A. 거듭제곱근

A001

○
(2006(11)고2-가형5/나형5)

거듭제곱근의 성질 중 항상 옳은 것을 보기에서 모두 고르면? (단, $a>0$, $a\neq 1$) [3점]

> ㄱ. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}=\sqrt[4]{a}$
>
> ㄴ. $(\sqrt[3]{a})^4=\sqrt[12]{a}$
>
> ㄷ. $\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}=\sqrt[6]{a^5}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A002

○○
(2009(6)고2-가형8)

집합 $X=\{-2,\ -1,\ 1,\ 2\}$에 대하여 두 집합 A, B를

$$A=\{\sqrt{x}\,|\,x\in X,\ \sqrt{x}\text{는 실수}\}$$
$$B=\{\sqrt[3]{x}\,|\,x\in X,\ \sqrt[3]{x}\text{는 실수}\}$$

라 하자. 집합 $A\cup B$의 모든 원소의 곱은? [3점]

① $2^{\frac{1}{2}}$ ② $2^{\frac{2}{3}}$ ③ $2^{\frac{5}{6}}$
④ 2 ⑤ $2^{\frac{7}{6}}$

A003

○○
(2024경찰대(1차)-공통5)

두 실수 a, b가 다음 조건을 만족시킬 때, a^3-2b의 값은? [4점]

> (가) b는 $-\sqrt{8}a$의 제곱근이다.
>
> (나) $\sqrt[3]{a^2}b$는 -16의 세제곱근이다.

① $-2-2\sqrt{2}$ ② -2 ③ $4-2\sqrt{2}$
④ 2 ⑤ $2+2\sqrt{2}$

A004

○○
(2023(7)고3-확률과통계9/미적분9/기하9)

2 이상의 자연수 n에 대하여 x에 대한 방정식

$$(x^n-8)(x^{2n}-8)=0$$

의 모든 실근의 곱이 -4일 때, n의 값은? [4점]

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

A 지수함수와 로그함수

1	③	2	⑤	3	③	4	②	5	⑤
6	4	7	③	8	①	9	③	10	③
11	①	12	⑤	13	④	14	④	15	④
16	①	17	⑤	18	②	19	⑤	20	②
21	17	22	①	23	⑤	24	③	25	②
26	62	27	②	28	②	29	①	30	10
31	④	32	3	33	①	34	②	35	②
36	②	37	②	38	②	39	②	40	⑤
41	①	42	18	43	②	44	①	45	④
46	32	47	15	48	15	49	56	50	⑤
51	64	52	①	53	81	54	16	55	⑤
56	④	57	③	58	②	59	16	60	①
61	①	62	②	63	①	64	③	65	③
66	22	67	④	68	12	69	③	70	④
71	④	72	⑤	73	45	74	46	75	27
76	③	77	18	78	①	79	③	80	③
81	②	82	①	83	⑤	84	②	85	③
86	②	87	③	88	④	89	①	90	35
91	③	92	⑤	93	32	94	①	95	128
96	3	97	③	98	31	99	④	100	②
101	③	102	③	103	25	104	④	105	②
106	③	107	53	108	②	109	⑤	110	④
111	259	112	④	113	144	114	③	115	④
116	③	117	②	118	⑤	119	⑤	120	④
121	②	122	③	123	①	124	④	125	13
126	②	127	③	128	③	129	⑤	130	①
131	6	132	4	133	11	134	②	135	②
136	①	137	②	138	④	139	①	140	③
141	16	142	②	143	④	144	10	145	④
146	5	147	②	148	5	149	16	150	③
151	①	152	④	153	65	154	3	155	128
156	10	157	13	158	17	159	52	160	⑤
161	10	162	①	163	②	164	25	165	19
166	10	167	12	168	17	169	27	170	7
171	16	172	③	173	16	174	②	175	②
176	①	177	②	178	①	179	③	180	②
181	①	182	10	183	④				

A001 | 답 ③

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

거듭제곱근의 성질에 의하여

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\sqrt{a}}}=\sqrt{\frac{a}{\sqrt{a}}}$$

$$=\sqrt{\frac{\sqrt{a}\sqrt{a}}{\sqrt{a}}}=\sqrt{\sqrt{a}}=\sqrt[4]{a}$$

▸ ㄴ. (거짓)

$(\sqrt[3]{a})^4=\sqrt[3]{a^4}\neq\sqrt[12]{a}$

예를 들어 $a=8$일 때,

$(\sqrt[3]{a})^4=16\neq\sqrt[4]{2}=\sqrt[12]{a}$

($\because$ 유리수가 무리수일 수 없다. 이 역도 성립한다.)

▸ ㄷ. (참)

$$\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}=\sqrt[3]{\sqrt{a^4}\sqrt{a}}=\sqrt[3]{\sqrt{a^5}}=\sqrt[6]{a^5}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

A002 | 답 ⑤

[풀이] ★

-2의 제곱근 중에서 실수는 없다.

-1의 제곱근 중에서 실수는 없다.

1의 제곱근 중에서 양의 실수는 1이다.

2의 제곱근 중에서 양의 실수는 $\sqrt{2}$이다.

집합 A는

$A=\{1,\ \sqrt{2}\}$

-2의 세제곱근 중에서 실수는 $-\sqrt[3]{2}$이다.

-1의 세제곱근 중에서 실수는 -1이다.

1의 세제곱근 중에서 실수는 1이다.

2의 세제곱근 중에서 실수는 $\sqrt[3]{2}$이다.

집합 B는

$B=\{-\sqrt[3]{2},\ -1,\ 1,\ \sqrt[3]{2}\}$

집합 $A\cup B$는

$A\cup B$

$=\{-\sqrt[3]{2},\ -1,\ 1,\ \sqrt[3]{2},\ \sqrt{2}\}$

이므로 구하는 값은

$$2^{2\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}=2^{\frac{7}{6}}$$

답 ⑤

A003 | 답 ③

[풀이]

(가): $b^2=-\sqrt{8}a$, 즉 $b^4=8a^2$

(나): $(\sqrt[3]{a^2}b)^3=-16$, 즉 $a^2b^3=-16$

위의 두 등식을 연립하면

$\dfrac{b^4}{8}b^3=-16$, $b^7=-2^7$, $b=-2$, $a=-\sqrt{2}$

$\therefore\ a^3-2b=-2\sqrt{2}+4$

답 ③

A004 | 답 ②

[풀이]

문제에서 주어진 방정식을 풀면

$x^n=8$, $x^{2n}=8$

n이 홀수: $x=8^{\frac{1}{n}}$, $x=\pm 8^{\frac{1}{2n}}$ (○)

모든 실근의 곱은 음수(−)이다.

n이 짝수: $x=\pm 8^{\frac{1}{n}}$, $x=\pm 8^{\frac{1}{2n}}$ (×)

모든 실근의 곱은 양수(+)이다.

모든 실근의 곱은 -4이므로

$8^{\frac{1}{n}}\times 8^{\frac{1}{2n}}\times(-8^{\frac{1}{2n}})$

$=-8^{\frac{2}{n}}=-4$, $\dfrac{6}{n}=2$, $\therefore\ n=3$

답 ②

A005 | 답 ⑤

[풀이]

집합 X의 원소는 b의 a제곱근 중에서 실수인 것이다.

$a=3$일 때, x의 값은

$\sqrt[3]{-9}\,(=-\sqrt[3]{9})$, $\sqrt[3]{-3}\,(=-\sqrt[3]{3})$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{9}$

$a=4$일 때, x의 값은

$\pm\sqrt[4]{3}$, $\pm\sqrt[4]{9}$

▸ ㄱ. (참)

$\sqrt[3]{-9}$는 집합 X의 원소이다.

▸ ㄴ. (참)

집합 X의 원소의 개수는 8이다.

▸ ㄷ. (참)

집합 X의 원소 중 양수인 모든 원소의 곱은

$\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{9}\times\sqrt[4]{3}\times\sqrt[4]{9}$

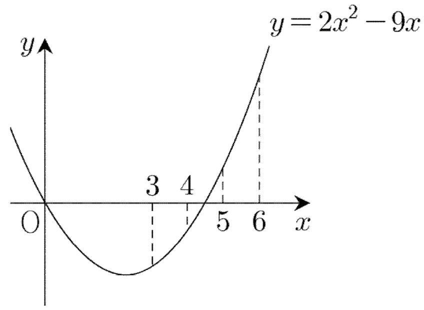
$=3^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{2}{3}}\times 3^{\frac{1}{4}}\times 3^{\frac{2}{4}}=3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{4}}=3^{\frac{7}{4}}=\sqrt[4]{3^7}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

A006 | 답 4

[풀이]



$x=3,\ 4,\ 5,\ 6$일 때,

함수 $y=2x^2-9x$의 부호가 각각 음(−), 음(−), 양(+), 양(+)이므로

$f(3)=1$, (음수의 3제곱근 중 실수인 것의 개수는 1이다.)

$f(4)=0$, (음수의 4제곱근 중 실수인 것의 개수는 0이다.)

$f(5)=1$, (양수의 5제곱근 중 실수인 것의 개수는 1이다.)

$f(6)=2$ (양수의 6제곱근 중 실수인 것의 개수는 2이다.)

$\therefore\ f(3)+f(4)+f(5)+f(6)$

$=1+0+1+2=4$

답 4

A007 | 답 ③

[풀이]

2 이상의 자연수 n에 대하여

$(2n-5)(2n-9)\neq 0$

이제 다음의 두 경우를 생각하자.

- $(2n-5)(2n-9)>0 \Leftrightarrow n<\dfrac{5}{2}$ 또는 $n>\dfrac{9}{2}$

$\Leftrightarrow n=2,\ 5,\ 6,\ \cdots$

이므로

$f(2)=2$, $f(6)=f(8)=2$, $f(5)=f(7)=1$

- $(2n-5)(2n-9)<0 \Leftrightarrow \dfrac{5}{2}<n<\dfrac{9}{2}$

$\Leftrightarrow n=3,\ 4$

이므로

$f(3)=1$, $f(4)=0$

$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=2}^{8}f(n)=2+1+0+1+2+1+2=9$

B061

○○
(2019(3)고3-가형26)

$0 \leq x \leq \pi$일 때, 2 이상의 자연수 n에 대하여 두 곡선 $y=\sin x$와 $y=\sin(nx)$의 교점의 개수를 a_n이라 하자. a_3+a_5의 값을 구하시오. [4점]

B062

○○
(2020(3)고3-나형7)

$0 \leq x < 2\pi$일 때, 두 곡선 $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$와 $y=\sin 4x$가 만나는 점의 개수는? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

B. 삼각함수와 방정식: 실근의 합

주제: 대칭성

B063

○○
◇(2017(9)-가형7)

$0 \leq x < 2\pi$일 때, 방정식

$$2\sin^2 x + 3\cos x = 3$$

의 모든 해의 합은? [3점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3\pi}{2}$
④ 2π ⑤ $\frac{5\pi}{2}$

B064

○○
◇(2018-가형7)

$0 \leq x < 2\pi$일 때, 방정식

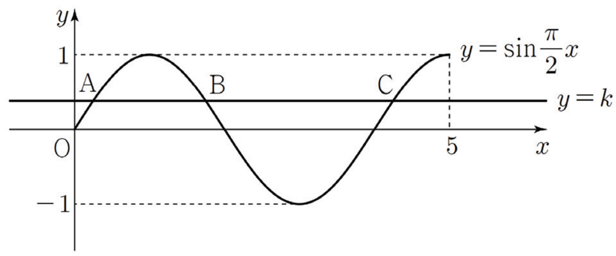
$$\cos^2 x = \sin^2 x - \sin x$$

의 모든 해의 합은? [3점]

