강철중 × 설맞이 · 모의고사

총평

수능 직전에 치러질 모의고사임을 감안하여,
학습 효과와 **실전성**이 균형 있게 어우러지는 시험지를 기획하였습니다.

공통과목은 **'수능 시험지가 자아내는 낯섦과 생소함'**에 초점을 두었고,
선택과목은 **'핵심 주제와 합리적 변별력의 조화'**를 구현하고자 하였습니다.

교과서에 기반을 둔 핵심 주제들과 기출문제에 근거를 둔 낯선 소재들은
100분이라는 제한 시간과 만나 **잔잔한 무게감**을 선사했을 것입니다.

지금까지 갈고 닦은 수학 실력을 마음껏 뽐내면서도,
부족한 부분을 채워나갈 수 있는 무대가 되었기를 바랍니다.

공통과목 · 정답

번호	정답	배점	번호	정답	배점	번호	정답	배점	번호	정답	배점
1	②	2	7	①	3	13	⑤	4	19	40	3
2	⑤	2	8	②	3	14	④	4	20	131	4
3	③	3	9	①	4	15	②	4	21	10	4
4	③	3	10	③	4	16	5	3	22	6	4
5	④	3	11	④	4	17	8	3			
6	⑤	3	12	②	4	18	35	3			

선택과목 · 확률과 통계 · 정답

번호	정답	배점	번호	정답	배점	번호	정답	배점	번호	정답	배점
23	②	2	25	⑤	3	27	①	3	29	128	4
24	①	3	26	②	3	28	④	4	30	25	4

선택과목 · 미적분 · 정답

번호	정답	배점	번호	정답	배점	번호	정답	배점	번호	정답	배점
23	②	2	25	⑤	3	27	②	3	29	3	4
24	①	3	26	②	3	28	④	4	30	260	4

선택과목 · 기하 · 정답

번호	정답	배점	번호	정답	배점	번호	정답	배점	번호	정답	배점
23	⑤	2	25	②	3	27	②	3	29	4	4
24	③	3	26	④	3	28	④	4	30	162	4

등급	원점수 기준 · 예상 등급컷		
	확률과 통계	미적분	기하
1	86	83	84
2	77	75	74
3	63	64	62

공통과목 · 해설

1

정답 ②

해설

$$8^{-\frac{1}{4}} \times \sqrt[4]{32} = 2^{-\frac{3}{4}} \times 2^{\frac{5}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

2

정답 ⑤

해설

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 2 \ \Rightarrow\ f'(x) = 3x^2 - 4x,\ f(2) = -2$$

이므로 구하는 값은

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)+2}{x-2} = \lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2) = 4$$

이다.

3

정답 ③

해설

$$a_1 + a_3 + a_5 = a_2 + 3a_4 + a_6$$
$$\Rightarrow\ 3a_3 = 5a_4\ \ (\because\ a_1 + a_5 = 2a_3,\ a_2 + a_6 = 2a_4)$$
$$\Rightarrow\ 3(a_4 - 4) = 5a_4\ \ (\because\ \text{공차가 } 4)$$
$$\Rightarrow\ a_4 = -6$$

4

정답 ③

해설

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\times(3x^2-2)\} = f'(x)\times(3x^2-2) + f(x)\times 6x$$

이고 $f(1) = 2$, $f'(1) = 4$이므로 구하는 값은

$$f'(1)\times1 + f(1)\times6 = 4 + 12 = 16$$

이다.

5

정답 ④

해설

$$\int_{-k}^{k}(6x^2+3kx+k^2)\,dx=36$$

$$\Rightarrow 2\int_{0}^{k}(6x^2+k^2)\,dx=36$$

$$\Rightarrow \Big[2x^3+k^2x\Big]_0^k=18$$

$$\Rightarrow 3k^3=18 \Rightarrow k^3=6 \Rightarrow k=\sqrt[3]{6}$$

6

정답 ⑤

해설

주어진 조건에서

$$\tan^2\theta+3\tan\theta+1=0$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta+3\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=0$$

$$\Rightarrow \sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{3}\ \ (\because\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1)$$

이므로 구하는 값은

$$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta$$

$$=1-2\times\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{3}$$

이다.

7

정답 ①

해설

두 곡선 $y=x^3-3x^2+a$, $y=x^2+bx+c$가 모두 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$$\begin{cases} \bullet\ 1-3+a=2 \Rightarrow a=4 \\ \bullet\ 1+b+c=2 \Rightarrow c=1-b \end{cases}$$

이다. 또한, 이 두 곡선 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 두 접선이 서로 수직이므로

$$y'=3x^2-6x,\quad y'=2x+b$$

에서

$$(3-6)\times(2+b)=-1 \Rightarrow b=-\frac{5}{3}$$

이다. 따라서 $c=1-b=\frac{8}{3}$이므로 구하는 값은

$$a-b+c=4+\frac{5}{3}+\frac{8}{3}=\frac{25}{3}$$

이다.

8

정답 ②

해설

수열 $\{S_n+4\}$가 공비가 4인 등비수열이므로 세 수

$$\begin{cases} S_1+4=a_1+4 \\ S_2+4=a_1+a_2+4=a_1+13\ \ (\because\ a_2=9) \\ S_3+4=a_1+a_2+a_3+4=a_1+a_3+13\ \ (\because\ a_2=9) \end{cases}$$

가 이 순서대로 공비가 4인 등비수열을 이룬다. 따라서

$$4\times(a_1+4)=a_1+13 \Rightarrow 3a_1=-3$$

$$\Rightarrow a_1=-1$$

이고,

$$4\times(a_1+13)=a_1+a_3+13 \Rightarrow 48=a_3+12\ \ (\because\ a_1=-1)$$

$$\Rightarrow a_3=36$$

이다.

9

정답 ①

해설

a는 양수이므로

$$\begin{cases} 0\le x\le 2\text{일 때 } f(x)\ge 0 \\ 2\le x\le 3\text{일 때 } f(x)\le 0 \end{cases}$$

이고, **함수 $g(x)$의 정의**에 의하여

$$\begin{cases} 0\le x\le 2\text{일 때 } g(f(x))=2f(x) \\ 2\le x\le 3\text{일 때 } g(f(x))=f(x) \end{cases}$$

이다.

따라서

$$\int_0^3 g\big(f(x)\big)dx=\int_0^3 f(x)\,dx+12$$

$$\Rightarrow \int_0^2 2f(x)\,dx+\int_2^3 f(x)\,dx=\int_0^3 f(x)\,dx+12$$

$$\Rightarrow \int_0^2 f(x)\,dx=12$$

$$\Rightarrow \left[\frac{a}{4}x^4-\frac{5}{3}ax^3+3ax^2\right]_0^2=12$$

$$\Rightarrow \frac{8}{3}a=12$$

$$\Rightarrow a=\frac{9}{2}$$

이다.

10

정답 ③

해설

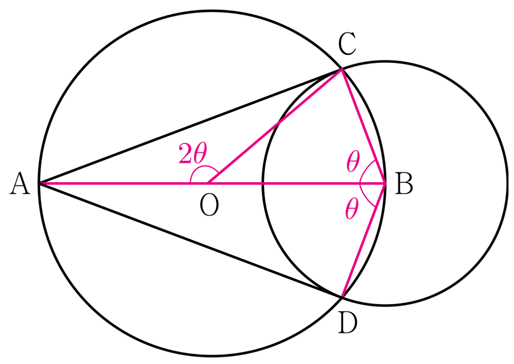
선분 AB를 지름으로 하는 원의 중심을 O라 하고,

$$\angle ABC=\theta \ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)\ (\because \angle CBD<\pi)$$

라 하면,

$$\begin{cases} ① \text{ 원주각의 성질에 의하여 } \angle AOC=2\theta \\ ② \text{ 두 직각삼각형 ABC, ABD가 합동이므로 } \angle ABD=\theta \end{cases}$$

임을 알 수 있다.



따라서 ①에 의하여

$$l=2\times2\theta=4\theta$$

이고, 직각삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=4\cos\theta$이므로 ②에 의하여

$$S=\frac{1}{2}\times(4\cos\theta)^2\times2\theta$$

이다.

그러면 주어진 조건에 의하여

$$2S=l \Rightarrow 16\cos^2\theta\times2\theta=4\theta$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta=\frac{1}{8} \Rightarrow \cos\theta=\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \left(\because\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

이므로 구하는 값은

$$\begin{aligned}(\text{사각형 ADBC의 넓이}) &= 2\times(\text{삼각형 ABC의 넓이})\\ &=2\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin\theta\right)\\ &=4\times4\cos\theta\times\sin\theta\\ &=4\times4\times\frac{1}{2\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\\ &=2\sqrt{7}\end{aligned}$$

이다.

11

정답 ④

해설

편의상 점 P의 위치를 나타내는 함수를

$$f(t)=t^4-3t^3+t^2+8$$

이라 하면, 조건 (가)에 의하여 두 점 P, Q의 좌표의 합은 k이므로

점 Q의 위치는 $k-f(t)$

이어야 한다.

