

제 2 교시

수학 영역

출수형

5지선다형

1. 다항함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^2}{3} = 1$$

을 만족시킨다. $f(1)$ 의 값을 구하시오.

2. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 실수 a 의 개수가 무수히 많을 때, $f(1) = 3$, $f'(x) \leq 0$ 이다. $f(4)$ 의 최댓값을 구하시오.

3. 자연수 n 에 대하여 $3n^2$ 의 n 제곱근 중 양수인 것의 정수부분을 $f(n)$ 이라 할 때, $\sum_{n=2}^{20} f(n)$ 의 값을 구하시오.

4. 첫째항이 모두 자연수이고 공차와 공비가 각각 2인 등차수열 $\{a_n\}$ 과 등비수열 $\{b_n\}$ 이

$$\sum_{n=1}^6 (a_n - b_n) = 0$$

을 만족시킬 때, $a_1 \times b_1$ 의 최솟값을 구하시오.

5. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$ 가

$$\frac{d}{dx}[\int \{f'(x) + g'(x)\}dx] = 6x^2 - 4x + 9.$$

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 24x^3 - 36x^2 + 48x - 36$$

을 만족시킨다. 곡선 $y = f(x)$ 와 곡선 $y = g(x)$ 모두 $x = 1$ 에서만 x 축과 만날 때, $|f(2) - g(2)|$ 의 값을 구하시오.

6. 극댓값 2, 극솟값 -2 를 갖는 삼차함수 $f(x)$ 가

$$\{x | f'(x) > 0\} = \{x | 0 < x < 2\}$$

를 만족시킬 때, $f(-3)$ 의 값을 구하시오.

7. 세 실수 a, b, c 에 대하여 함수

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)(x-b) + cx & (a \leq x \leq b) \\ 2x-5 & (x < a, x > b) \end{cases}$$

가 $\lim_{x \rightarrow a^+} \{f(x) + 4x\} = \lim_{x \rightarrow b} \{f(x)\} = 5$ 를 만족시킬 때,
 $a+b+c$ 의 값을 구하시오.

8. $\angle A < \frac{\pi}{2}$ 인 삼각형 ABC 에 대하여 그 넓이를 S_1 , 외접원의
 넓이를 S_2 라 할 때,

$$\sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad S_1 = \frac{9\sqrt{2}}{2}, \quad S_2 = 18\pi$$

이다. 삼각형 ABC 의 둘레의 길이를 구하시오.

함수형

9. 실수 a 에 대하여 최고차항의 계수가 각각 $-1, 2$ 인 이차함수 $f(x)$ 와 일차함수 $g(x)$ 가

$$f(-1) = f(-a^2 + 6a - 5) = g(-a^2 + 6a - 5) = 0$$

을 만족시킨다. 이때, y 축과 곡선 $y = f(x)$ 및 곡선 $y = g(x)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이의 최댓값을 S , 넓이가 최대가 되도록 하는 a 의 값을 k 라 할 때, $S \times k$ 의 값을 구하시오. (단, $1 < a < 5$ 이다.) [4점]

10. 두 정수 a, b 에 대하여 함수

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}ax^2 - 6a^2x + b$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

방정식 $f(x) = 0$ 의 실근의 개수가 3이다.

$f'(2) \geq 0$ 일 때, 모든 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(4)$ 의 최솟값을 m , 최댓값을 M 이라 할 때, $M+m$ 의 값을 구하시오.

11. $a_1 = 1$ 인 수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_n = \begin{cases} 2^{a_n} & (a_n \leq n) \\ \log_2 a_n & (a_n > n) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $\log_2 a_{2025} + a_{2026}$ 의 값을 구하시오.

단답형

12. 실수 a 에 대하여 함수

$$f(x) = \log_2(x - a)$$

의 점근선이 직선 $x = 4$ 일 때, $f(5a)$ 의 값을 구하시오.

13. 점 $(0,3)$ 에서 곡선 $y = -x^3 + 3x^2 + 4$ ($x > 0$)에 그은 접선의 기울기를 구하시오.

14. 함수

$$f(x) = 2\sin(ax + b\pi) + 2$$

가 다음 조건을 만족시키도록 하는 자연수 a 와 실수 b 에 대하여 $\frac{a}{b}$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < b < 1$ 이다.)

(가) $f(x) = f(-x)$

(나) 열린구간 $(0, 6\pi)$ 에서 방정식 $f(x) = 0$ 의 실근의 개수가 12이다.

15. $t < a$ 를 만족시키는 두 실수 a, t 에 대하여 함수

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 9x & (x \leq a) \\ 4x^2 - 15x & (x > a) \end{cases}$$

가 열린구간 $(t, t+3)$ 에서 연속이 되도록 하는 a 의 최솟값을 $g(t)$ 라 하자. 이때, 실수 k 에 대하여 $g(t)$ 가 $t = k$ 에서 불연속이 되도록 하는 모든 k 의 값의 합을 구하시오.

16. 실수 a 에 대하여 시각 $t = 0$ 일 때 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q 의 시각 $t (t \geq 0)$ 에서의 속도를 각각 v_1, v_2 라 할 때,

$$v_1 = 2t^2 + (4 - 4a)t + 4a - 6$$

$$v_2 = v_1 \times (t - a^2 + 3a - 3)$$

이다. 점 P 는 운동 방향을 2번, 점 Q 는 운동 방향을 한 번만 바꿀 때, a 의 값을 구하시오.

17. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ \pi \sin^3 \left(\frac{\pi k}{3n} \right) + \pi \sin \left(\frac{\pi k}{3n} \right) \cos^2 \left(\frac{\pi k}{3n} \right) \right\} \right]$ 의 값을 구하시오.

18. 양수 k 에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x), g(x)$ 가

$$f(g(x)) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x + 3}$$

을 만족시킨다. $f(g(k)) = f'(g(k)) = \frac{1}{3}$ 일 때, $k + 3g'(k)$ 의 값을 구하시오.

19. 실수 a 에 대하여 매개변수 t 로 나타내어진 곡선

$$x = at, y = 4e^t + e^{-t} \text{의 } t = \ln 3 \text{에서의 접선의 기울기가 } \frac{35}{12} \text{일}$$

때, $x = 0$ 에서 $x = 12$ 까지의 곡선의 길이는?

- ① $\frac{e^3}{4} + 9 - \frac{1}{e^3}$ ② $\frac{e^3}{2} + 6 - \frac{1}{e^3}$ ③ $e^3 + 3 - \frac{1}{e^3}$
 ④ $2e^3 - \frac{1}{e^3}$ ⑤ $4e^3 - 3 - \frac{1}{e^3}$

20. 두 실수 a, b 에 대하여 직선 $y = 3x$ 와 점 $(0, 0)$ 에서 접하는 함수

$$f(x) = e^{2x} + ae^x + b$$

에 대하여 그 역함수를 $g(x)$ 라 하자. 점 $P(p, f(p))$ 를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 Q 라 할 때, 함수 $f(x)$ 위의 점 P 에서의 접선의 기울기와 함수 $g(x)$ 위의 점 Q 에서의 접선의 기울기가 같다. $f(-p)$ 의 값을 구하시오.

답안

1. 4
2. 3
3. 27
4. 32
5. 11
6. 52
7. 7
8. 18
9. 104
10. 4
11. 32
12. 4
13. 3
14. 8
15. 10
16. 3
17. 3
18. 2
19. ⑤
20. 4