① 2π ② $\frac{5}{2}\pi$ ③ 3π
④ $\frac{7}{2}\pi$ ⑤ 4π

B065 ○○
(2022(7)고3-확률과통계10/미적분10/기하10)

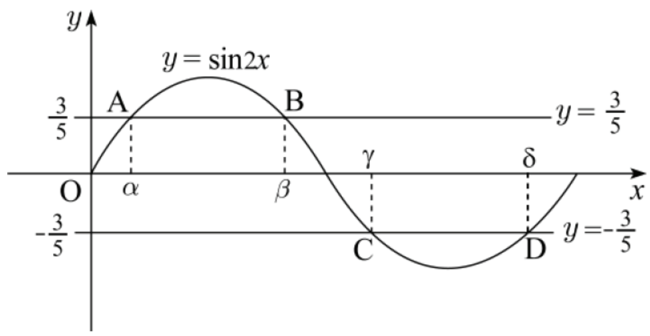
곡선 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$ $(0\le x\le 5)$가 직선 $y=k$ $(0<k<1)$과 만나는 서로 다른 세 점을 y축에서 가까운 순서대로 A, B, C라 하자. 세 점 A, B, C의 x좌표의 합이 $\frac{25}{4}$일 때, 선분 AB의 길이는? [4점]



① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{11}{8}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{13}{8}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

B066 ○○
(2009(3)고2-공통13)

그림과 같이 함수 $y=\sin2x(0\le x\le\pi)$의 그래프가 직선 $y=\frac{3}{5}$과 두 점 A, B에서 만나고, 직선 $y=-\frac{3}{5}$과 두 점 C, D에서 만난다. 네 점 A, B, C, D의 x좌표를 각각 α, β, γ, δ라 할 때, $\alpha+2\beta+2\gamma+\delta$의 값은? [4점]



① $\frac{9}{4}\pi$ ② $\frac{5}{2}\pi$ ③ 3π
④ $\frac{7}{2}\pi$ ⑤ 4π

B067 ○○
(2020(6)고2-공통17)

상수 $k(0<k<1)$에 대하여 $0\le x<2\pi$일 때, 방정식 $\sin x=k$의 두 근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하자.

$\sin\frac{\beta-\alpha}{2}=\frac{5}{7}$일 때, k의 값은? [4점]

① $\frac{2\sqrt{6}}{7}$ ② $\frac{\sqrt{26}}{7}$ ③ $\frac{2\sqrt{7}}{7}$
④ $\frac{\sqrt{30}}{7}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{2}}{7}$

B068 ○○
(2021사관(1차)-나형10)

$0\le x<2\pi$일 때, 방정식 $|\sin2x|=\frac{1}{2}$의 모든 실근의 합은? [3점]

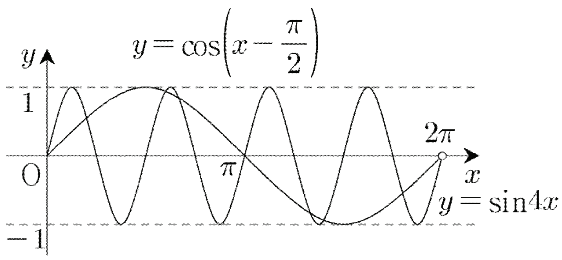
① 4π ② 6π ③ 8π
④ 10π ⑤ 12π

B069 ○○
(2022(4)고3-확률과통계11/미적분11/기하11)

자연수 k에 대하여 $0\le x<2\pi$일 때, x에 대한 방정식 $\sin kx=\frac{1}{3}$의 서로 다른 실근의 개수가 8이다.

$0\le x<2\pi$일 때, x에 대한 방정식 $\sin kx=\frac{1}{3}$의 모든 해의 합은? [4점]

① 5π ② 6π ③ 7π
④ 8π ⑤ 9π



따라서 문제에서 주어진 두 곡선의 교점의 개수는 8이다.

답 ④

B063 | 답 ④

[풀이]

$\sin^2 x=1-\cos^2 x$이므로 주어진 방정식은

$2(1-\cos^2 x)+3\cos x=3$

정리하면

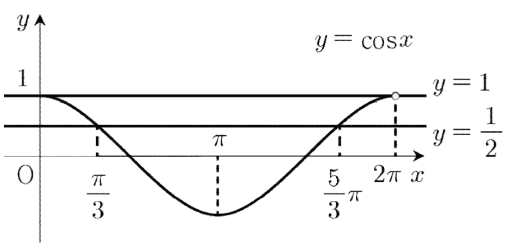
$2\cos^2 x-3\cos x+1=0$

좌변을 인수분해하면

$(2\cos x-1)(\cos x-1)=0$

풀면

$\cos x=\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=1$



$\cos x=\frac{1}{2}$이면 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

$\cos x=1$이면 $x=0$

따라서 구하는 값은

$0+\frac{\pi}{3}+\frac{5}{3}\pi=2\pi$

답 ④

B064 | 답 ④

[풀이]

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$

이므로, 주어진 방정식은

$1-\sin^2 x=\sin^2 x-\sin x$

정리하면

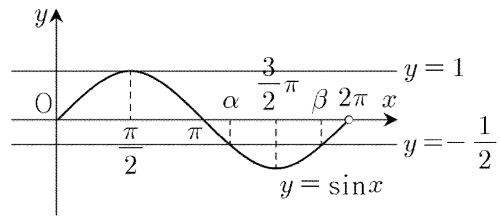
$2\sin^2 x-\sin x-1=0$

좌변을 인수분해하면

$(2\sin x+1)(\sin x-1)=0$

풀면

$\sin x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=1$



함수 $y=\sin x$의 그래프는 직선 $x=\frac{3}{2}\pi$에 대하여 대칭이므로 방정식 $\sin x=-\frac{1}{2}$의 두 실근을 각각 α, β라고 하면

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{2}\pi$ 즉, $\alpha+\beta=3\pi$

방정식 $\sin x=1$을 풀면 $x=\frac{\pi}{2}$

따라서 구하는 값은

$\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}=3\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{7}{2}\pi$

답 ④

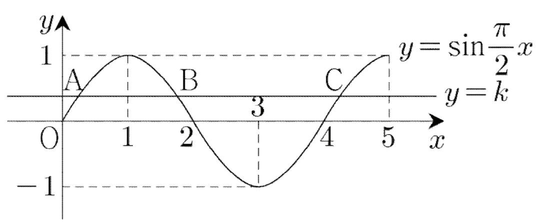
[참고]

α, β의 값은 각각 $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$이다.

B065 | 답 ③

[풀이]

곡선 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$의 주기는 4이고, 이 곡선은 직선 $x=1$, $x=3$, …에 대칭이고, 점 $(2,\ 0)$, $(4,\ 0)$, …에 대칭이다.



점 A의 x좌표를 a라고 하면

점 B의 x좌표는 $2-a$, ($\because$ $x=1$에 대칭)

점 C의 x좌표는 $4+a$이다. ($\because$ 주기가 4)

$a+2-a+4+a=a+6=\frac{25}{4}$, $a=\frac{1}{4}$

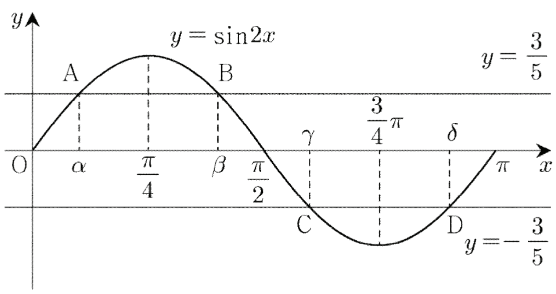
$\therefore$ $\overline{\text{AB}}=(2-a)-a=2-2a=\frac{3}{2}$

답 ③

B066 | 답 ③

[풀이]

주기가 π인 함수 $y=\sin 2x$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $y=\sin 2x$의 그래프는 직선 $x=\frac{\pi}{4}$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{4}$ 즉, $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

함수 $y=\sin 2x$의 그래프는 직선 $x=\frac{3}{4}\pi$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\gamma+\delta}{2}=\frac{3}{4}\pi$ 즉, $\gamma+\delta=\frac{3}{2}\pi$

함수 $y=\sin 2x$의 그래프는 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$에 대하여 대칭이므로

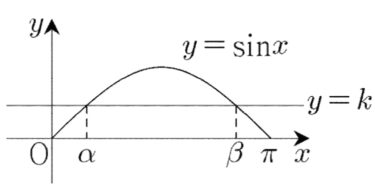
$\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}$ 즉, $\beta+\gamma=\pi$

$\therefore\ \alpha+2\beta+2\gamma+\delta=\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\pi+\pi=3\pi$

답 ③

B067 | 답 ①

[풀이]



곡선 $y=\sin x$는 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{2}$

$\sin\frac{\beta-\alpha}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha=\sqrt{1-k^2}=\frac{5}{7}$

$(\because \sin\alpha=k)$

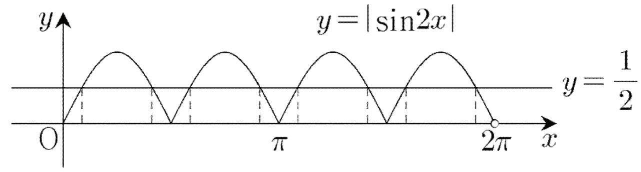
$\therefore\ k=\frac{2\sqrt{6}}{7}$

답 ①

B068 | 답 ③

[풀이]

함수 $y=|\sin 2x|$의 그래프는



위의 그림에서 곡선과 직선의 교점의 x좌표를 가장 작은 것부터 크기 순서대로 a_1, a_2, $\cdots$, a_8이라고 하면

$\frac{a_1+a_2+\ \cdots\ +a_8}{8}=\pi$

즉, $a_1+a_2+\ \cdots\ +a_8=8\pi$

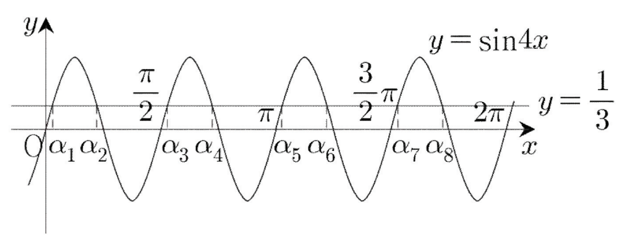
따라서 문제에서 주어진 방정식의 모든 실근의 합은 8π이다.

답 ③

B069 | 답 ③

[풀이]

문제에서 주어진 조건을 만족시키도록 곡선과 직선을 그리면 다음과 같다.