그러면 조건 (나)에 의하여 두 점 P, Q는 만나지 않아야 하므로 $t\,(t\ge0)$에 대한 방정식

$$f(t)=k-f(t) \Leftrightarrow f(t)=\frac{k}{2}$$

의 **실근이 존재하지 않아야 한다.**

한편, 함수 $f(t)$는

$$f'(t)=4t^3-9t^2+2t=t(4t-1)(t-2)$$

이므로

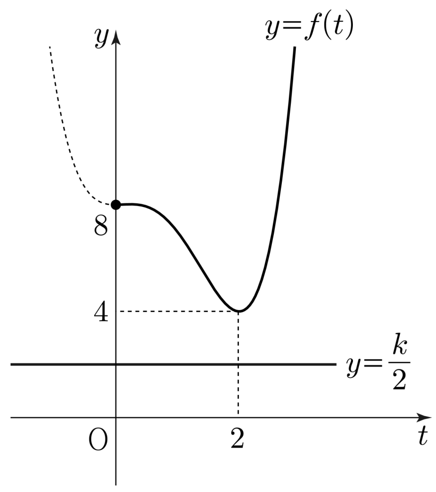
$$\begin{cases} t=0\text{에서 극솟값 } f(0)=8, \\ t=2\text{에서 극솟값 } f(2)=4 \end{cases}$$

를 갖는다.

따라서 $t\ge0$**에서 함수** $f(t)$**는 최솟값** 4를 가지므로 방정식 $f(t)=\frac{k}{2}$의 실근이 존재하지 않으려면

$$4>\frac{k}{2} \Rightarrow k<8$$

이면 된다. 따라서 정수 k의 최댓값은 7이다.



12

정답 ②

해설

Phase 1 함수 $f(x)$ 구하기

주어진 두 부등식을 **진수 조건까지 고려하여 각각 정리**하면

$$\begin{cases} \log_2 f(x) < \log_2 g(x) \iff 0 < f(x) < g(x) \\ \log_{\frac{1}{4}}\left(2f(x)-1\right) > \log_{\frac{1}{4}}\left(2g(x)-1\right) \iff \frac{1}{2} < f(x) < g(x) \end{cases}$$

이므로, 주어진 조건에 의하여

$$\left.\begin{array}{l} 0 < f(x) < g(x) \iff -1 < x < 3 \\ \frac{1}{2} < f(x) < g(x) \iff -1 < x < 1 \end{array}\right\} \cdots ㉠$$

임을 알 수 있다.

이때, **㉠의 두 부등식을 동시에 고려하면**

$$0 < f(x) \le \frac{1}{2} \iff 1 \le x < 3$$

이므로 $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(3) = 0$ 임을 알 수 있다. $f(x)$는 일차함수이므로

$$f(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} \quad \cdots ㉡$$

을 얻는다.

Phase 2 함수 $g(x)$ 구하기

따라서 ㉡에 의하여

$$\begin{cases} f(x) > 0 \iff x < 3 \\ f(x) > \frac{1}{2} \iff x < 1 \end{cases}$$

이므로, ㉠에 의하여

$$f(x) < g(x) \iff x > -1 \quad \cdots ㉢$$

이다.

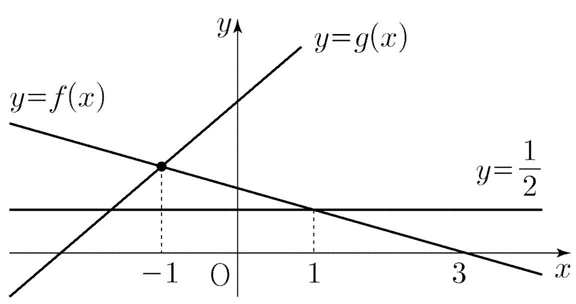
이때, $f(x)$, $g(x)$는 모두 일차함수이므로 ㉢에 의하여

$$f(-1) = g(-1) \Rightarrow g(-1) = 1 \quad (\because ㉡)$$

이고, 주어진 조건에 의하여

$$|f(0) - g(0)| = 1 \Rightarrow g(0) - f(0) = 1 \quad (\because ㉢)$$
$$\Rightarrow g(0) = \frac{7}{4} \quad (\because ㉡)$$

이므로 $g(x) = \frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$ 을 얻는다. 따라서 구하는 값은 $g(1) = \frac{5}{2}$ 이다.



13

정답 ⑤

해설

Phase 1 주어진 조건 해석하기

조건 (가)에서

함수 $f'(x) - 6x$ 의 한 부정적분이 $g'(x)$

$$\Rightarrow \int \{f'(x) - 6x\}dx = g'(x)$$
$$\Rightarrow f(x) - 3x^2 + C_1 = g'(x) \quad (C_1\text{은 상수}) \cdots ㉠$$

를 얻고, 조건 (나)에서

함수 $f(x) + g(x)$의 한 부정적분이 $xg(x)$

$$\Rightarrow f(x) + g(x) = \frac{d}{dx}\{xg(x)\}$$
$$\Rightarrow f(x) + g(x) = g(x) + xg'(x)$$
$$\Rightarrow f(x) = xg'(x) \quad \cdots ㉡$$

를 얻는다.

Phase 2 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 결정하기

따라서 ㉠을 ㉡에 대입하면

$$f(x) = xf(x) - 3x^3 + C_1 x$$
$$\Rightarrow (x-1)f(x) = 3x^3 - C_1 x$$

를 얻는다. 이 식의 양변에 $x = 1$을 대입하면 $C_1 = 3$을 얻으므로, 다시 이 식을 정리하면

$$f(x) = 3x(x+1) \quad \cdots ㉢$$

을 얻는다.

이때, ㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$$g'(x) = 3x + 3 \Rightarrow g(x) = \frac{3}{2}x^2 + 3x + C_2 \quad (C_2\text{은 상수})$$

를 얻고, 주어진 조건에서

$$f(1) = g(1) \Rightarrow 6 = \frac{9}{2} + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{3}{2}$$

을 얻는다.

따라서 구하는 값은

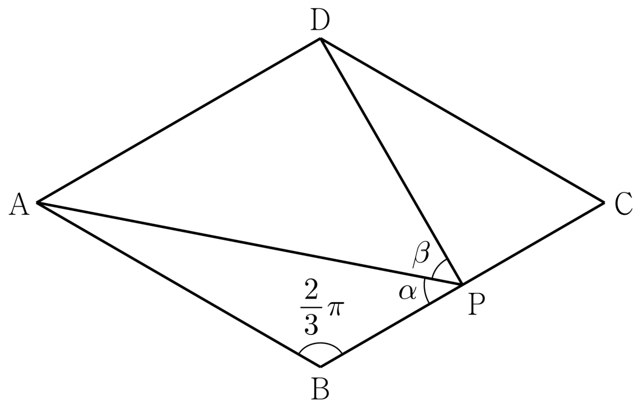
$$g(3) = \frac{27}{2} + 9 + \frac{3}{2} = 24$$

이다.

14 정답 ④

해설

Phase 1 **주어진 조건 해석하기**



위 그림과 같이

$$\angle \mathrm{APB} = \alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right), \quad \angle \mathrm{APD} = \beta \left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$$

라 하고, 두 삼각형 ABP, ADP의 외접원의 반지름의 길이를 각각 R_1, R_2라 하면, **사인법칙**에 의하여

$$\begin{cases} R_1 = \dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{2\sin\alpha} = \dfrac{1}{2\sin\alpha} \Rightarrow S_1 = \dfrac{\pi}{4\sin^2\alpha} \\ R_2 = \dfrac{\overline{\mathrm{AD}}}{2\sin\beta} = \dfrac{1}{2\sin\beta} \Rightarrow S_2 = \dfrac{\pi}{4\sin^2\beta} \end{cases}$$

이다.

따라서 주어진 조건에 의하여

$$\frac{\pi}{4} \times (S_1 + S_2) = S_1 S_2 \Rightarrow \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_1} = \frac{4}{\pi}$$
$$\Rightarrow \sin^2\beta + \sin^2\alpha = 1$$
$$\Rightarrow \sin^2\alpha = \cos^2\beta$$

를 얻는다. 이때, α와 β는 모두 예각이므로

$$\sin\alpha = \cos\beta \Rightarrow \sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$$

임을 알 수 있다.

Phase 2 **선분 AP의 길이 구하기**

그러면 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$이므로

점 P는 점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발

이다. 이때 두 직선 AD, BC는 서로 평행하므로 $\angle \mathrm{ADP} = \frac{\pi}{2}$이다.

따라서

$$\overline{\mathrm{DP}} = (\text{한 변의 길이가 } 1\text{인 정삼각형의 높이}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이고, 곧 직각삼각형 ADP에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

을 얻는다.

15 정답 ②

해설

Phase 1 **함수 $g(x)$ 파악하기**

$k > 0$이므로

$$f(x) \ge 0 \Leftrightarrow x^2 \ge k^2 \Leftrightarrow |x| \ge k$$

이다. 따라서 함수 $g(x)$의 식을 다시 쓰면

$$g(x) = |f(x)| - tx = \begin{cases} f(x) - tx & (|x| \ge k) \\ -f(x) - tx & (|x| < k) \end{cases}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \begin{cases} f'(x) - t & (|x| > k) \\ -f'(x) - t & (|x| < k) \end{cases}$$

이다.

