{22}$, $k^2=22$ )

22. 삼차함수 $f(x)=x(x-4)^2$ 에 대해, 실수 전체 집합에서 연속인 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\ge mx) \\ mx & (f(x)<mx) \end{cases}$$

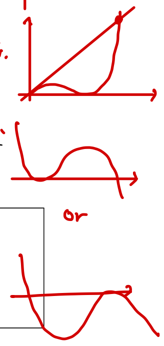
(단, $m>0$인 실수)

$f$는 최소 1개의 미분 불가능 점을 갖는다.

와 최고차항의 계수가 음수인 삼차함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

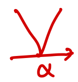
(가) 방정식 $h(x)=0$은 서로 다른 두 양의 실근을 갖는다.
(나) $x>0$에서, $g(x)-|h(x)|$와 $g(x)|h(x)|$는 오직 한 점에서만 미분가능하지 ~~않는다.~~ 않고,
미분 가능하지 않은 점의 $x$좌표는 서로 다르다.

$h(-2)$의 값을 구하시오. [4점]

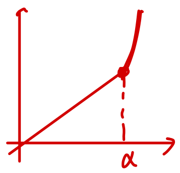



$|h(x)|$는 미분가능하지 않은 점 $\alpha$에서

(우미분계수) $= -$(좌미분계수)




i) 만약 $f$의 미분 불가능 점이 오직 하나라면,

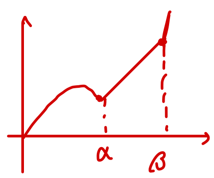



$h$도 그점에서 미분 (한개만 존재).

$g(x)|h(x)|$는 $x\ne\alpha$에서만 미분 가능하지 않으므로

(나)에 모순 (X)

ii) $f$의 미분 불가능 점이 두개,




이때는 $g(x)-|h(x)|$는 $x=\alpha$에서

미분계수가 0이되어 미분가능해야한다.

($|h(x)|$는 미·불 점에서 (우미분계수) $=-$(좌미분계수)

이므로, 서로 빼서 미분 가능하려면, $g$도 미분계수로

$h'(\alpha+) = g'(\alpha+) = -g'(\alpha-) = -h'(\alpha-)$를 만족시켜야 함.)

$\Rightarrow \begin{cases} m\alpha = \alpha(\alpha-4)^2 \\ -m = (\alpha-4)^2 + 2\alpha(\alpha-4) \end{cases} \Rightarrow$ 연립. $\alpha=2$, $m=4$.

이때 $g(x)|h(x)|$의 도함수는 $g'(x)|h(x)| + g(x)|h(x)|'$ 인데,

$x\to\alpha+$와 $x\to\alpha-$의 도함수가 다르므로 미분 불가.

즉 $g(x)|h(x)|$는 $x=\beta$에서 미분 가능. $\to \beta=6$.

따라서 $h(x)=k(x-2)(x-6)^2$

$h'(2)=-4$가 되도록 $k$를 계산하면, $h(x)=-\frac{1}{4}(x-2)(x-6)^2$

$\therefore h(-2) = 64$

＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

※시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.