함수 $y=\sin kx$의 주기가 $\frac{2\pi}{k}$이므로

$\frac{2\pi}{k}\times 4=2\pi$에서 $k=4$

$\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ \cdots\ +\alpha_8}{8}=\frac{\frac{3}{4}\pi+\pi}{2}$

$\therefore\ \alpha_1+\alpha_2+\ \cdots\ +\alpha_8=7\pi$

답 ③

C076
○○
(2024(5)고3-확률과통계9/미적분9/기하9)

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=1-4\times S_n$$

이고 $a_4=4$일 때, $a_1\times a_6$의 값은? [4점]

① 5 ② 10 ③ 15
④ 20 ⑤ 25

C077
○○○
(2013(6)고2-B형20)

자연수로 이루어진 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_1의 최댓값은? [4점]

(가) $a_{10}\leq 5120$
(나) n이 2 이상의 자연수일 때, $a_n=8+\sum_{k=1}^{n-1}a_k$이다.

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

C. 등차수열과 등비수열

주제: 지수함수와 로그함수

C078
○○
(2011사관(1차)-문과8)

함수 $y=f(x)$의 그래프는 지수함수 $y=a^x$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼 평행이동시킨 것이다. 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 3인 등비수열이고, 모든 자연수 n에 대하여 $(n,\ a_n)$은 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점일 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은? [3점]

① $-\log_3 2$ ② $1-\log_3 2$ ③ $2-\log_3 2$
④ $3-\log_3 2$ ⑤ $4-\log_3 2$

C079
○○
(2019(11)고2-가형27)

$\frac{1}{4}$과 16 사이에 n개의 수를 넣어 만든 공비가 양수 r인 등비수열

$$\frac{1}{4},\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ 16$$

의 모든 항의 곱이 1024일 때, r^9의 값을 구하시오. [4점]

C080
○○
(2021사관(1차)-가형26)

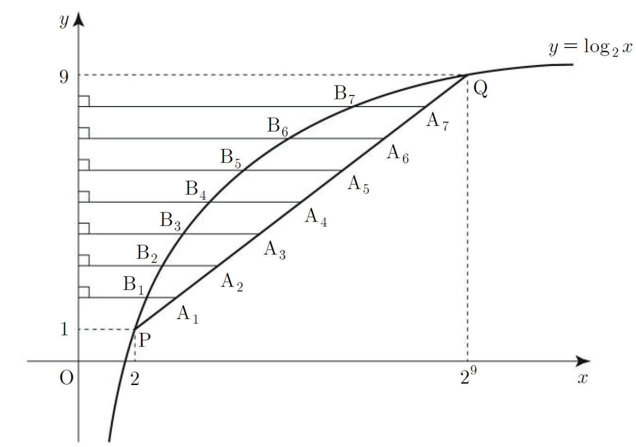
두 실수 a, b와 수열 $\{c_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $(m+2)$개의 수
a, $\log_2 c_1$, $\log_2 c_2$, $\log_2 c_3$, $\cdots$, $\log_2 c_m$, b
가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.
(나) 수열 $\{c_n\}$의 첫째항부터 제m항까지의 항을 모두 곱한 값은 32이다.

$a+b=1$일 때, 자연수 m의 값을 구하시오. [4점]

C081
○○○
(2011(11)고2-가형21)

그림과 같이 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 두 점 $\mathrm{P}(2,\ 1)$, $\mathrm{Q}(2^9,\ 9)$에 대하여 선분 PQ를 8등분하여 점 P에 가까운 점부터 차례로 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_7이라 하고, 점 A_n에서 y축에 내린 수선과 곡선 $y=\log_2 x$의 교점을 B_n이라 하자. 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{7} l_n$의 값은? [4점]



① 1291 ② 1391 ③ 1491
④ 1591 ⑤ 1691

C. 시그마(1)

C082
○
◇(2025(6)-확률과통계3/미적분3/기하3)

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{5}(a_k+1)=9$이고 $a_6=4$일 때, $\sum_{k=1}^{6} a_k$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

C083
○
◇(2024-확률과통계18/미적분18/기하18)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$\sum_{k=1}^{10} a_k=\sum_{k=1}^{10}(2b_k-1)$, $\sum_{k=1}^{10}(3a_k+b_k)=33$

일 때, $\sum_{k=1}^{10} b_k$의 값을 구하시오. [3점]

C084
○
◇(2021-나형10)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{5} a_k=8,\ \sum_{k=1}^{5} b_k=9$$

일 때, $\sum_{k=1}^{5}(2a_k-b_k+4)$의 값은? [3점]

① 19 ② 21 ③ 23
④ 25 ⑤ 27

$a_n = 8 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k$

$a_{n-1} = 8 + \sum_{k=1}^{n-2} a_k$ (단, $n \geq 3$)

위의 두 등식을 변변히 빼면

$a_n - a_{n-1} = a_{n-1}$, 즉 $a_n = 2a_{n-1} (n \geq 3)$

수열 $\{a_n\}$을 쓰면

$a_1,\ a_1 + 8,\ 2(a_1 + 8),\ 2^2(a_1 + 8),\ \cdots$

조건 (가)에 의하여

$a_{10} = 2^8(a_1 + 8) \leq 5120$

$a_1 \leq 12$

따라서 a_1의 최댓값은 12이다.

답 ④

C078 | 답 ⑤

[풀이]

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x) = a^{x-b}$

일반항 a_n은

$a_n = 2 \times 3^{n-1} (n \geq 1)$

점 $(n,\ a_n)$이 곡선 $y = f(x)$ 위에 있으므로

$f(n) = a_n$ 즉, $a^{n-b} = 2 \times 3^{n-1}$

우변을 정리하면

$a^{n-b} = 3^{n-1+\log_3 2}$

n에 대한 항등식이 되기 위해서는

$a = 3,\ b = 1 - \log_3 2$

$\therefore\ a + b = 4 - \log_3 2$

답 ⑤

C079 | 답 64

[풀이]

등비수열의 정의에 의하여

$16 = \frac{1}{4} \times r^{n+1}$, 즉 $r^{n+1} = 2^6$ $\cdots$㉠

등차수열의 합의 공식에 의하여

$\frac{1}{4} \times a_1 \times \cdots \times a_n \times 16$

$= \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} r^{1+2+3+ \cdots +(n+1)}$

$= \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} r^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} = 2^{10}$ $\cdots$㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$2^{-2(n+2)} 2^{6 \times \frac{n+2}{2}} = 2^{10}$, $2^{n+2} = 2^{10}$, $n = 8$

이를 ㉠에 대입하면

$\therefore\ r^9 = 2^6 = 64$

답 64

C080 | 답 10

[풀이]

조건 (나)에서

$c_1 \times c_2 \times \cdots \times c_m = 32$

조건 (가)에서 주어진 $(m+2)$개의 수를 모두 합하면

$a + b + \log_2(c_1 \times c_2 \times \cdots \times c_m)$

$= 1 + \log_2 32 = 1 + 5 = 6$

그런데 등차수열의 합의 공식에서

$\frac{a+b}{2} \times (m+2) = 6$, 즉 $m = 10$

답 10

C081 | 답 ①

[풀이]

점 A_n의 x좌표를 a_n이라고 하면

수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로

$a_1 + a_2 + \cdots + a_7$

$= \frac{a_1 + a_7}{2} \times 7 = \frac{2 + 2^9}{2} \times 7 = 1799$

점 B_n의 x좌표를 b_n이라고 하면

아홉 개의 수

$2,\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_7,\ 2^9$

는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

이때, 공비는 2이다.

등비수열의 합의 공식에 의하여

$b_1 + b_2 + \cdots + b_7 = \frac{4(2^7 - 1)}{2 - 1} = 508$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{7} l_n = \sum_{n=1}^{7} a_n - \sum_{n=1}^{7} b_n$

$= 1799 - 508 = 1291$

답 ①

D023

○○
(2012(4)고3-나형13)

이차함수 $f(x)$와 다항함수 $g(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\{2f(x)-3g(x)\}=2$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x\to\infty}\dfrac{8f(x)-3g(x)}{3g(x)}$의 값은? [3점]

① $\dfrac{3}{2}$ ② 2 ③ $\dfrac{5}{2}$

④ 3 ⑤ $\dfrac{7}{2}$

D024

○○
(2008사관(1차)-이과26)

$x\neq 2$인 모든 실수 x에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다른 두 조건을 만족한다.

(가) $\lim_{x\to 2}\{2f(x)+g(x)\}=1$

(나) $\lim_{x\to 2}g(x)=\infty$

이때, $\lim_{x\to 2}\dfrac{4f(x)-40g(x)}{2f(x)-g(x)}$의 값을 구하시오. [3점]

D. 함수의 극한 계산

주제: 차수, 계수 결정

D025

○○
◇(2018(9)-나형12)

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=2$

(나) $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=3$

$f(2)$의 값은? [3점]

① 11 ② 14 ③ 17

④ 20 ⑤ 23

D026

○○
◇(2016(9)-A형28)

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-x^3}{3x}=2$

(나) $\lim_{x\to 0}f(x)=-7$

D027 ○○ (2023(4)고3–확률과통계18/미적분18/기하18)

다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xf(x)-2x^3+1}{x^2}=5,\ f(0)=1$$

을 만족시킬 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

D028 ○○ (2023(11)고2–공통28)

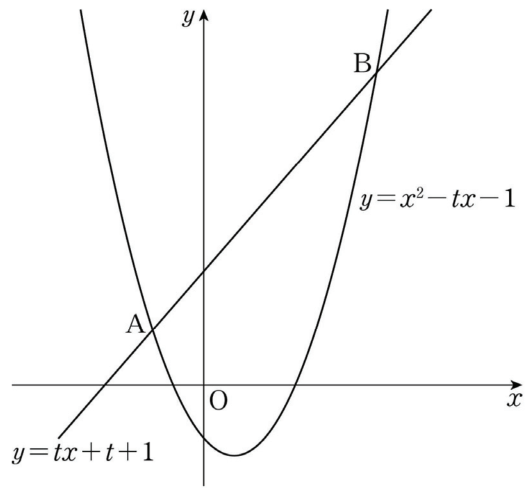
상수항과 계수가 모두 음이 아닌 정수인 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)+g(2)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2g(x)}{x^5}=4$
(나) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\{g(x)\}^2}{x^5}=2$

D. 함수의 극한 계산: 활용

D029 ○○ (2023(10)고3–확률과통계10/미적분10/기하10)

실수 $t(t>0)$에 대하여 직선 $y=tx+t+1$과 곡선 $y=x^2-tx-1$이 만나는 두 점을 A, B라 할 때, $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{t^2}$의 값은? [4점]



① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$
④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

D024 | 답 21

[풀이]

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to 2} g(x)\left\{2\frac{f(x)}{g(x)}+1\right\}=1$ (←조건(가))

$x\to 2$일 때, $g(x)\to\infty$ (←조건(나))이므로

$2\frac{f(x)}{g(x)}+1\to 0$ 즉, $2\frac{f(x)}{g(x)}\to -1$이다.

$(\because \lim_{x\to 2}\left\{2\frac{f(x)}{g(x)}+1\right\}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{2f(x)+g(x)}{g(x)}=\frac{1}{\infty}=0)$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}=-\frac{1}{2}$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{4f(x)-40g(x)}{2f(x)-g(x)}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{4\frac{f(x)}{g(x)}-40}{2\frac{f(x)}{g(x)}-1}$

$=\frac{4\times\left(-\frac{1}{2}\right)-40}{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)-1}=21$

답 21

D025 | 답 ②

[풀이1]

함수 $f(x)$를 3차함수로 가정하자.

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$

조건 (가)에서

$\frac{f(x)}{x^2}=ax+b+\frac{c}{x}+\frac{d}{x^2}$이므로

$a>0$이면 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\infty$이고,

$a<0$이면 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=-\infty$이다.