Phase 2 **함수 $h(t)$ 파악하기**

함수 $p(x)$를

$$p(x) = \begin{cases} f'(x) & (|x| > k) \\ -f'(x) & (|x| < k) \end{cases}$$

라 하면,

$p(x)$와 t의 대소 관계가 바뀌는 지점

에서 **함수 $g(x)$가 극대 또는 극소**가 된다.

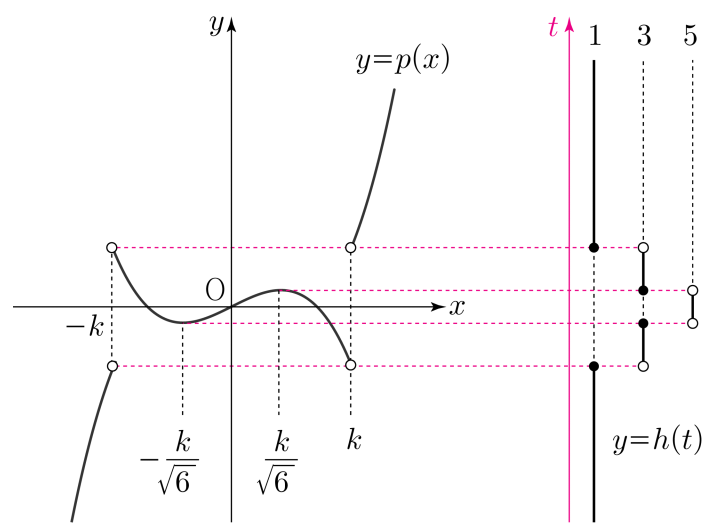
이때, $f'(x) = \dfrac{2x^3 - k^2 x}{8}$이므로

$$p'(x) = \begin{cases} \dfrac{6x^2 - k^2}{8} & (|x| > k) \\ -\dfrac{6x^2 - k^2}{8} & (|x| < k) \end{cases}$$

이고, 곧

$$\begin{cases} \bullet\ p(x)\text{는 } x = \dfrac{k}{\sqrt{6}}\text{에서 } \textbf{극댓값 } -f'\left(\dfrac{k}{\sqrt{6}}\right) = \dfrac{\sqrt{6}}{72}k^3\text{을 가짐} \\ \bullet\ \lim\limits_{x \to k+} p(x) = f'(k) = \dfrac{k^3}{8}, \quad \lim\limits_{x \to k-} p(x) = -f'(k) = -\dfrac{k^3}{8} \\ \bullet\ \dfrac{\sqrt{6}}{72}k^3 < \dfrac{k^3}{8}\text{이고 } y = p(x)\text{는 } \textbf{원점에 대하여 대칭}\text{임} \end{cases}$$

을 알 수 있다. 이를 고려하여 **함수 $y = p(x)$의 그래프의 개형과 그에 따른 함수 $h(t)$를** 그림으로 나타내면 다음과 같다.



Phase 3 **함수 $h(t)$가 불연속인 지점 구하기**

이때 주어진 조건

$$\lim_{t\to 1+} h(t) < 2 < \lim_{t\to 1-} h(t)$$

에 의하여 위 그림을 참고하면

$$f'(k)=1 \Rightarrow \frac{k^3}{8}=1 \Rightarrow k=2$$

를 얻고, 곧 함수 $h(t)$는

$$t=\pm 1,\quad t=\pm\frac{\sqrt{6}}{72}k^3=\pm\frac{\sqrt{6}}{9}$$

에서만 불연속이다. 따라서 함수 $h(t)$가 $t=b$에서 불연속인 모든 실수 b의 값의 곱은 $\frac{2}{27}$ 이다.

16

정답 5

해설

$$\log_3(x-1)=\log_9(3x+1)$$
$$\Rightarrow (x-1)^2=3x+1$$
$$\Rightarrow x(x-5)=0$$
$$\Rightarrow x=5 \ (\because \text{ 진수 조건에서 } x-1>0,\ 3x+1>0)$$

17

정답 8

해설

주어진 조건에서

$$f'(x)=4x^3-6x$$
$$\Rightarrow f(x)=x^4-3x^2+4 \ (\because\ f(0)=4)$$

이므로 구하는 값은

$$f(2)=16-12+4=8$$

이다.

18

정답 35

해설

주어진 조건에서

$$\sum_{k=1}^{5}(2a_k-k^2)=15 \Rightarrow 2\times\sum_{k=1}^{5}a_k-\frac{5\times6\times11}{6}=15$$
$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{5}a_k=35$$

이고, $\sum_{k=1}^{10}a_k=70$ 이므로 구하는 값은

$$\sum_{k=6}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{5}a_k=70-35=35$$

이다.

19

정답 40

해설

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

이차방정식 $f(x)=2x+4$ **의 두 실근이** $4-a$, a

임을 알 수 있고, 곧 이차함수 $f(x)$를

$$f(x)=(x-a)(x-4+a)+2x+4 \ (\because \text{ 최고차항의 계수가 } 1)$$
$$=x^2-2x-a^2+4a+4$$

로 놓을 수 있다.

이때, 주어진 조건에서 이차함수 $f(x)$의 최솟값이 -9이므로

$$f(1)=-9 \Rightarrow -a^2+4a+3=-9$$
$$\Rightarrow (a+2)(a-6)=0$$
$$\Rightarrow a=6 \ (\because\ a>2)$$

을 얻는다. 따라서

$$f(x)=(x-6)(x+2)+2x+4$$

이므로 구하는 값은

$$f(8)=20+16+4=40$$

이다.

20

정답 131

해설

세제곱근 중 실수인 것은 유일하므로, 주어진 조건에 의하여

$$k=\left(\frac{2^{15}}{m}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(m\times 2^{15}\right)^{\frac{1}{n}} \cdots ㉠$$
$$\Rightarrow 2^5\times m^{-\frac{1}{3}}=m^{\frac{1}{n}}\times 2^{\frac{15}{n}}$$
$$\Rightarrow m^{\frac{1}{3}+\frac{1}{n}}=2^{5-\frac{15}{n}}$$
$$\Rightarrow m=2^{\frac{15n-45}{n+3}}$$

을 얻는다.

이때, 주어진 조건에서

m이 1000보다 작은 자연수

$$\Rightarrow \frac{15n-45}{n+3}=15-\frac{90}{n+3} \text{ 이 } 0 \textbf{ 이상 } 9 \textbf{ 이하의 정수}$$
$$\Rightarrow \frac{90}{n+3} \text{ 이 } 6 \text{ 이상 } 15 \text{ 이하의 정수} \cdots ㉡$$

이고,

- 주어진 조건에서 n은 10보다 큰 자연수
- ㉡ $\Rightarrow 3\le n\le 12$

이므로 $n=11$ 또는 $n=12$이다. $n=11$이면 ㉡에 모순이므로 $n=12$이다. 따라서

$$m=2^{15-\frac{90}{15}}=2^9 \Rightarrow k=2^2=4 \ (\because\ ㉠)$$

이고, 구하는 값은 $\frac{m+n}{k}=\frac{512+12}{4}=131$ 이다.

21 정답 10

해설

Phase 1 주어진 조건 해석하기

주어진 조건에 의하여 $-1<c<0$인 어떤 실수 c에 대하여

두 점 $(-1, f(-1))$, $(a, f(a))$를 지나는 직선의 기울기 ⋯ (★)

와 $f'(c)$의 값이 같아야 한다.

이때, $-1<x<0$에서 $f'(x)=3x^2-7x$의 값의 범위는

$$f'(0)<f'(x)<f'(-1) \Leftrightarrow 0<f'(x)<10$$

이므로

(★)의 값이 0보다 크고 10보다 작도록 하는 자연수 a

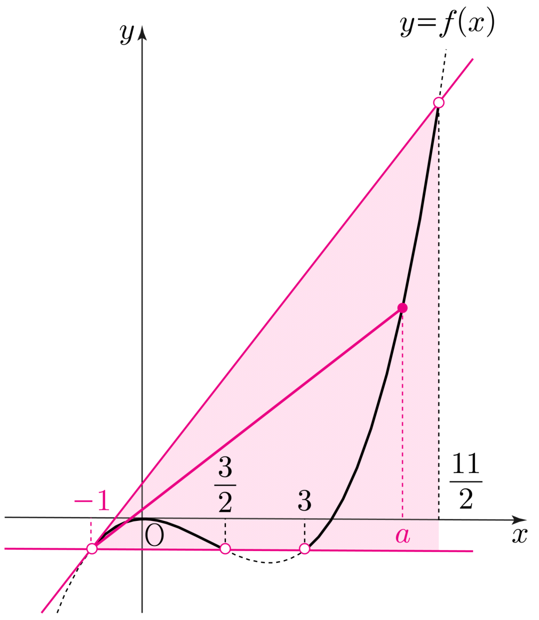
를 구하면 된다.