이는 가정에 모순이므로 $f(x)$는 3차함수가 아니다.

함수 $f(x)$를 4차이상의 함수로 가정했을 때에도

동일한 모순이 발생한다.

따라서 $f(x)$는 1차 또는 2차함수이다.

함수 $f(x)$가 1차함수라고 가정하자.

$f(x)=ax+b(a\neq 0)$

조건 (가)에서

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}\right)=0\neq 2$

이는 가정에 모순이므로 $f(x)$는 2차함수이다.

$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$

조건 (가)에서

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)=a=2$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=2x^2+bx+c$

조건 (나)에서

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(2x+b+\frac{c}{x}\right)=3$

그런데 $\lim_{x\to 0}(2x+b)=b$이므로

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to 0}\frac{c}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\left(2x+b+\frac{c}{x}\right)-\lim_{x\to 0}(2x+b)$

$=3-b$ …㉠

이때,

$c>0$이면 $\lim_{x\to 0+}\frac{c}{x}=\infty$, $\lim_{x\to 0-}\frac{c}{x}=-\infty$,

$c<0$이면 $\lim_{x\to 0+}\frac{c}{x}=-\infty$, $\lim_{x\to 0-}\frac{c}{x}=\infty$

이므로 $c=0$이다.

이를 ㉠에 대입하면 $b=3$이다.

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=2x^2+3x$

$\therefore f(2)=14$

답 ②

[참고1]

함수 $f(x)$가 2차함수임을 엄밀하게 증명하면 다음과 같다.

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

으로 두자. (단, $a_n\neq 0$)

$n\geq 3$이라고 가정하자.

조건 (가)에서

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{x^2}$

$=\lim_{x\to\infty}\left(a_nx^{n-2}+\frac{a_{n-1}}{x^{3-n}}+\cdots+\frac{a_1}{x}+\frac{a_0}{x^2}\right)$

$\lim_{x \to \infty}\left(\frac{a_{n-1}}{x^{3-n}}+ \cdots + \frac{a_1}{x}+\frac{a_0}{x^2}\right)$은 수렴하고,

$\lim_{x \to \infty} a_n x^{n-2} = \infty$ ($a_n > 0$인 경우),

$\lim_{x \to \infty} a_n x^{n-2} = -\infty$ ($a_n < 0$인 경우)

이므로, $\lim_{x \to \infty}\frac{f(x)}{x^2}$은 발산한다.

이는 가정에 모순이므로 $n=1$ 또는 $n=2$이다.

$n=1$이라고 가정하자.

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=ax+b(a \neq 0)$

으로 두면, 조건 (가)에서

$$\lim_{x \to \infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x \to \infty}\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}\right)=0 \neq 2$$

이는 가정에 모순이므로 $n=2$이다.

따라서 함수 $f(x)$는 2차함수이다.

[참고2]

다음과 같은 빠른 풀이도 가능하다.

조건 (가)에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다.

조건 (나)에서 주어진 등식의 좌변을 변형하면

$$\lim_{x \to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x \to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=3$$

에서 $f(0)=0$, $f'(0)=3$임을 알 수 있다.

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=2x^2+ax+b$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=4x+a$

$f(0)=b=0$, $f'(0)=a=3$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=2x^2+3x$

$\therefore\ f(2)=14$

[풀이2] **시험장**

(가) $\Rightarrow f(x)=2x^2+\cdots$

(나) $\Rightarrow f(x)=\cdots+3x$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=2x^2+3x$

$\therefore\ f(2)=14$

답 ②

D026 | 답 13

[풀이1]

$f(x)$가 다항함수이므로 $f(x)-x^3$은 다항함수이다.

$f(x)-x^3=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

(단, n은 자연수이고 $a_n \neq 0$이다.)

조건 (가)에서

$$\lim_{x \to \infty}\frac{f(x)-x^3}{3x}$$

$$=\lim_{x \to \infty}\left(\frac{a_n}{3}x^{n-1}+\frac{a_{n-1}}{3}x^{n-2}+\cdots+\frac{a_1}{3}+\frac{a_0}{3x}\right)$$

$=2$

만약 $n \geq 2$이고 $a_n > 0$이면

$$\lim_{x \to \infty}\frac{a_n}{3}x^{n-1}=\infty$$

이므로

$$\lim_{x \to \infty}\frac{f(x)-x^3}{3x}$$

$$=\lim_{x \to \infty}\frac{a_n}{3}x^{n-1}\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_nx}+\cdots+\frac{a_1}{a_nx^{n-1}}+\frac{a_0}{a_nx^n}\right)$$

$=\infty$

이는 가정에 모순이다.

만약 $n \geq 2$이고 $a_n < 0$이면

$$\lim_{x \to \infty}\frac{a_n}{3}x^{n-1}=-\infty$$

이므로 마찬가지의 방법으로

$$\lim_{x \to \infty}\frac{f(x)-x^3}{3x}=-\infty$$

이는 가정에 모순이다.

따라서 $n=1$이므로 다항함수 $f(x)-x^3$는 일차식이다.

$f(x)-x^3=ax+b$ (단, $a \neq 0$)

조건 (가)에서

$$\lim_{x \to \infty}\frac{f(x)-x^3}{3x}=\lim_{x \to \infty}\frac{ax+b}{3x}$$

$$=\lim_{x \to \infty}\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{3x}\right)=\frac{a}{3}=2$$

풀면

$a=6$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^3+6x+b$

조건 (나)에서

$$\lim_{x \to 0}f(x)=\lim_{x \to 0}(x^3+6x+b)=b=-7$$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^3+6x-7$

$\therefore\ f(2)=13$

답 13

[풀이2] 시험장

(가) $\Rightarrow f(x)-x^3=6x+a$

(나) $\Rightarrow f(0)=a=-7$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^3+6x-7$

$\therefore\ f(2)=13$

답 13

D027 | 답 8

[풀이]

$\lim_{x\to\infty}\frac{xf(x)-2x^3+1}{x^2}=5$에서

$xf(x)-2x^3+1=5x^2+ax+b$

즉, $xf(x)=2x^3+5x^2+ax+b-1$

$x=0$을 대입하면 $0=b-1$, 즉 $b=1$

$xf(x)=2x^3+5x^2+ax$

양변을 $x(x\neq 0)$로 나누면

$f(x)=2x^2+5x+a$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$, 즉 $a=1$

$\therefore\ f(1)=8$

답 8

D028 | 답 16

[풀이]

(가): $\{f(x)\}^2g(x)=4x^5+\cdots$

다음의 두 경우로 나누어 생각하자.

$f(x)$, $g(x)$는 각각 2차, 1차 $\cdots$(경우1)

$f(x)$, $g(x)$는 각각 1차, 3차 $\cdots$(경우2)

(경우1) (×)

$f(x)=ax^2+bx+c$, $g(x)=px+q$

(단, $a\neq 0$, $p\neq 0$)

$f(x)\{g(x)\}^2=ap^2x^4+\cdots$

이므로 (나)에서 주어진 극한은 발산한다.

(경우2) (○)

$f(x)=ax+b$, $g(x)=px^3+qx^2+rx+s$

(단, $a\neq 0$, $p\neq 0$)

$\{f(x)\}^2g(x)=a^2px^5+\cdots$

에서 $a^2p=4$ $\cdots$㉠

(나): $f(x)\{g(x)\}^2=ap^2x^7+\cdots+bs^2$의

x^4, x^3, x^2, x의 계수와 상수항(bs^2)은 모두 0이어야 한다.

즉, $b=r=s=0$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 방정식은

$f(x)=ax$, $g(x)=px^3+qx^2$

(나): $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\{g(x)\}^2}{x^5}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{ax(px^3+qx^2)^2}{x^5}=\lim_{x\to 0}a(px+q)^2$

$=aq^2=2$ $\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$a=2$, $q=1$, $p=1$,

$f(x)=2x$, $g(x)=x^3+x^2$

$\therefore\ f(2)+g(2)=4+12=16$

답 16

D029 | 답 ④

[풀이]

두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라고 하자.

주어진 곡선과 직선의 방정식을 연립하면

$x^2-tx-1=tx+t+1$, $x^2-2tx-t-2=0$

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2t$, $\alpha\beta=-t-2$

$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4t^2+4t+8$

그런데 직선 AB의 기울기는 t이므로

$\overline{AB}=t(\beta-\alpha)=t\sqrt{4t^2+4t+8}$

$\therefore\ \lim_{t\to\infty}\frac{\overline{AB}}{t^2}=\lim_{t\to\infty}\sqrt{4+\frac{4}{t}+\frac{8}{t^2}}=2$

답 ④

D030 | 답 ⑤

[풀이]

$g(x)=\sqrt{x+2}$이므로

두 점 P, Q의 좌표는 각각

$P(t,\ t^2-2)$, $Q(t,\ \sqrt{t+2})$

$\overline{PQ}=t^2-2-\sqrt{t+2}$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\therefore\ \lim_{t\to 2+}\frac{h(t)}{t-2}$

E. 삼차함수의 그래프: 인수정리

E068

○○
(2018사관(1차)-나형20)

최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(6)$의 최댓값과 최솟값의 합은? [4점]

(가) $f(2)=f'(2)=0$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq -3$이다.

① 128 ② 144 ③ 160
④ 176 ⑤ 192

E. 삼차함수의 그래프

주제: 비율 관계(1)

E069

○
◇(2011-가형18)

함수 $f(x)=(x-1)^2(x-4)+a$의 극솟값이 10일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

E070

○○○
(2019(10)고3-나형21)

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 α, $\beta(\alpha<\beta)$뿐이다.
(나) 함수 $f(x)$의 극솟값은 -4이다.

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $f'(\alpha)=0$
ㄴ. $\beta=\alpha+3$
ㄷ. $f(0)=16$이면 $\alpha^2+\beta^2=18$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$f'(x) \leq 0$이므로 삼차함수 $f(x)$는 감소함수이다.
그리고 이차함수 $f'(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 음수이다.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

이므로 함수 $f(x)$는 x축과 오직 하나의 점에서만 만난다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

E068 | 답 ①

[풀이]
조건 (가)에서 주어진 조건에 의하여
$f(x) = (x-2)^2(x-\alpha)$(←인수정리)
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x) = 2(x-2)(x-\alpha) + (x-2)^2$
$= 3x^2 - 2(\alpha+4)x + 4(\alpha+1)$
조건 (나)에 의하여
$3x^2 - 2(\alpha+4)x + 4\alpha + 7 \geq 0$
위의 부등식의 좌변을 $g(x)$로 두고,
이차방정식 $g(x) = 0$의 판별식을 D라고 하자.
$D/4 = (\alpha+4)^2 - 3(4\alpha+7)$
$= \alpha^2 - 4\alpha - 5 \leq 0$ 즉, $(\alpha-5)(\alpha+1) \leq 0$
풀면 $-1 \leq \alpha \leq 5$
$f(6) = 16(6-\alpha)$이므로
$16 \leq f(6) \leq 112$
따라서 구하는 값은 128이다.