Phase 2 모든 자연수 a의 값의 합 구하기

점 $(-1, f(-1))$을 지나고

$$\begin{cases} \text{기울기가 } 0\text{인 직선의 방정식은 } y=-\dfrac{9}{2} \\ \text{기울기가 } 10\text{인 직선의 방정식은 } y=10(x+1)-\dfrac{9}{2} \end{cases}$$

이므로 **다음 그림에서 색칠된 영역 위에 점 $(a, f(a))$가 있으면 된다.**



이때, 두 직선과 곡선 $y=f(x)$의 교점의 x좌표를 구해 보면

$$f(x)=-\frac{9}{2} \Rightarrow (x+1)\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-3)=0$$

$$\Rightarrow x=-1,\ \frac{3}{2},\ 3$$

이고,

$$f(x)=10(x+1)-\frac{9}{2} \Rightarrow (x+1)^2\left(x-\frac{11}{2}\right)=0$$

$$\Rightarrow x=-1,\ \frac{11}{2}$$

임을 얻는다.

따라서 (★)의 값이 0보다 크고 10보다 작도록 하는 a의 값의 범위는

$$0<a<\frac{3}{2} \text{ 또는 } 3<a<\frac{11}{2}$$

이고, 모든 자연수 a의 값의 합은 $1+4+5=10$이다.

Remark

Phase 2에서 방정식

$$f(x)=10(x+1)-\frac{9}{2}$$

의 실근을 구할 때에는, **더 편하게 계산**할 수도 있습니다.

우변의 직선이 점 $(-1, f(-1))$에서의 접선임과

근과 계수의 관계를 고려하면,

$$(\text{세 실근의 합})=\frac{7}{2} \Rightarrow (\text{남은 한 실근})+(-1)+(-1)=\frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow (\text{남은 한 실근})=\frac{11}{2}$$

임을 구할 수 있습니다.

22 정답 6

해설

Phase 1 점 P_n의 좌표 구하기

주어진 조건에 의하여 **점 P_n의 좌표를 차례대로 구해 보면**

점 P_1의 좌표는 $(-k, 0)$

$\Rightarrow$ 점 P_2의 좌표는 $(k, 2k)$ ($\because$ 직선 P_1P_2의 기울기는 1)

$\Rightarrow$ 점 P_3의 좌표는 $(-k, -2k)$ ($\because$ 직선 P_2P_3의 기울기는 2)

$\Rightarrow$ 점 P_4의 좌표는 $(k, 4k)$ ($\because$ 직선 P_3P_4의 기울기는 3)

$\Rightarrow$ 점 P_5의 좌표는 $(-k, -4k)$ ($\because$ 직선 P_4P_5의 기울기는 4)

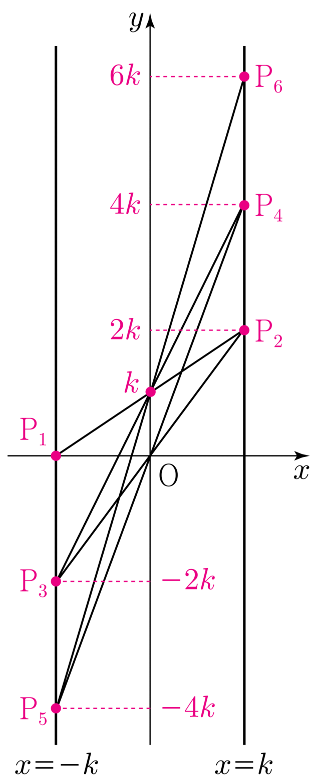
$\Rightarrow$ 점 P_6의 좌표는 $(k, 6k)$ ($\because$ 직선 P_5P_6의 기울기는 5)

⋮

이다. 따라서 다음 그림과 같이 모든 자연수 n에 대하여

$$\begin{cases} \text{점 } P_{2n-1}\text{의 좌표는 } (-k,\ -(2n-2)\times k) \\ \text{점 } P_{2n}\text{의 좌표는 } (k,\ 2n\times k) \end{cases}$$

임을 알 수 있다.



Phase 2 m의 홀짝성 파악하기

이때, 그림을 참고하면 모든 자연수 n에 대하여

$$\left.\begin{array}{l}\text{직선 } \mathrm{P}_{2n-1}\mathrm{P}_{2n} \text{의 } y\text{절편은 } k\text{이고 기울기는 } 2n-1 \\ \text{직선 } \mathrm{P}_{2n}\mathrm{P}_{2n+1} \text{의 } y\text{절편은 } 0\text{이고 기울기는 } 2n\end{array}\right\} \cdots ㉠$$

임을 알 수 있다.

한편, 어떤 자연수 m에 대하여

두 직선 $\mathrm{P}_m\mathrm{P}_{m+1}$, $\mathrm{P}_{m+3}\mathrm{P}_{m+4}$의 교점의 y좌표가 6 ⋯ ㉡

이어야 하는데, ㉠을 고려하면

$$\left\{\begin{array}{l}m\textbf{이 홀수}\text{이면 이 두 직선의 }\textbf{교점의 } y\textbf{좌표가 양수}\text{이고,} \\ m\textbf{이 짝수}\text{이면 이 두 직선의 }\textbf{교점의 } y\textbf{좌표가 음수}\text{임}\end{array}\right.$$

을 알 수 있다. 따라서 ㉡을 만족시키려면 m은 홀수이어야 한다.

Phase 3 k, m의 값 구하기

그러면 $m+1$과 $m+3$은 짝수이므로 ㉠에 의하여

$$\left\{\begin{array}{l}\text{직선 } \mathrm{P}_m\mathrm{P}_{m+1} \text{의 방정식은 } y=mx+k \\ \text{직선 } \mathrm{P}_{m+3}\mathrm{P}_{m+4} \text{의 방정식은 } y=(m+3)x\end{array}\right.$$

이다. 이 두 직선의 방정식을 연립하면

$$mx+k=(m+3)x \;\Rightarrow\; x=\frac{k}{3} \;\Rightarrow\; y=\left(\frac{m}{3}+1\right)k$$

를 얻고, ㉡에 의하여

$$\left(\frac{m}{3}+1\right)k=6 \;\Rightarrow\; (m+3)k=18$$

을 얻는다. 이때, m은 홀수이고 $k>1$이므로

$$k=3,\quad m=3$$

임을 알 수 있고, 곧 구하는 값은 $k+m=6$이다.

선택과목 · 확률과 통계 · 해설

23

정답 ②

해설

$(x^2-2)^6$의 전개식의 일반항은

$${}_6\mathrm{C}_r\times(x^2)^r\times(-2)^{6-r}$$

이므로 x^6의 계수는 $r=3$일 때

$${}_6\mathrm{C}_3\times(-2)^3=-160$$

이다.

24

정답 ①

해설

확률밀도함수의 성질에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2}\times(a+2a)\times2+\frac{1}{2}\times2\times2a=1 \;\Rightarrow\; a=\frac{1}{5}$$

을 얻는다.

25

정답 ⑤

해설

흰 공 5개, 검은 공 3개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{8!}{5!\,3!}=56$이다.

이때, 검은 공이 서로 이웃하지 않게 나열하려면

5개의 흰 공 사이사이와 양 끝에 있는 6개의 공간

중에서 3개를 선택하여 각각 검은 공을 1개씩 나열하면 되므로 이러한 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_3=20$이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{20}{56}=\frac{5}{14}$이다.

26

정답 ②

해설

다섯 명의 학생 A, B, C, D, E가 받는 공책의 개수를
각각 a, b, c, d, e라 하면, 조건 (가)에 의하여 $a=b+8$이므로
다음과 같이 경우를 나누어 보자.

(ⅰ) $a=8$, $b=0$인 경우
$c+d+e=12$이고, 조건 (나)에 의하여 c, d, e는 모두 1 이상이므로
(ⅰ)의 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_{12-3}={}_{11}\mathrm{C}_2=55$이다.

(ⅱ) $a=9$, $b=1$인 경우
$c+d+e=10$이고, 조건 (나)에 의하여 c, d, e는 모두 2 이상이므로
(ⅱ)의 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_{10-6}={}_6\mathrm{C}_2=15$이다.

(ⅲ) $a\geq 10$, $b\geq 2$인 경우
$c+d+e\leq 8$인데, 조건 (나)에 의하여 c, d, e는 모두 3 이상이므로
모순이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 경우의 수는 $55+15=70$이다.

27

정답 ①

해설

표본평균 $\overline{X}$는 평균이 m, 표준편차가 $\frac{5}{\sqrt{n}}$인 정규분포를 따르므로
표준정규분포를 따르는 확률변수를 Z라 하면

$$\mathrm{P}(\overline{X}\leq m)=\mathrm{P}(Z\leq 0)=\frac{1}{2} \Rightarrow m=\frac{1}{2}$$

을 얻는다.

한편, 주어진 표준정규분포표에 의하여

$$\mathrm{P}(\overline{X}\geq \sqrt{n})=0.0668=\mathrm{P}(Z\geq 1.5)$$

이므로

$$\frac{\sqrt{n}-\frac{1}{2}}{\frac{5}{\sqrt{n}}}=1.5 \Rightarrow \sqrt{n}-\frac{1}{2}=\frac{15}{2\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow 2(\sqrt{n})^2-\sqrt{n}-15=0$$

$$\Rightarrow \sqrt{n}=3\ (\because\ \sqrt{n}>0)$$

$$\Rightarrow n=9$$

이다. 따라서 구하는 값은 $m\times n=\frac{9}{2}$이다.