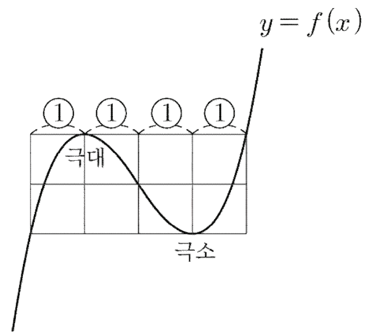
답 ①

E069 | 답 14

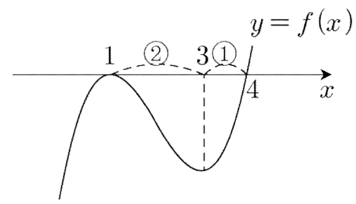
[풀이1]
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x) = 3(x-1)(x-3)$
$f'(x) = 0$에서 $x = 1$ 또는 3
$x = 1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x = 1$에서 극댓값을 갖는다.
$x = 3$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x = 3$에서 극솟값을 갖는다.
주어진 조건에서
$f(3) = -4 + a = 10$
$\therefore\ a = 14$

답 14

[풀이2] 시험장
삼차함수의 비율관계를 이용하면 a의 값을 빠르게 구할 수 있다.



위의 비율관계가 성립하므로

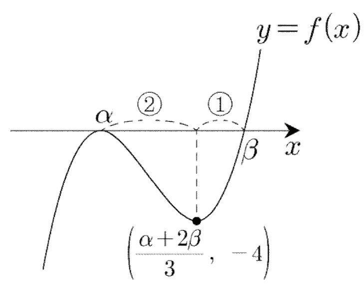


함수 $f(x)$는 $x = 3$에서 극솟값을 갖는다.
$f(3) = a - 4 = 10$
$\therefore\ a = 14$

답 14

E070 | 답 ②

[풀이]
▸ ㄱ. (참)
두 조건 (가), (나)에 의하여 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



위의 그림에서
$f'(\alpha) = 0$
▸ ㄴ. (참)
$f(\alpha) = f(\beta) = f'(\alpha) = 0$
이므로 인수정리에 의하여
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta)$
$f'(x) = 3(x-\alpha)\left(x - \frac{\alpha+2\beta}{3}\right)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\alpha$ 또는 $x=\dfrac{\alpha+2\beta}{3}$

$f\left(\dfrac{\alpha+2\beta}{3}\right)=-4\left(\dfrac{\beta-\alpha}{3}\right)^3=-4$

$\beta-\alpha=3$, $\therefore\ \beta=\alpha+3$ $\cdots$ ㉠

▸ ㄷ. (거짓)

$f(0)=-\alpha^2\beta=16$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$-\alpha^2(\alpha+3)=16$, $\alpha^3+3\alpha^2+16=0$,

$(\alpha+4)(\alpha^2-\alpha+4)=0$, $\alpha=-4$, $\beta=-1$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=17$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

E071 | 답 21

[풀이1]

주어진 함수의 도함수를 구하면

$y'=3x^2+2$

점 P에서의 접선의 방정식은

$y=5x+9$

주어진 곡선의 방정식과 접선의 방정식을 연립하면

$x^3+2x+7=5x+9$

정리하면

$x^3-3x-2=0$

인수분해하면

$(x-2)(x+1)^2=0$ 풀면 $x=2$ 또는 $x=-1$

주어진 곡선과 접선의 점 P가 아닌 교점의 좌표는 $(2,\ 19)$이다.

$\therefore\ a+b=21$

답 21

[풀이2] 시험장

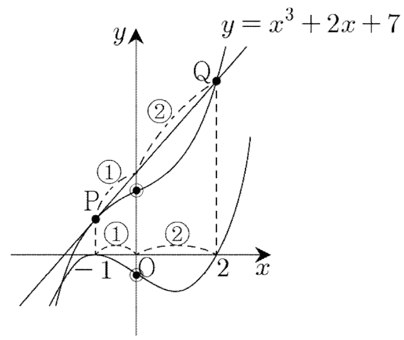
점 $(a,\ b)$를 Q라고 하자.

삼차함수의 비율관계를 이용하면 문제를 빠르게 해결할 수 있다.

$y'=3x^2+2\geq 2$

(단, 등호는 $x=0$일 때 성립한다.)

따라서 곡선 $y=x^3+2x+7$은 점 $(0,\ 7)$에 대하여 대칭이다.



(단, ●는 접선의 기울기가 가장 작은 점이다. 즉, '변곡점'이다.)

위의 그림에서 점 Q의 x좌표가 2임을 알 수 있다.

점 Q의 좌표는 $(2,\ 19)$이므로

$a=2$, $b=19$

$\therefore\ a+b=21$

답 21

E072 | 답 ①

[풀이1]

두 점 $(2,\ 4)$, $(-1,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=x+2$(←접선)

$g(x)=x+2$로 두자.

문제에서 주어진 조건에서

$f(2)=g(2)$, $f'(2)=g'(2)$, $f(-1)=g(-1)$

$h(x)=f(x)-g(x)$로 두면

$h(2)=h(-1)=0$, $h'(2)=0$

인수정리에 의하여

$h(x)=f(x)-g(x)=(x-2)^2(x+1)$

즉, $f(x)-(x+2)=(x-2)^2(x+1)$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=(x-2)^2(x+1)+x+2$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=2(x-2)(x+1)+(x-2)^2+1$

$\therefore\ f'(3)=10$

답 ①

[풀이2] 시험장

$g(x)=f(x)-(x+2)$로 두자.

F. 정적분으로 주어진 함수

F022

◇(2018(9)-나형8)

함수 $f(x)=\int_1^x (t-2)(t-3)dt$에 대하여 $f'(4)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

F023

◇(2016(9)-A형25)

함수 $f(x)$가

$$f(x)=\int_0^x (2at+1)dt$$

이고 $f'(2)=17$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

F024

(2023(4)고3-확률과통계9/미적분9/기하9)

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2-4x+1$이고

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=1$일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

F. 정적분으로 주어진 함수: 방정식 결정(1)

F025

◇(2007-가형19)

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x f(t)dt=x^3-2ax^2+ax$$

를 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오.
(단, a는 상수이다.) [3점]

F026

◇(2025-확률과통계7/미적분7/기하7)

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x f(t)dt=3x^3+2x$$

를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [3점]

① 7 ② 9 ③ 11
④ 13 ⑤ 15

F027
○○
◇(2014(9)-A형28)

다항함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_0^x f(t)\,dt = x^3 - 2x^2 - 2x\int_0^1 f(t)\,dt$$

일 때, $f(0) = a$라 하자. $60a$의 값을 구하시오. [4점]

F028
○○
(2020사관(1차)-나형27)

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x (2x-1)f(t)dt = x^3 + ax + b$$

일 때, $40 \times f(1)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [4점]

F029
○○
(2015사관(1차)-A형10)

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$x^2\int_1^x f(t)dt - \int_1^x t^2 f(t)dt = x^4 + ax^3 + bx^2$$

을 만족시킬 때, $f(5)$의 값은? (단, a와 b는 상수이다.) [3점]

① 17 ② 19 ③ 21
④ 23 ⑤ 25

F030
○○
(2024경찰대(1차)-공통4)

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int xf'(x)dx = x^3 + 3x^2 + C$ (단, C는 적분상수)
(나) $g(x) = \int_{-1}^x tf(t)dt$

$g'(2) = 0$일 때, $f(-2)$의 값은? [3점]

① -30 ② -24 ③ -18
④ -12 ⑤ -6

$= \int_{-1}^{1}(-2x^2)dx = 2\int_{0}^{1}(-2x^2)dx = 2\left[-\frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = -\frac{4}{3}$

답 ④

F020 | 답 ①

[풀이]

$\int_0^1 f(t)dt = a$로 두면

$f(x) = 4x^3 + ax$ (단, a는 상수)

$a = \int_0^1 f(t)dt = \left[t^4 + \frac{a}{2}t^2\right]_0^1 = 1 + \frac{a}{2}$

풀면 $a = 2$이므로

$\therefore\ f(1) = 6$

답 ①

F021 | 답 ③

[풀이]

(가) : $f(x) = 2x + 2a$ (이때, $a = \int_0^1 g(t)dt$)

$g(x) = \int f(x)dx = x^2 + 2ax + C$ (단, C는 적분상수)

(나) : $C - \left[\frac{1}{3}x^3 + ax^2 + Cx\right]_0^1 = \frac{2}{3}$, 즉

$-\frac{1}{3} - a = \frac{2}{3}$, $a = -1$

$a = \int_0^1 g(t)dt = \frac{1}{3} + a + C$, $C = -\frac{1}{3}$

$\therefore\ g(1) = -\frac{4}{3}$

답 ③

F022 | 답 ②

[풀이]

적분과 미분의 관계에 의하여

$f'(x) = (x-2)(x-3)$

$\therefore\ f'(4) = 2 \times 1 = 2$

답 ②

F023 | 답 4

[풀이]

정적분과 미분의 관계에 의하여

$f'(x) = 2ax + 1$

주어진 조건에서

$f'(2) = 4a + 1 = 17$

풀면

$\therefore\ a = 4$

답 4

F024 | 답 ①

[풀이]

$\lim_{x \to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$

$= \lim_{x \to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt - \int_0^0 f(t)dt}{x - 0}$

$= f(0)$ $\left(\because \frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = f(x)\right)$

$= 1$

$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + C$

(단, C는 적분상수)

이때, $C = 1$

$\therefore\ f(2) = 8 - 8 + 2 + 1 = 3$

답 ①

F025 | 답 16

[풀이]

주어진 등식에 $x = 1$을 대입하면

$0 = 1 - a$ 풀면 $a = 1$

이를 주어진 등식에 대입하면

$\int_1^x f(t)dt = x^3 - 2x^2 + x$

적분과 미분의 관계에서

$f(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$\therefore\ f(3) = 16$

답 16

F026 | 답 ③

[풀이]

문제에서 주어진 등식의 양변을 미분하면

$f(x) = 9x^2 + 2$

$\therefore\ f(1) = 11$

답 ③

F027 | 답 40

[풀이1]

문제에서 주어진 항등식에 $x = 1$을 대입하면

$\int_0^1 f(d)dt = -1 - 2\int_0^1 f(t)dt$

정리하면

$\int_0^1 f(d)dt = -\frac{1}{3}$

이를 문제에서 주어진 항등식에 대입하면

$\int_0^x f(t)dt = x^3 - 2x^2 + \frac{2}{3}x$

적분과 미분의 관계에 의하여

$f(x) = 3x^2 - 4x + \frac{2}{3}$

$\therefore\ 60a = 60f(0) = 40$

답 40

[풀이2]

$\int_0^1 f(t)\,dt = c$로 두자. $\cdots(*)$

주어진 등식은

$\int_0^x f(t)\,dt = x^3 - 2x^2 - 2cx$

적분과 미분의 관계에서

$f(x) = 3x^2 - 4x - 2c$

이를 (*)에 대입하면

$\int_0^1 (3t^2 - 4t - 2c)dt = c$

정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여

$\left[t^3 - 2t^2 - 2ct\right]_0^1 = c$

$-1 - 2c = c$ 풀면 $c = -\frac{1}{3}$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x) = 3x^2 - 4x + \frac{2}{3}$

$\therefore\ 60a = 60f(0) = 60 \times \frac{2}{3} = 40$

답 40

F028 | 답 50

[풀이]

$(2x-1)\int_1^x f(t)dt = x^3 + ax + b$ $\cdots(*)$

위의 항등식에 $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$을 대입하면 각각

$1 + a + b = 0$, $\frac{1}{8} + \frac{a}{2} + b = 0$

연립방정식을 풀면

$a = -\frac{7}{4}$, $b = \frac{3}{4}$

(*)의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2\int_1^x f(t)dt + (2x-1)f(x) = 3x^2 - \frac{7}{4}$

위의 항등식에 $x = 1$을 대입하면

$f(1) = \frac{5}{4}$

$\therefore\ 40f(1) = 50$

답 50

F029 | 답 ①

[풀이]

문제에서 주어진 항등식에 $x = 1$을 대입하여 정리하면

$0 = 1 + a + b$ $\cdots$ ㉠

문제에서 주어진 등식의 양변을 각각 x에 대하여 미분하면

$2x\int_1^x f(t)dt + x^2 f(x) - x^2 f(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx$

정리하면

$\int_1^x f(t)dt = 2x^2 + \frac{3}{2}ax + b$

$x = 1$을 대입하면

$0 = 2 + \frac{3}{2}a + b$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$a = -2$, $b = 1$

$\int_1^x f(t)dt = 2x^2 - 3x + 1$

적분과 미분의 관계에 의하여

$f(x) = 4x - 3$

$\therefore\ f(5)=17$

답 ①

F030 | 답 ②

[풀이]

(가): $xf'(x)=3x^2+6x$에서 $f'(x)=3x+6$

($\because$ 다항함수 $f'(x)$는 $x=0$에서 연속이다.)