28

정답 ④

해설

Phase 1 **주어진 조건 해석하기**

편의상 자연수 $n(1\leq n\leq 8)$에 대하여 'n**이 적힌 의자**'를 n이라고 하자.
서로 이웃하는 두 수가

(홀수, 홀수), $(2, 1)$, $(2, 5)$, $(2, 7)$ $\cdots$ (★)

인 경우를 제외하면, 그 곱은 4의 배수이거나 6의 배수임을 알 수 있다.
따라서 **(★)인 경우가 없도록** 1을 포함하여 6개를 택하고 원형으로
배열하면 된다.

만약 **홀수를 4개 이상 택하면**
원형으로 배열할 때 **홀수끼리 적어도 한 번 이웃**하게 되므로
홀수는 3개 또는 2개만 선택해야 한다.

Phase 2 **홀수를 3개만 선택하는 경우의 수 구하기**

(ⅰ) 홀수를 **3개만 선택**하는 경우
짝수도 3개 선택해야 하며, (★)인 경우가 없도록
짝수부터 먼저 배열한 뒤, 홀수를 그 사이사이에 하나씩 배열하여 보자.

이때, 만약 2를 선택하면, **홀수를 무엇을 선택하는지에 관계없이**
2는 1, 5, 7 중에서 적어도 하나와는 이웃하게 되므로
(★)인 경우가 있게 된다.

따라서 3개의 짝수로는 4, 6, 8을 선택해야 하고,
3개의 홀수로는 1 외에 다른 2개만 선택하면 된다. $(\times{}_3\mathrm{C}_2)$

그러면 위에서 서술했듯, 짝수부터 먼저 배열하고 $(\times(3-1)!)$
홀수를 그 사이사이에 하나씩 배열하면 된다. $(\times 3!)$

따라서 (ⅰ)의 경우의 수는 $3\times 2\times 6=36$이다.

Phase 3 **홀수를 2개만 선택하는 경우의 수 구하기**

(ⅱ) 홀수를 **2개만 선택**하는 경우
짝수는 4개를 모두 선택해야 하며, (★)인 경우가 없도록
짝수부터 먼저 배열한 뒤, 홀수를 그 사이사이에 하나씩 배열하여 보자.

2개의 홀수로는 1 외에 다른 1개만 선택하면 되는데,
어떤 홀수를 선택하느냐에 따라 경우를 나누어 보자.

① 1 외에 3을 선택한 경우
위에서 서술했듯, 짝수부터 먼저 배열하고 $(\times(4-1)!)$
1이 2와 이웃하지 않도록 배열한 다음 $(\times 2)$
3을 배열하면 된다. $(\times 3)$

② 1 외에 5 또는 7을 선택한 경우
위에서 서술했듯, 짝수부터 먼저 배열하고 $(\times(4-1)!)$
두 홀수를 2와 이웃하지 않도록 배열하면 된다. $(\times 2!)$

따라서 (ⅱ)의 경우의 수는 $6\times 2\times 3+2\times(6\times 2)=60$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는 $36+60=96$이다.

29

정답 128

해설

Phase 1 상수 a의 값 구하기

확률변수 X의 확률분포를

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	p_1	p_2	p_3	p_4	1

이라 하면, 주어진 조건에 의하여 확률변수 Y의 확률분포는 다음과 같다.

Y	1	3	5	7	2	4	6	8	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	$\frac{2}{3}p_4$	$\frac{2}{3}p_3$	$\frac{2}{3}p_2$	$\frac{2}{3}p_1$	$a\times p_1$	$a\times p_2$	$a\times p_3$	$a\times p_4$	1

이때, 확률변수 Y의 확률의 총합이 1이어야 하므로

$$\frac{2}{3}\times(p_4+p_3+p_2+p_1)+a\times(p_1+p_2+p_3+p_4)=1$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}+a=1 \ (\because \text{ 확률변수 } X\text{의 확률의 총합은 } 1)$$

$$\Rightarrow a=\frac{1}{3}$$

을 얻는다.

Phase 2 확률변수 Y의 평균 구하기

따라서 확률변수 Y의 평균은

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y)&=\frac{2}{3}\times(7p_1+5p_2+3p_3+p_4)+\frac{1}{3}\times(2p_1+4p_2+6p_3+8p_4)\\&=\frac{2}{3}\times\mathrm{E}(9-2X)+\frac{1}{3}\times\mathrm{E}(2X)\\&=\frac{2}{3}\times\{9-2\mathrm{E}(X)\}+\frac{1}{3}\times2\mathrm{E}(X)\\&=-\frac{2}{3}\mathrm{E}(X)+6\\&=\frac{64}{15}\ \left(\because\ \mathrm{E}(X)=\frac{13}{5}\right)\end{aligned}$$

임을 알 수 있으므로 구하는 값은

$$\mathrm{E}(30Y)=30\times\mathrm{E}(Y)=128$$

이다.

30

정답 25

해설

Phase 1 주어진 시행 파악하기

주어진 시행에서 나온 눈의 수가

$$\begin{cases}1\text{ 또는 }5\text{인 경우 : }1\text{번째 자리}\\2\text{ 또는 }4\text{인 경우 : }1,\ 2\text{번째 자리}\\3\text{인 경우 : }1,\ 3\text{번째 자리}\\6\text{인 경우 : }1,\ 2,\ 3\text{번째 자리}\end{cases}$$

에 놓인 카드를 뒤집는다. **즉, 1번째 자리에 놓인 카드는 항상 뒤집는다.**

3번째 시행 후 모든 카드가 뒷면이 보이도록 놓여 있는 사건을 A, 2번째 시행 후 모든 카드가 앞면이 보이도록 놓여 있는 사건을 B라 하면, 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

이다.

Phase 2 $\mathrm{P}(A)$의 값 구하기

(i) $\mathrm{P}(A)$의 값

처음에 모든 카드가 앞면이 보이도록 놓여 있으므로 사건 A가 일어나려면 **3번의 시행 동안 각각의 카드를 홀수 번 뒤집어야 한다.** ⋯ ㉠

그러면 3번의 시행 중에서 **모든 카드를 뒤집을 수 있는 6의 눈이 나온 횟수**에 따라 경우를 나누어 생각하여 보자.

① 6의 눈이 3번 나온 경우

㉠을 만족시키며, 이러한 확률은 $\frac{1}{6^3}$이다.

② 6의 눈이 2번 나온 경우

남은 1번의 시행에서 모든 카드를 뒤집을 수 없으므로 ㉠을 만족시키지 못한다.

③ 6의 눈이 1번 나온 경우

㉠을 만족시키려면 **남은 2번의 시행 동안 각각의 카드를 뒤집지 않거나 짝수 번 뒤집어야 하므로,** 주사위의 눈의 수가

$$\begin{cases}\bullet\ 1\text{ 또는 }5\text{가 두 번 나오는 경우 : }\frac{3!}{2!}\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{2}{6}\right)^2\\\bullet\ 2\text{ 또는 }4\text{가 두 번 나오는 경우 : }\frac{3!}{2!}\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{2}{6}\right)^2\\\bullet\ 3\text{이 두 번 나오는 경우 : }\frac{3!}{2!}\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\end{cases}$$

만 가능하며, 확률은 각각 위와 같다.

④ 6의 눈이 0번 나온 경우

㉠을 만족시키려면 주사위의 눈의 수가

1 또는 5가 한 번, 2 또는 4가 한 번, 3이 한 번

나오는 경우밖에 없다. 이러한 확률은 $3!\times\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{6}$이다.

이상에서

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{216}+\frac{12+12+3}{216}+\frac{24}{216}=\frac{52}{216}$$

이다.

Phase 3 $\mathrm{P}(A\cap B)$**의 값 구하기**

(ii) $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값

사건 $A\cap B$가 일어나려면

3번째 시행에서 나온 눈의 수가 6 ⋯ ㉡

이어야 한다. 이때, (i)에서

$$\begin{cases}\text{①의 경우 항상 ㉡을 만족시킴}\\ \text{②, ④의 경우 ㉡을 만족시킬 수 없음}\end{cases}$$

을 알 수 있고, ③의 경우 ㉡을 만족시킬 확률은

$$\frac{1}{6}\times\left(\frac{2}{6}\right)^2+\frac{1}{6}\times\left(\frac{2}{6}\right)^2+\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{9}{216}$$

이다. 따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{216}+\frac{9}{216}=\frac{10}{216}$ 이다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 확률은 $p=\frac{10}{52}=\frac{5}{26}$ 이므로

구하는 값은 $130p=25$ 이다.

선택과목 · 미적분 · 해설

23 정답 ②

해설

$$\lim_{x\to0}\frac{4^x-2^x}{x^2+2x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{2^x-1}{x}\times\frac{2^x}{x+2}\right)$$
$$=\ln2\times\frac{1}{0+2}=\frac{\ln2}{2}$$

24 정답 ①

해설

$$\frac{dx}{dt}=\frac{4t^3}{t^4+1},\quad \frac{dy}{dt}=-\frac{1}{2}e^{1-t}$$

이므로 $t=1$일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{4}{2}}=-\frac{1}{4}$$

이다.