$f(x)=\dfrac{3}{2}x^2+6x+C_1$ (단, C_1은 적분상수)

(나): $g'(x)=xf(x)$, $g(-1)=0$

$g'(2)=2f(2)=36+2C_1=0$, $C_1=-18$

$\therefore\ f(-2)=6-12-18=-24$

답 ②

F031 | 답 ⑤

[풀이]

$g'(x)=f(x)$이므로 $g'(2)=f(2)=0$이고,

$x=2$의 좌우에서 $g'(x)(=f(x))$의 부호는 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀐다.

$f(2)=6+a=0$, $a=-6$

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=\begin{cases}3(x+2)(x-1) & (x<0)\\ 3(x-2) & (x\ge 0)\end{cases}$$

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=-2$ 또는 $x=2$

$x=-2$의 좌우에서 $f(x)(=g'(x))$의 부호가 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀌므로 함수 $g(x)$는 $x=-2$에서 극댓값을 갖는다.

따라서 구하는 값은

$$g(-2)=\int_{-4}^{-2}f(x)dx$$

$$=\left[x^3+\frac{3}{2}x^2-6x\right]_{-4}^{-2}=26$$

답 ⑤

F032 | 답 ①

[풀이]

적분과 미분의 관계에 의하여

$S'(x)=f(x)$

방정식 $f(x)=0\,(S'(x)=0)$을 풀면

$x=0$ 또는 $x=3$

$x=0$의 좌우에서 $f(x)(S'(x))$의 부호가 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀌므로 함수 $S(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

$x=3$의 좌우에서 $f(x)(S'(x))$의 부호가 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀌므로 함수 $S(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 갖는다.

함수 $f(x)$의 그래프에서

$S'(x)=f(x)=ax(x-3)\,(a>0)$

부정적분을 하면

$$S(x)=\int f(x)dx=\frac{a}{3}x^3-\frac{3a}{2}x^2+C$$

(단, C는 적분상수이다.)

문제에서 주어진 조건에 의하여

$M-m=S(0)-S(3)=\dfrac{9a}{2}=6$에서 $a=\dfrac{4}{3}$

함수 $S(x)$의 방정식은

$$S(x)=\frac{4}{9}x^3-2x^2+C$$

미분계수의 정의에 의하여

$$\therefore\ \lim_{x\to1}\frac{S(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{S(x)-S(1)}{x-1}$$

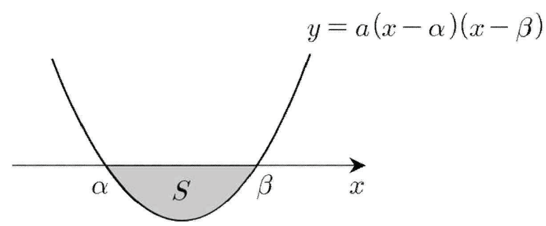
$$(\because S(1)=\int_1^1 f(t)dt=0)$$

$$=S'(1)=-\frac{8}{3}$$

답 ①

[참고] (교육과정 외)

이차함수의 정적분에 대한 아래의 공식을 이용해도 좋다.



$$S=\left|\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)dx\right|=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

(단, $\beta>\alpha$)

위의 공식을 이용하여 상수 a의 값을 구하자.

$$M-m=S(0)-S(3)=-\int_0^3 f(x)dx$$

$=\dfrac{a}{6}(3-0)^3=6$에서 $a=\dfrac{4}{3}$

F033 | 답 ①

[풀이]

$f'(x)=3x^2+bx-5$

$f'(-1)=0$, 즉 $-b-2=0$, $b=-2$

J. 중복순열(함수)

J019

○○

(2022(4)고3-확률과통계25)

두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{1, 2, 3\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow Y$의 개수는? [3점]

집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $x \times f(x) \le 10$이다.

① 102 ② 105 ③ 108
④ 111 ⑤ 114

J020

○○○

(2021(3)고3-확률과통계28)

두 집합
$X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$
에 대하여 X에서 Y로의 함수 f 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수의 개수는? [4점]

(가) $f(2) < f(3) < f(4)$
(나) $f(1) > f(3) > f(5)$

① 100 ② 102 ③ 104
④ 106 ⑤ 108

J. 같은 것이 있는 순열

J021

○

◇(2023(6)-확률과통계23)

5개의 문자 a, a, a, b, c를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 16 ② 20 ③ 24
④ 28 ⑤ 32

J022

○○

(2009(7)고3-가형26이산수학)

숫자 1, 2, 2, 3, 3, 3을 일렬로 배열할 때, 짝수는 반드시 앞에서부터 짝수 번째 자리에 오는 경우의 수는? [3점]

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

6명을 두 팀으로 나누는 경우의 수를 구하면 된다.

$6=5+1=4+2=3+3$

이므로 다음의 세 경우로 나누어 생각하자.

• (1) 6명을 5명, 1명으로 나누는 경우

조합의 수와 곱의 법칙에 의하여

${}_6C_5 \times {}_1C_1 = 6$

• (2) 6명을 4명, 2명으로 나누는 경우

${}_6C_4 \times {}_2C_2 = 15$

• (3) 6명을 3명, 3명으로 나누는 경우의 수

${}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} = 10$

이때, 2!으로 나누는 이유는 다음과 같이 중복되는 경우가 발생하기 때문이다.

6명을 각각 ◉, ◎, ◍, ◐, ◑, ◒으로 두었을 때,

(◉, ◎, ◍)(← ${}_6C_3$에서 발생), (◐, ◑, ◒)(← ${}_3C_3$에서 발생)

(◐, ◑, ◒)(← ${}_6C_3$에서 발생), (◉, ◎, ◍)(← ${}_3C_3$에서 발생)

위의 두 경우는 중복된다.

(1), (2), (3)은 동시에 발생하지 않으므로

구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$6+15+10=31$

답 ①

J019 | 답 ③

[풀이]

$x=1$: $f(1) \le 10$, $f(1)=1, 2, 3$

$x=2$: $f(2) \le 5$, $f(2)=1, 2, 3$

$x=3$: $f(3) \le \frac{10}{3}$, $f(3)=1, 2, 3$

$x=4$: $f(4) \le \frac{5}{2}$, $f(4)=1, 2$

$x=5$: $f(5) \le 2$, $f(5)=1, 2$

따라서 함수 f의 개수는

$3^3 \times 2^2 = 108$

답 ③

J020 | 답 ③

[풀이]

조건 (가), (나)를 만족시키는 함수 f의 개수는

$f(3)=4$일 때, $1^2 \times 4^2 = 16$

왜냐하면

$f(2) < 4 < f(4)$, $f(1) > 4 > f(5)$에서

$f(2)$, $f(5)$가 가질 수 있는 값은 2,

$f(1)$, $f(4)$가 가질 수 있는 값은 6, 8, 10, 12

이기 때문이다.

마찬가지의 방법으로

$f(3)=6$일 때, $2^2 \times 3^2 = 36$

$f(3)=8$일 때, $3^2 \times 2^2 = 36$

$f(3)=10$일 때, $4^2 \times 1^2 = 16$

따라서 함수 f의 개수는

$16+36+36+16=104$

답 ③

J021 | 답 ②

[풀이]

같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\frac{5!}{3!} = 20$

답 ②

J022 | 답 ⑤

[풀이]

○●○●○●

(단, ○는 홀수 번째, ●는 짝수 번째)

●에 2가 올 경우의 수는 ${}_3C_2$, 나머지 자리에 1, 3, 3, 3을 배열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!}$이므로 구하는 경우의 수는

${}_3C_2 \times \frac{4!}{3!} = 12$

답 ⑤

J023 | 답 ①

[풀이1]

양 끝을 제외한 8개의 자리에 흰색 깃발 3개, 파란색 깃발 5개를 일렬로 나열하면 된다.

경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\frac{8!}{3!5!} = 56$

답 ①

[풀이2]

양 끝을 제외한 8개의 자리에 흰색 깃발 3개, 파란색 깃발 5

K049

○○
◇(2010-가형7/나형7)

철수가 받은 전자우편의 10%는 '여행' 이라는 단어를 포함한다. '여행' 을 포함한 전자우편의 50%가 광고이고, '여행' 을 포함하지 않은 전자우편의 20%가 광고이다. 철수가 받은 한 전자우편이 광고일 때, 이 전자우편이 '여행' 을 포함할 확률은? [3점]

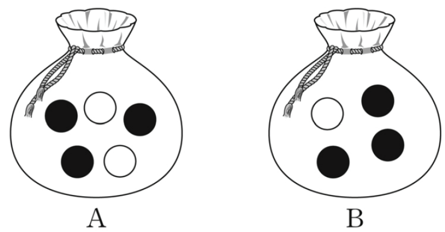
① $\frac{5}{23}$ ② $\frac{6}{23}$ ③ $\frac{7}{23}$

④ $\frac{8}{23}$ ⑤ $\frac{9}{23}$

K050

○○
◇(2014-A형15)

주머니 A에는 흰 공 2개와 검은 공 3개가 들어 있고, 주머니 B에는 흰 공 1개와 검은 공 3개가 들어 있다. 주머니 A에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 흰 공이면 흰 공 2개를 주머니 B에 넣고 검은 공이면 검은 공 2개를 주머니 B에 넣은 후, 주머니 B에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때 꺼낸 공이 흰 공일 확률은? [4점]



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{7}{30}$

④ $\frac{4}{15}$ ⑤ $\frac{3}{10}$

K051

○○
(2008(7)고3-가형16)

A학생의 주머니에는 빨간 구슬 2개와 노란 구슬 3개, B학생의 주머니에는 노란 구슬 1개와 파란 구슬 4개가 들어 있다. 두 명의 학생이 각자의 주머니에서 한 개의 구슬을 꺼내어 색깔에 따라 승부를 가리는데, 빨간 구슬이 노란 구슬에 이기고, 노란 구슬은 파란 구슬에 이기고, 파란 구슬은 빨간 구슬에 이긴다고 한다. 이때, A학생이 이길 확률은? (단, 같은 색의 구슬이 나왔을 때는 구슬을 한 개씩 더 꺼내어 승부를 가리고, 꺼낸 구슬은 다시 넣지 않는다.) [4점]

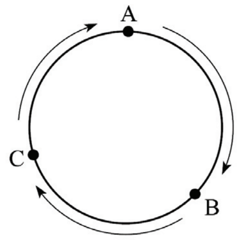
① $\frac{29}{50}$ ② $\frac{31}{50}$ ③ $\frac{33}{50}$

④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{37}{50}$

K052

○○
(2005(7)고3-가형28확률과통계)

그림과 같이 둘레의 길이가 3인 원을 삼등분하는 세 점 A, B, C가 있고, 각 점 위를 움직이는 말이 있다. 이 말은 한 개의 주사위를 던져 홀수의 눈이 나오면 시계방향으로 1만큼 움직이고, 짝수의 눈이 나오면 그 수만큼 시계방향으로 움직인다.