25 정답 ⑤

해설

$0<t<2$인 실수 t에 대하여

$$f'(t)=\pi\sec^2\frac{\pi t}{4}\ \Rightarrow\ f(t)=4\tan\frac{\pi t}{4}+C\ (C\text{는 상수})$$

이다.

이때, 주어진 조건에서

$$f(1)=4+C=4-2\sqrt{3}\ \Rightarrow\ C=-2\sqrt{3}$$

이므로 구하는 값은

$$f\left(\frac{4}{3}\right)=4\sqrt{3}-2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

이다.

26

정답 ②

해설

주어진 식의 좌변은

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_k a_{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}$$

이므로

$$\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}=\sqrt{n^2+16n}-\sqrt{n^2+6n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_1}-\left(\sqrt{n^2+16n}-\sqrt{n^2+6n}\right)\ \cdots\ (\bigstar)$$

이다.

한편, 주어진 조건에서

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{a_3}{6}\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\frac{a_3}{6}$$

$$\Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{6}{a_3}\quad (\because\ \text{모든 항이 } 0\text{이 아님})$$

이고, (★)에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{a_1}-\left(\sqrt{n^2+16n}-\sqrt{n^2+6n}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{10n}{\sqrt{n^2+16n}+\sqrt{n^2+6n}}\right)$$

$$=\frac{1}{a_1}-5$$

이며, (★)의 양변에 $n=2$를 대입하면

$$\frac{1}{a_3}=\frac{1}{a_1}-(6-4)=\frac{1}{a_1}-2$$

이므로

$$\frac{1}{a_1}-5=6\times\left(\frac{1}{a_1}-2\right)\ \Rightarrow\ \frac{5}{a_1}=7\ \Rightarrow\ a_1=\frac{5}{7}$$

를 얻는다.

27

정답 ②

해설

함수 $f(x)$를 $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x}}e^{\frac{1}{x^2}}$이라 하면

$$\left\{\begin{array}{l}\bullet\ \text{함수 } f(x)\text{는 감소함수}\\ \bullet\ f(1)=e\end{array}\right.$$

이므로 $1\le x\le 2$에서 $f(x)<k$임을 알 수 있다.

이때, 문제에 주어진 입체도형의 단면은 **직사각형**이고

$$\left\{\begin{array}{l}\bullet\ \text{둘레의 길이가 } 4k\\ \bullet\ \text{밑변의 길이가 } k-f(x)\end{array}\right.$$

이므로 높이는 $k+f(x)$이다.

따라서 주어진 입체도형의 부피는

$$\int_1^2\{k-f(x)\}\{k+f(x)\}\,dx=\int_1^2\left(k^2-\frac{1}{x^3}e^{\frac{2}{x^2}}\right)dx$$

$$=\left[k^2x+\frac{1}{4}e^{\frac{2}{x^2}}\right]_1^2$$

$$=k^2+\frac{\sqrt{e}}{4}-\frac{e^2}{4}$$

이고, 이 값이 $2e^2+\dfrac{\sqrt{e}}{4}$이므로

$$k^2=\frac{9}{4}e^2\ \Rightarrow\ k=\frac{3}{2}e\ \ (\because\ k>e)$$

를 얻는다.

28

정답 ④

해설

Phase 1 **주어진 조건 해석하기**

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 1을 가지므로
방정식 $f(x)=t$의 실근의 최솟값을 $\alpha(t)$, 최댓값을 $\beta(t)$라 하면

$$g(t)=\beta(t)-\alpha(t)$$

이다. 또한, 두 함수 $p(x)$, $q(x)$를

$$p(x)=f(x)\ \ (0<x\le 2)$$
$$q(x)=f(x)\ \ (x\ge 2)$$

라 하면 양수 $t\,(t\le 1)$에 대하여

$$\left.\begin{array}{l}\text{두 함수 } p(x),\ \alpha(t)\text{는 \textbf{역함수 관계}에 있고,}\\ \text{두 함수 } q(x),\ \beta(t)\text{는 \textbf{역함수 관계}에 있음}\end{array}\right\}\ \cdots\ ㉠$$

을 알 수 있다.

따라서 **치환적분법**과 **부분적분법**에 의하여

$$\int_k^1 g(t)\,dt=\int_k^1\beta(t)\,dt-\int_k^1\alpha(t)\,dt$$

$$=\int_{\beta(k)}^2\beta(q(s))q'(s)\,ds-\int_{\alpha(k)}^2\alpha(p(s))p'(s)\,ds$$

$$=\int_{\beta(k)}^2 s\,q'(s)\,ds-\int_{\alpha(k)}^2 s\,p'(s)\,ds$$

$$=\Big[s\,q(s)\Big]_{\beta(k)}^2-\int_{\beta(k)}^2 q(s)\,ds$$

$$-\Big[s\,p(s)\Big]_{\alpha(k)}^2+\int_{\alpha(k)}^2 p(s)\,ds$$

$$=\int_{\alpha(k)}^{\beta(k)}f(x)\,dx-k\{\beta(k)-\alpha(k)\}$$

$$=\int_{\alpha(k)}^{\beta(k)}f(x)\,dx-k\,g(k)$$

를 얻고, 주어진 조건에 의하여

$$\int_{\alpha(k)}^{\beta(k)}f(x)\,dx=4\ln 2\ \cdots\ ㉡$$

를 얻는다.

Phase 2 **방정식 $f(x)=k$의 두 실근 구하기**

한편, $\alpha(k)$와 $\beta(k)$는 x에 대한 방정식

$$\frac{4x}{x^2+4}=k \Leftrightarrow kx^2-4x+4k=0$$

의 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha(k)\beta(k)=4 \Rightarrow \beta(k)=\frac{4}{\alpha(k)}$$

이다. 따라서

$$\int_{\alpha(k)}^{\beta(k)} f(x)\,dx=\left[2\ln(x^2+4)\right]_{\alpha(k)}^{\frac{4}{\alpha(k)}}$$

이므로 ㉡에 의하여

$$\frac{\frac{16}{\{\alpha(k)\}^2}+4}{\{\alpha(k)\}^2+4}=4 \Rightarrow \alpha(k)=1 \ (\because\ 0<\alpha(k)<2)$$

$$\Rightarrow \beta(k)=\frac{4}{\alpha(k)}=4$$

$$\Rightarrow k=f(1)=f(4)=\frac{4}{5}$$

를 얻는다.

Phase 3 **$k\times g'(k)$의 값 구하기**

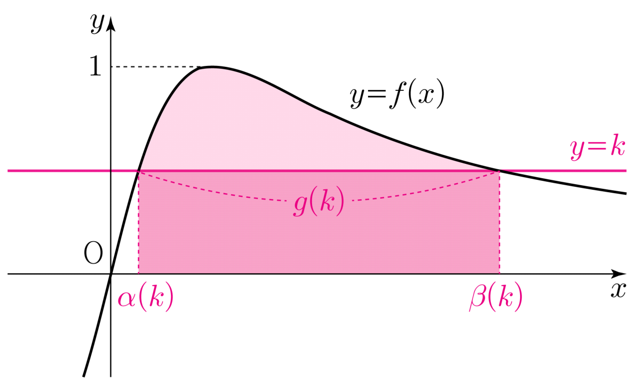
그러면 ㉠에 의하여

$$\begin{aligned} g'(k)&=\beta'(k)-\alpha'(k)\\ &=\frac{1}{q'(\beta(k))}-\frac{1}{p'(\alpha(k))} \ (\because\ \text{역함수의 미분법})\\ &=\frac{1}{f'(4)}-\frac{1}{f'(1)}\\ &=-\frac{25}{3}-\frac{25}{12} \ \left(\because\ f'(x)=\frac{4(4-x^2)}{(x^2+4)^2}\right)\\ &=-\frac{125}{12}\end{aligned}$$

를 얻으므로 구하는 값은 $k\times g'(k)=-\frac{25}{3}$이다.

★☀

Phase 1에서 **그래프를 관찰**하여 ㉡을 얻을 수도 있습니다.



위 그림에서

$$\begin{cases} \text{연하게 색칠된 부분의 넓이가 } \int_k^1 g(t)\,dt \\ \text{진하게 색칠된 부분의 넓이가 } kg(k) \end{cases}$$

임을 알 수 있으므로 주어진 조건에 의하여 ㉡을 얻는다.

29

정답 3

해설

Phase 1 **두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대한 조건 해석하기**

등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 **공비의 곱이** $\frac{1}{4}$이므로 각각 r, $\frac{1}{4r}$이라 하자.

$a_1=1$이고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 1**보다 큰 실수로 수렴**하므로

$$-1<r<1,\ \frac{1}{1-r}>1 \Rightarrow 0<r<1$$

을 얻고, 마찬가지의 방법으로 $0<\frac{1}{4r}<1$을 얻을 수 있다. 따라서

$$0<r<1,\ 0<\frac{1}{4r}<1 \Rightarrow \frac{1}{4}<r<1 \ \cdots ㉠$$

을 얻는다.

한편, $a_1=b_1=1$이므로

$$\begin{cases} \text{등비수열 } \{a_nb_{2n}\}\text{은 첫째항이 } b_2=\frac{1}{4r},\ \text{공비가 } \frac{1}{16r} \\ \text{등비수열 } \{a_{2n}b_n\}\text{은 첫째항이 } a_2=r,\ \text{공비가 } \frac{r}{4} \end{cases}$$

이다. 따라서

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} a_nb_{2n}=\frac{\frac{1}{4r}}{1-\frac{1}{16r}}=\frac{4}{16r-1} \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}b_n=\frac{r}{1-\frac{r}{4}}=\frac{4r}{4-r} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_nb_{2n}\times\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}b_n=\frac{16r}{(16r-1)(4-r)}$$

이다.

Phase 2 **자연수 m의 값 구하기**

이때, 주어진 조건에 의하여

$$\frac{(16r-1)(4-r)}{16r}=\left(1-\frac{1}{16r}\right)(4-r)=\frac{65}{16}-\left(r+\frac{1}{4r}\right)$$

의 값이 자연수 m이 되어야 한다. ㉠에 의하여

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\le r+\frac{1}{4r}<1+\frac{1}{4}$$

임을 알 수 있으므로

$$\frac{45}{16}<m\le\frac{49}{16} \Rightarrow m=3$$

이다.

Remark

Phase 2에서 $r+\frac{1}{4r}$의 값의 범위를 파악할 때에는

함수 $y=x+\frac{1}{4x}$을 미분하여 $x=\frac{1}{2}$에서 최소가 된다는 것

을 발견하는 방법이 가장 엄밀합니다. 최소가 되는 부분만 본다면 **산술평균과 기하평균의 관계**를 이용해도 됩니다.

30

정답 260

해설

Phase 1 a_n **파악하기**

주어진 함수 $g(x)$를 미분하면

$$g'(x)=\frac{f'(x)\cos f(x)\{k-\cos f(x)\}-f'(x)\sin^2 f(x)}{\{k-\cos f(x)\}^2}$$
$$=\frac{f'(x)\{k\cos f(x)-1\}}{\{k-\cos f(x)\}^2}\quad(\because\ \sin^2 f(x)+\cos^2 f(x)=1)$$

이다. 이때,

$f(x)$는 최고차항의 계수가 **양수인 일차함수** ⋯ ㉠

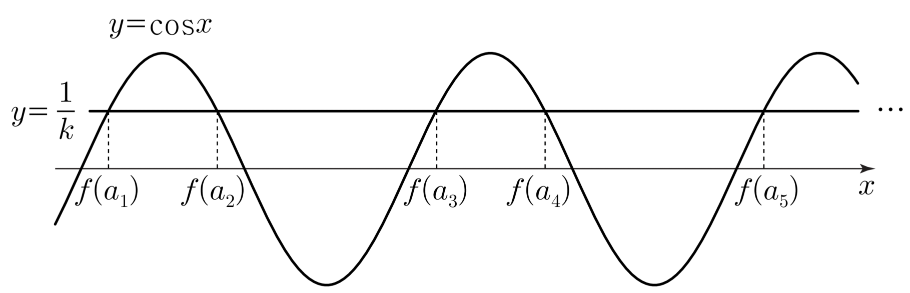
이므로 $g'(x)$**의 부호 변화는** $k\cos f(x)-1$**의 부호 변화와 같다.** 따라서

방정식 $\cos f(x)=\frac{1}{k}$ 의 **양의 실근**을 나열한 것이 a_n

이고, ㉠에 의하여

$$\begin{cases} \text{① 방정식 } \cos x=\frac{1}{k} \text{ 의 } \boldsymbol{x>f(0)} \textbf{ 인 실근}\text{을 나열한 것이 } f(a_n) \\ \text{② 모든 자연수 } n\text{에 대하여 } f(a_{n+1})-f(a_n)>0 \end{cases}$$

이다.



Phase 2 **함수** $f(x)$ **구하기**

위 그림을 참고하면, 주어진 조건

$$\{f(a_{n+1})-f(a_n)\,|\,n\text{은 자연수}\}=\{f(0),\,2f(0)\}$$

과 $y=\cos x$의 **주기성**에 의하여

$$f(0)+2f(0)=2\pi\ \Rightarrow\ f(0)=\frac{2}{3}\pi$$

임을 알 수 있고, $y=\cos x$의 **대칭성**에 의하여

$$\frac{1}{k}=\cos\frac{f(0)}{2}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ k=2$$

임을 알 수 있다.

따라서 함수 $f(x)$를 $f(x)=mx+\frac{2}{3}\pi\,(m>0)$으로 놓으면, ①에 의하여

$$f(a_1)=\frac{5}{3}\pi,\ f(a_2)=\frac{7}{3}\pi,\ \cdots,\ f(a_5)=\frac{17}{3}\pi$$

이고, 주어진 조건에서 $a_5-a_2=2$이므로

$$m=\frac{f(a_5)-f(a_2)}{a_5-a_2}=\frac{5}{3}\pi$$

이다. 따라서

$$f(a_1)=\frac{5}{3}\pi\ \Rightarrow\ ma_1+\frac{2}{3}\pi=\frac{5}{3}\pi\ \Rightarrow\ a_1=\frac{\pi}{m}=\frac{3}{5}$$

이므로 구하는 값은 $100\times(k+a_1)=260$이다.

선택과목 · 기하 · 해설

23

정답 ⑤

해설

두 점 $\mathrm{A}(1,\,a,\,4)$, $\mathrm{B}(4,\,2,\,10)$에 대하여

선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표가 $(2,\,0,\,b)$이므로

$$\begin{cases} \frac{2a+2}{3}=0\ \Rightarrow\ a=-1 \\ \frac{2\times4+10}{3}=b\ \Rightarrow\ b=6 \end{cases}$$

이다. 따라서 구하는 값은 $a+b=5$이다.

24

정답 ③

해설

포물선

$$y^2=8x+16=8(x+2)$$

는 직선 $x=-4$를 준선으로 하고 원점을 초점으로 한다.

이때, 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{\mathrm{OP}}=(\text{점 P의 }x\text{좌표})+4$$
$$\Rightarrow(\text{점 P의 }x\text{좌표})=4\ (\because\ \overline{\mathrm{OP}}=8)$$

를 얻고, 이를 포물선의 방정식에 대입하면

점 P의 y좌표는 $4\sqrt{3}$임을 얻는다.

25

정답 ②

해설

주어진 조건에서

$$\begin{cases} \text{①}\ |\vec{a}+\vec{b}|=2\ \Rightarrow\ |\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4 \\ \text{②}\ |\vec{a}-2\vec{b}|=3\ \Rightarrow\ |\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=9 \end{cases}$$

이므로 ① − ②를 하면

$$6\vec{a}\cdot\vec{b}-3|\vec{b}|^2=-5\ \Rightarrow\ |\vec{b}|^2=2\ (\because\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{6})$$

를 얻고, 이를 다시 ①에 대입하면 $|\vec{a}|^2=\frac{5}{3}$를 얻는다.

따라서 구하는 값은 $|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2=\frac{1}{3}$이다.

26

정답 ④

해설

주어진 타원 위에 점 $(\sqrt{3}, 1)$이 있으므로

$$\frac{3}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1 \ \cdots \ ㉠$$

을 얻는다. 또한, 주어진 타원 위의 점 $(\sqrt{3}, 1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{\sqrt{3}}{a^2}x+\frac{1}{b^2}y=1$$

인데, 이 직선이 점 $(2\sqrt{3}, 0)$을 지나므로

$$\frac{6}{a^2}+0=1 \Rightarrow a^2=6 \Rightarrow b^2=2 \ (\because ㉠)$$

를 얻는다.

따라서 주어진 타원의 두 초점 사이의 거리는

$$2\times\sqrt{a^2-b^2}=4$$

이다.

27

정답 ②

해설

구 $S:(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=9$의 방정식에

$$\begin{cases} y=0\text{을 대입하면 } C_1:(x-1)^2+z^2=5 \\ x=0\text{을 대입하면 } C_2:(y-2)^2+z^2=8 \end{cases}$$

을 얻으므로 두 원 C_1, C_2의 넓이는 각각 5π, 8π이다.

이때, 평면 α는 xy평면에 수직이므로

평면 α가 zx평면과 이루는 예각의 크기를 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

라 하면

평면 α가 yz평면과 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{2}-\theta$

이다.

따라서 주어진 조건에 의하여

$$5\pi\times\cos\theta=8\pi\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \Rightarrow 5\pi\times\cos\theta=8\pi\times\sin\theta$$

$$\Rightarrow \tan\theta=\frac{5}{8}$$

이므로

평면 α가 xy평면과 만나서 생기는 직선의 기울기는 $\pm\frac{5}{8}$

이다. 이 직선이 점 $(1, 1, 0)$을 지나므로 방정식은

$$y=\frac{5}{8}(x-1)+1 \ \text{ 또는 } \ y=-\frac{5}{8}(x-1)+1$$

인데, x절편이 양수이어야 하므로 후자의 경우이며, y절편은 $\frac{13}{8}$이다.