예를 들면, 말이 A에서 출발할 때 주사위를 던져 3이 나오면 B로 움직이고, 다시 주사위를 던져 2가 나오면 B에서 A로 움직인다.
A에서 출발한 말이 주사위를 n번 던진 후 A, B, C에 있을 확률을 각각 p_n, q_n, r_n이라 하면

$$p_{n+1} = ap_n + bq_n + cr_n$$

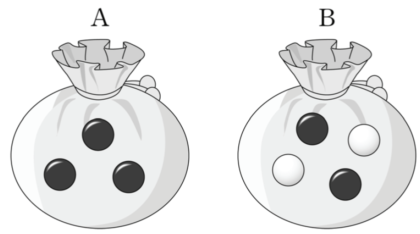
이 성립한다. 세 상수 a, b, c의 곱 abc의 값은? [3점]

① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{1}{18}$ ③ $\frac{1}{27}$
④ $\frac{1}{36}$ ⑤ $\frac{1}{54}$

K053

○○
◇(2014(예비)-B형10)

주머니 A에는 검은 구슬 3개가 들어 있고, 주머니 B에는 검은 구슬 2개와 흰 구슬 2개가 들어 있다. 두 주머니 A, B 중 임의로 선택한 하나의 주머니에서 동시에 꺼낸 2개의 구슬이 모두 검은 색일 때, 선택된 주머니가 B이었을 확률은? [3점]



① $\frac{5}{14}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{3}{14}$
④ $\frac{1}{7}$ ⑤ $\frac{1}{14}$

K054

○○
◇(2012-나형13)

주머니 A에는 1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드가 들어 있고, 주머니 B에는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 숫자가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 들어 있다. 한 개의 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수가 3의 배수이면 주머니 A에서 임의로 카드를 한 장 꺼내고, 3의 배수가 아니면 주머니 B에서 임의로 카드를 한 장 꺼낸다. 주머니에서 꺼낸 카드에 적힌 수가 짝수일 때, 그 카드가 주머니 A에서 꺼낸 카드일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{2}{7}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

$\therefore\ p^2+q^2=13$

답 13

K046 | 답 ①

[풀이]

빨간색 밴드, 주황색 밴드, 노란색 밴드, 초록색 밴드, 파란색 밴드를 각각 R, O, Y, G, B라고 하자.

- (1) 세 번째 날에 B가 오는 경우

B○B○B

경우의 수는 $4\times4=16$이다.

- (2) 세 번째 날에 B가 오지 않는 경우

B○○○B

경우의 수는 $4\times3\times3=36$이다.

따라서 구하는 확률은

$\frac{16+36}{4\times4\times4\times4}=\frac{13}{64}$

답 ①

K047 | 답 ③

[풀이]

문제에서 주어진 조건을 만족시키는 경우를 표로 정리하자.

흰 공	검은 공
1, 2 (합은 3)	5 또는 7 또는 9
1, 3 (합은 4)	5 또는 7 또는 9
1, 4 (합은 5)	7 또는 9
2, 3 (합은 5)	7 또는 9
2, 4 (합은 6)	7 또는 9
3, 4 (합은 7)	9

경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$3+3+2+2+2+1=13$

따라서 구하는 확률은 수학적 확률의 정의에 의하여

$\frac{13}{{}_4C_2\times{}_4C_1}=\frac{13}{24}$

답 ③

K048 | 답 25

[풀이]

두 수의 곱의 모든 양의 약수의 개수가 3이하인 경우를 모두 쓰면

$1\times2,\ 1\times3,\ 1\times4,\ 1\times5,\ 2\times2,\ 3\times3,\ 5\times5$

이 중에서 두 수의 합이 짝수인 경우는

$1+3,\ 1+5,\ 2+2,\ 3+3,\ 5+5$

구하는 확률은

$\frac{3+5+1+{}_3C_2+{}_5C_2}{2+3+4+5+1+{}_3C_2+{}_5C_2}=\frac{11}{14}$

$\therefore\ p+q=25$

답 25

K049 | 답 ①

[풀이1]

문제에서 주어진 조건을 표로 정리하자.

	여행○	여행×	합
광고○	5	18	23
광고×	5	72	77
합	10	90	100

조건부확률의 정의에 의하여

구하는 확률은 $\frac{5}{5+18}=\frac{5}{23}$이다.

답 ①

[풀이2]

철수가 받은 전자우편이 '여행'이라는 단어를 포함한 사건을 A, 광고인 사건을 B라고 하자.

$\mathrm{P}(A)=0.1,\ \mathrm{P}(B|A)=0.5$

확률의 곱셈정리에 의하여

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=0.05$

여사건의 확률에 의하여

$\mathrm{P}(A^C)=0.9,\ \mathrm{P}(B|A^C)=0.2$

확률의 곱셈정리에 의하여

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=0.18$

조건부확률의 정의에 의하여

$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)}=\frac{5}{23}$

답 ①

K050 | 답 ⑤

[풀이]

주머니 A에서 흰 공을 꺼낼 사건을 C, 주머니 B에서 흰 공을 꺼낼 사건을 D라고 하자.

주머니 A에서 흰 공을 꺼내고, 주머니 B에서 흰 공을 꺼낼 확률은
확률의 곱셈정리에 의하여

$P(C\cap D)=P(C)P(D|C)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{5}$

주머니 A에서 검은 공을 꺼내고, 주머니 B에서 흰 공을 꺼낼 확률은

$P(C^C\cap D)=P(C^C)P(D|C^C)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{10}$

구하는 확률을 p라고 두자.
따라서 확률의 덧셈정리에 의하여

$\therefore\ p=\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$

답 ⑤

K051 | 답 ②

[풀이]
A학생이 이기는 경우는 다음과 같다. (세 경우)

- (1) A:빨강−B:노랑 $\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{25}$
- (2) A:노랑−B:파랑 $\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{12}{25}$
- (3) A:노랑−B:노랑 ⇨ A:노랑−B:파랑

$\frac{3}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{4}\times1=\frac{3}{50}$

따라서 구하는 확률은

$\frac{2}{25}+\frac{12}{25}+\frac{3}{50}=\frac{31}{50}$

답 ②

K052 | 답 ⑤

[풀이]
전체를 다음의 세 경우로 구분할 수 있다.

- (1) A → A인 경우 (n회 → $n+1$회)

주사위를 던져서 6이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$이므로

$a=\frac{1}{6}$

- (2) B → A인 경우 (n회 → $n+1$회)

주사위를 던져서 2가 나올 확률은 $\frac{1}{6}$이므로

$b=\frac{1}{6}$

- (3) C → A인 경우 (n회 → $n+1$회)

주사위를 던져서 1, 3, 4, 5가 나올 확률은 $\frac{2}{3}$이므로

$c=\frac{2}{3}$

(1), (2), (3)에서

$abc=\frac{1}{54}$

답 ⑤

K053 | 답 ④

[풀이]

- 주머니 A를 선택하는 경우

주머니 A에서 동시에 꺼낸 2개의 구슬이 모두 검은 색일 확률을 p라고 하면
확률의 곱셈정리에 의하여

$p=\frac{1}{2}\times\frac{{}_3C_2}{{}_3C_2}=\frac{1}{2}$

- 주머니 B를 선택하는 경우

주머니 B에서 동시에 꺼낸 2개의 구슬이 모두 검은 색일 확률을 q라고 하면
확률의 곱셈정리에 의하여

$q=\frac{1}{2}\times\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{12}$

조건부 확률의 정의에 의하여
구하는 확률은

$$\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{12}}=\frac{1}{7}$$

답 ④

[참고]
다음은 잘못된 풀이의 예이다.
A에서 두 개를 동시에 뽑을 때 모두 검은색인 경우의 수는 3, B에서 두 개를 동시에 뽑을 때 모두 검은색인 경우의 수는 1이므로 총 경우의 수는 4이다.
따라서 구하는 확률은 수학적 확률의 정의에 의하여

$\frac{1}{3+1}=\frac{1}{4}$

이다.
하지만 위의 풀이는 잘못되었다. 왜냐하면 두 주머니 A, B에 들어 있는 구슬의 개수가 서로 다르기 때문이다. 이를 좀 더 자세하게 설명하면 다음과 같다.
주머니 A의 3개의 검은 구슬을 각각 ❶, ❷, ❸, 주머니 B의 2개의 흰 구슬과 2개의 검은 구슬을 각각 ①, ②, ❸, ❹라고

하자.
주머니 A에서 2개의 구슬을 동시에 꺼낼 때 발생하는 모든 근원사건을 쓰면
{❶, ❷}, {❶, ❸}, {❷, ❸}
각각의 근원사건이 일어날 확률은 $\frac{1}{3}$이다.
주머니 B에서 2개의 구슬을 동시에 꺼낼 때 발생하는 모든 근원사건을 쓰면
{①, ②}, {①, ❸}, {①, ❹},
{②, ❸}, {②, ❹}, {❸, ❹}
각각의 근원사건이 일어날 확률은 $\frac{1}{6}$이다.
이처럼 두 주머니 A, B에 대하여 근원사건이 일어날 확률은 다르다. 따라서 수학적 확률의 정의를 이용하여 특정 사건이 일어날 확률을 계산할 수 없다.
만약 두 주머니 A, B의 구슬의 개수가 서로 같다면 즉, 근원사건이 일어날 확률이 같다면 수학적 확률의 정의를 이용하여 특정 사건이 일어날 확률을 계산할 수 있다.
예를 들어 주머니 A에는 검은 구슬 3개가 들어 있고, 주머니 B에는 검은 구슬 2개와 흰 구슬 1개가 들어 있다고 하자. 두 주머니 A, B 중 임의로 선택한 하나의 주머니에서 동시에 꺼낸 2개의 구슬이 모두 검은 색일 때, 선택된 주머니가 B이었을 확률을 구하자.
(방법1) 확률의 덧셈정리와 확률의 곱셈정리를 이용
• 주머니 A에서 동시에 2개의 구슬을 꺼낼 경우
꺼낸 2개의 구슬이 모두 검은 색일 확률은 1이다.
• 주머니 B에서 동시에 2개의 구슬을 꺼낼 경우
꺼낸 2개의 구슬이 모두 검은 색일 확률은 $\frac{1}{{}_3C_2}=\frac{1}{3}$이다.
구하는 확률은 조건부 확률의 정의에서
$$\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}$$
이다.
(방법2) 수학적 확률의 정의를 이용
A에서 두 개를 동시에 뽑을 때 모두 검은색인 경우의 수는 3, B에서 두 개를 동시에 뽑을 때 모두 검은색인 경우의 수는 1이므로 총 경우의 수는 4이다.
따라서 구하는 확률은 수학적 확률의 정의에 의하여
$$\frac{1}{3+1}=\frac{1}{4}$$
이다.