28

정답 ④

해설

Phase 1 두 점 P, Q가 나타내는 도형 파악하기

삼각형 ABC의 내접원의 중심을 $\mathrm{O_1}$, 반지름의 길이를 r이라 하자. 이때

$$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}=10,\ \overline{\mathrm{BC}}=12$$
$$\Rightarrow (\text{점 A와 선분 BC 사이의 거리})=8$$
$$\Rightarrow (\text{삼각형 ABC의 넓이})=48$$

이므로

$$\frac{1}{2}\times(\text{삼각형 ABC의 둘레의 길이})\times r=48 \Rightarrow r=3$$

을 얻는다. 또한, 삼각형 ABC의 내접원 위의 두 점 P, Q에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}=4\sqrt{2}$이므로

$$(\text{점 } \mathrm{O_1}\text{과 선분 PQ 사이의 거리})=\sqrt{3^2-(2\sqrt{2})^2}=1$$

이다. 따라서 선분 PQ의 중점을 M이라 하면, **점 M이 나타내는 도형은**

중심이 $\mathrm{O_1}$이고 반지름의 길이가 1인 원

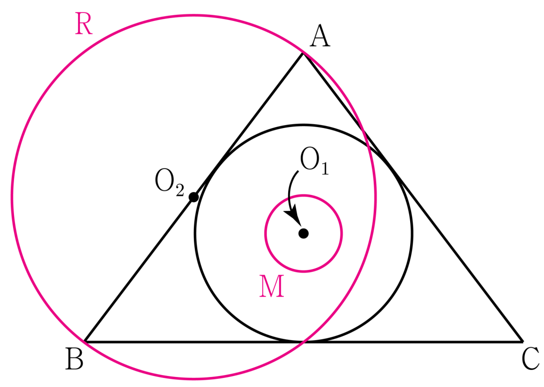
이다.

Phase 2 점 R이 나타내는 도형 파악하기

한편, 선분 AB의 중점을 $\mathrm{O_2}$라 하면, $\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BR}}=0$이므로
점 R이 나타내는 도형은

중심이 $\mathrm{O_2}$이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{AO_2}}=5$인 원

이다.



Phase 3 $\overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}$의 최댓값 구하기

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}&=(\overrightarrow{\mathrm{PM}}+\overrightarrow{\mathrm{MR}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{QM}}+\overrightarrow{\mathrm{MR}})\\&=|\overrightarrow{\mathrm{MR}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2 \ (\because \overrightarrow{\mathrm{PM}}=-\overrightarrow{\mathrm{QM}})\\&=|\overrightarrow{\mathrm{MR}}|^2-8 \ (\because \overline{\mathrm{PM}}=2\sqrt{2})\end{aligned}$$

이고, **$|\overrightarrow{\mathrm{MR}}|$의 최댓값은** $\overline{\mathrm{O_1O_2}}+5+1$이다.

이때, 삼각형 $\mathrm{O_1O_2A}$에서 **코사인법칙**에 의하여

$$\overline{\mathrm{AO_1}}=\overline{\mathrm{AO_2}}=5,\ \cos(\angle\mathrm{O_1AO_2})=\frac{4}{5} \Rightarrow \overline{\mathrm{O_1O_2}}=\sqrt{10}$$

을 얻는다. 이상에서 $\overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}$의 최댓값은

$$(6+\sqrt{10})^2-8=38+12\sqrt{10}$$

이다.

29 정답 4

해설

Phase 1 넓이 조건 이용하기

세 삼각형 ORF′, PQR, QRF′의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 하면

$$\begin{cases} ① \text{ 두 삼각형 ORF}',\ \text{QRP는 닮음이고, } \textbf{닮음비는 } \overline{\text{OR}} : \overline{\text{QR}} \\ ② \text{ 두 삼각형 ORF}',\ \text{QRF}'\text{의 } \textbf{넓이비는 } \overline{\text{OR}} : \overline{\text{QR}} \end{cases}$$

이므로 $\overline{\text{OR}} : \overline{\text{QR}} = s : t$라 하면

$$\begin{cases} ① \Rightarrow S_1 : S_2 = s^2 : t^2 \\ ② \Rightarrow S_1 : S_3 = s : t \end{cases}$$

이다. 이때, 주어진 조건에 의하여

$$\begin{aligned} S_2 + S_3 = \frac{15}{4} \times S_1 &\Rightarrow t^2 + st = \frac{15}{4}s^2 \\ &\Rightarrow (2t-3s)(2t+5s) = 0 \\ &\Rightarrow t = \frac{3}{2}s \ (\because\ s,\ t\text{는 양수}) \end{aligned}$$

를 얻는다. 그러면

$$\begin{cases} \bullet\ ①\text{에 의하여 두 삼각형 ORF}',\ \text{QRP의 닮음비는 } 2:3 \\ \bullet\ \overline{\text{OF}'} = 2 \end{cases}$$

이므로 **점 P의 x좌표는** 3이다.

Phase 2 쌍곡선의 주축의 길이 구하기

한편, 점 F(2, 0)을 초점으로 하고 y축을 준선으로 하는 포물선의 방정식은

$$y^2 = 4(x-1)$$

이므로 점 P의 좌표는 $(3,\ 2\sqrt{2})$이다.

따라서 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} (C\text{의 주축의 길이}) &= \overline{\text{PF}'} - \overline{\text{PF}} \\ &= \sqrt{5^2 + (2\sqrt{2})^2} - \sqrt{1^2 + (2\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{33} - 3 \end{aligned}$$

이므로 $p = -3$, $q = 1$이고, 구하는 값은 $q - p = 4$이다.

30 정답 162

해설

Phase 1 주어진 도형을 이루는 각과 길이 파악하기

점 B에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H_0이라 하면

직선 AB가 두 평면 α, β와 이루는 각의 크기가 각각 $\frac{\pi}{6}$이므로

$$\begin{cases} ①\ \overline{\text{AC}} = \overline{\text{AB}} \times \sin\frac{\pi}{6} = 3,\ \overline{\text{BC}} = \overline{\text{AB}} \times \cos\frac{\pi}{6} = 3\sqrt{3} \\ ②\ \overline{\text{BH}_0} = \overline{\text{AB}} \times \sin\frac{\pi}{6} = 3 \end{cases}$$

이다.

한편,

두 평면 α, β가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ … ㉠

이므로 두 평면 α, β의 교선을 l이라 하면, 삼수선의 정리에 의하여

$$l \perp \overline{\text{BD}},\ \alpha \perp \overline{\text{BH}_0} \Rightarrow l \perp \overline{\text{H}_0\text{D}} \Rightarrow \angle\text{BDH}_0 = \frac{\pi}{4}$$

이다. 따라서 ②에 의하여

$$\overline{\text{BD}} = 3 \times \frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}} = 3\sqrt{2} \quad \cdots\ ㉡$$

를 얻는다.

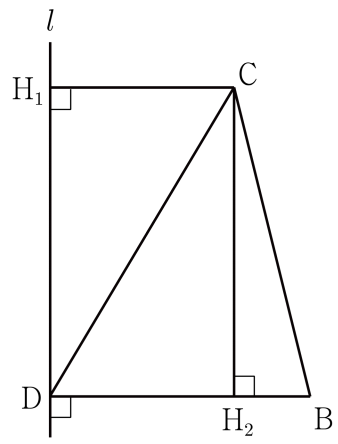
또한, 점 A에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H_1이라 하면 ㉠과 삼수선의 정리에 의하여

$$l \perp \overline{\text{AH}_1},\ \beta \perp \overline{\text{AC}} \Rightarrow l \perp \overline{\text{CH}_1} \Rightarrow \angle\text{AH}_1\text{C} = \frac{\pi}{4}$$

이다. 따라서 ①에 의하여

$$\overline{\text{CH}_1} = 3 \times \frac{1}{\tan\frac{\pi}{4}} = 3$$

을 얻는다.



따라서 점 C에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 H_2라 하면

$$\overline{\text{BH}_2} = \overline{\text{BD}} - \overline{\text{CH}_1} = 3\sqrt{2} - 3 \ (\because\ ㉡)$$

이므로 직각삼각형 CH_2B에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{\text{CH}_2} &= \sqrt{\overline{\text{BC}}^2 - \overline{\text{BH}_2}^2} \\ &= \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{2} - 3)^2} \ (\because\ ①) \\ &= \sqrt{18\sqrt{2}} \quad \cdots\ ㉢ \end{aligned}$$

를 얻는다.

Phase 2 사면체 ABCD의 부피 구하기

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times \overline{\text{AC}} \times (\text{삼각형 BCD의 넓이}) \\ &= (\text{삼각형 BCD의 넓이}) \ (\because\ ①) \\ &= \frac{1}{2} \times \overline{\text{BD}} \times \overline{\text{CH}_2} \end{aligned}$$

이므로 ㉡, ㉢에 의하여 구하는 값은

$$\sqrt{2} \times V^2 = \sqrt{2} \times \left(\frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \sqrt{18\sqrt{2}}\right)^2 = 162$$

이다.