K054 | 답 ④

[풀이]
주사위를 던져서 나온 눈의 수가 3의 배수일 확률은 $\frac{2}{6}$이고, 주머니 A에서 꺼낸 카드에 적힌 수가 짝수일 확률은 $\frac{2}{5}$이다.
확률의 곱셈정리에 의하여 이 경우의 확률은
$$\frac{2}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{15}$$
주사위를 던져서 나온 눈의 수가 3의 배수가 아닐 확률은 $\frac{4}{6}$이고, 주머니 B에서 꺼낸 카드에 적힌 수가 짝수일 확률은 $\frac{3}{6}$이다.
확률의 곱셈정리에 의하여 이 경우의 확률은
$$\frac{4}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{3}$$
따라서 조건부확률의 정의에 의하여 구하는 확률은
$$\frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{15}+\frac{1}{3}}=\frac{2}{7}$$
답 ④

K055 | 답 ④

[풀이]
흰 공과 검은 공을 각각 ○, ●라고 하자.
$A(○) ⇨ B(●, ●, ●)$: $\frac{1}{3}\times\frac{{}_3C_3}{{}_7C_3}=\frac{1}{105}$
$A(●) ⇨ B(●, ●, ●)$: $\frac{2}{3}\times\frac{{}_4C_3}{{}_7C_3}=\frac{8}{105}$
따라서 구하는 확률은
$$1-\left(\frac{1}{105}+\frac{8}{105}\right)=\frac{32}{35}$$
답 ④

K056 | 답 ①

[풀이]
7 이하의 자연수 중에서 홀수는 1, 3, 5, 7이고, 짝수는 2, 4, 6이므로 7 이하의 자연수 중에서 짝수의 개수는 3이다. 5번째까지 시행을 한 후 시행을 멈추기 위해서는 4번째 시행까지 짝수가 적혀 있는 공과 홀수가 적혀 있는 공이 나오는 횟수가 각각 2, 2이어야 하고, 5번째 시행에서는 짝수가 적힌 공

L032

○○
◇(2012(9)−나형16)

어느 공장에서 생산되는 제품 A의 무게는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 1)$을 따르고, 제품 B의 무게는 정규분포 $\mathrm{N}(2m,\ 4)$를 따른다. 이 공장에서 생산된 제품 A와 제품 B에서 임의로 제품을 1개씩 선택할 때, 선택된 제품 A의 무게가 k 이상일 확률과 선택된 제품 B의 무게가 k 이하일 확률이 같다. $\dfrac{k}{m}$의 값은? [4점]

① $\dfrac{11}{9}$　② $\dfrac{5}{4}$　③ $\dfrac{23}{18}$
④ $\dfrac{47}{36}$　⑤ $\dfrac{4}{3}$

L033

○○
◇(2013(9)−나형27)

A과수원에서 생산하는 귤의 무게는 평균이 86, 표준편차가 15인 정규분포를 따르고, B과수원에서 생산하는 귤의 무게는 평균이 88, 표준편차가 10인 정규분포를 따른다고 한다. A과수원에서 임의로 선택한 귤의 무게가 98 이하일 확률과 B과수원에서 임의로 선택한 귤의 무게가 a 이하일 확률이 같을 때, a의 값을 구하시오. (단, 귤의 무게의 단위는 g이다.) [4점]

L034

○○
◇(2017(9)−가형10)

어느 실험실의 연구원이 어떤 식물로부터 하루 동안 추출하는 호르몬의 양은 평균이 30.2mg, 표준편차가 0.6mg인 정규분포를 따른다고 한다. 어느 날 이 연구원이 하루 동안 추출한 호르몬의 양이 29.6mg 이상이고 31.4mg 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.3830　② 0.5328　③ 0.6247
④ 0.7745　⑤ 0.8185

L035

○○
◇(2008−가형13/나형13)

어느 회사의 전체 신입 사원 1000명을 대상으로 신체검사를 한 결과, 키는 평균 m, 표준편차 10인 정규분포를 따른다고 한다. 전체 신입 사원 중에서 키가 177 이상인 사원이 242명이었다. 전체 신입 사원 중에서 임의로 선택한 한 명의 키가 180 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 키의 단위는 cm이다.) [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.7	0.2580
0.8	0.2881
0.9	0.3159
1.0	0.3413

① 0.1587　② 0.1841　③ 0.2119
④ 0.2267　⑤ 0.2420

L031 | 답 ③

[풀이]

확률변수 X, Y는 각각 정규분포

$\mathrm{N}(m,\ (2\sigma)^2), \mathrm{N}(2m,\ \sigma^2)$

을 따른다.

▸ ㄱ. (참)

$$\mathrm{P}(X \le 0) = \mathrm{P}\left(Z \le -\frac{m}{2\sigma}\right)$$

$$\mathrm{P}\left(Y \ge \frac{5}{2}m\right) = \mathrm{P}\left(Z \ge \frac{m}{2\sigma}\right)$$

표준정규분포의 확률밀도함수는 z축에 대하여 대칭이므로

$$\therefore\ \mathrm{P}(X \le 0) = \mathrm{P}\left(Y \ge \frac{5}{2}m\right)$$

▸ ㄴ. (거짓)

$$\mathrm{P}(m \le X \le 2m) = \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{m}{2\sigma}\right)$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{P}(2m \le Y \le 3m) = \frac{1}{2}\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{m}{\sigma}\right)$$

일반적으로

$$\therefore\ \mathrm{P}(m \le X \le 2m) \ne \frac{1}{2}\mathrm{P}(2m \le Y \le 3m)$$

▸ ㄷ. (참)

$$\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{a-m}{2\sigma}\right) + \mathrm{P}\left(Z \le \frac{b-2m}{\sigma}\right) = 1$$

이 되려면 $\dfrac{a-m}{2\sigma} = \dfrac{b-2m}{\sigma}$이다.

정리하면

$$\therefore\ b = \frac{a+3m}{2}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

L032 | 답 ⑤

[풀이]

제품 A의 무게를 X라고 하면,

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 1^2)$을 따른다.

$Z = \dfrac{X-m}{1}$으로 두면

확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$을 따른다.

제품 A의 무게가 k 이상일 확률은

$\mathrm{P}(X \ge k) = \mathrm{P}(Z \ge k-m)$

제품 B의 무게를 Y라고 하면,

확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(2m,\ 2^2)$을 따른다.

$Z = \dfrac{Y-2m}{2}$으로 두면

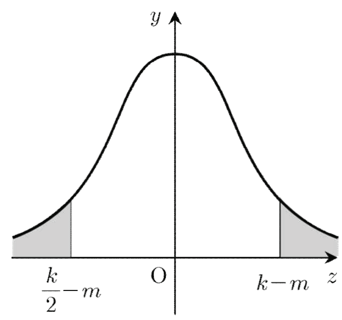
확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$을 따른다.

제품 B의 무게가 k 이하일 확률은

$$\mathrm{P}(Y \le k) = \mathrm{P}\left(Z \le \frac{k-2m}{2}\right)$$

주어진 조건에서

$$\mathrm{P}(Z \ge k-m) = \mathrm{P}\left(Z \le \frac{k-2m}{2}\right)$$



표준정규분포의 확률밀도함수의 그래프에서

$$k-m = -1 \times \left(\frac{k}{2} - m\right)$$

정리하면

$$\therefore\ \frac{k}{m} = \frac{4}{3}$$

답 ⑤

L033 | 답 96

[풀이]

A 과수원에서 생산하는 귤의 무게를 X라고 하면

X는 정규분포 $\mathrm{N}(86,\ 15^2)$을 따른다.

$Z = \dfrac{X-86}{15}$이라고 하면

Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$을 따른다.

$$\mathrm{P}(X \le 98) = \mathrm{P}\left(Z \le \frac{4}{5}\right)$$

B과수원에서 생산하는 귤의 무게를 Y라고 하면

Y는 정규분포 $\mathrm{N}(88,\ 10^2)$을 따른다.

$Z = \dfrac{X-88}{10}$이라고 하면

Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$을 따른다.

$$\mathrm{P}(X \le a) = \mathrm{P}\left(Z \le \frac{a-88}{10}\right)$$

주어진 조건에서

$$\mathrm{P}\left(Z \le \frac{4}{5}\right) = \mathrm{P}\left(Z \le \frac{a-88}{10}\right)$$

이므로

$\frac{4}{5}=\frac{a-88}{10}$

풀면

$\therefore\ a=96$

답 96

L034 | 답 ⑤

[풀이]

이 식물로부터 하루 동안 추출하는 호르몬의 양을 X라고 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(30.2,\ 0.6^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-30.2}{0.6}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(29.6 \le X \le 31.4)$

$=\mathrm{P}(-1 \le Z \le 2)$

$=\mathrm{P}(-1 \le Z \le 0)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$

$=\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$

$=0.3413+0.4772$

$=0.8185$

답 ⑤

L035 | 답 ①

[풀이]

이 회사의 신입사원의 키를 X라고 하면

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 10^2)$을 따른다.

$Z=\frac{X-m}{10}$로 두면

확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$을 따른다.

주어진 조건에 의하여

$\mathrm{P}(X \ge 177)=\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{177-m}{10}\right)=\frac{242}{1000}$

이므로

$\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{177-m}{10}\right)=0.5-0.242=0.258$

주어진 표준정규분포표에서

$\frac{177-m}{10}=0.7$ 풀면 $m=170$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X \ge 180)=\mathrm{P}(Z \ge 1)$

$=0.5-\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)=0.5-0.3413=0.1587$

답 ①

L036 | 답 ④

[풀이]

이 농장의 생후 7개월 된 돼지의 무게를 X라고 하면, 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(110,\ 10^2)$을 따른다. 우량 돼지 선발대회에 보낼 돼지의 최소 무게를 x라고 하면

$\mathrm{P}(X \ge x)=\frac{3}{200}$

$Z=\frac{X-110}{10}$으로 두면 확률변수 Z는 표준정규분포를 따른다.

$\mathrm{P}(X \ge x)=\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{x-110}{10}\right)=0.015$

$\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{x-110}{10}\right)=0.5-0.015=0.485$

주어진 표준정규분포표에서

$\frac{x-110}{10}=2.17$

$\therefore\ x=131.7$

답 ④

L037 | 답 ②

[풀이]

시험 점수를 X라고 하면

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(500,\ 25^2)$을 따른다.

$Z=\frac{X-500}{25}$으로 두면

확률변수 Z는 표준정규분포를 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$따른다.

구하는 확률은

$\mathrm{P}(475 \le X \le 550)=\mathrm{P}(-1 \le Z \le 2)$

$=\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$

$=0.3413+0.4772=0.8185$

답 ②

L038 | 답 ①

[풀이]

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}\left(\frac{3}{2},\ 2^2\right)$을 따른다.

$Z=\frac{X-\frac{3}{2}}{2}$으로 두면

확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$을 따른다.

함수 $H(t)$의 방정식은

$H(t)=\mathrm{P}(t \le X \le t+1)$