[2016년 06월 평가원 수학(나형) 30번]

30. 다음 조건을 만족시키는 20 이하의 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

> $\log_2(na-a^2)$과 $\log_2(nb-b^2)$은 같은 자연수이고
>
> $0<b-a\le\frac{n}{2}$인 두 실수 a, b가 존재한다.

sol)

첫째로 $\log_2(na-a^2)$과 $\log_2(nb-b^2)$이 같은 자연수라고 하였습니다.

그러므로 이들을 적당한 자연수 N에 대해서

$$\log_2(na-a^2)=N=\log_2(nb-b^2)$$

이라 두면 $na-a^2=2^N=nb-b^2$이 됩니다. 이것으로 로그의 역할은 끝났습니다.

그리고 이를 기하적으로 해석하면 $y=nx-x^2$이라는 이차함수와 $y=2^N$이라는 상수함수 간에 교점의 x좌표가 각각 a와 b라는 얘기가 됩니다. 물론 a, b 모두 실수입니다.

이차함수 $y=nx-x^2=x(n-x)$의 대칭축은 $x=\dfrac{n}{2}$이고,

따라서 a, b는 $\dfrac{n}{2}$ 대칭인 관계 혹은 $a+b=n$가 되어야 합니다.

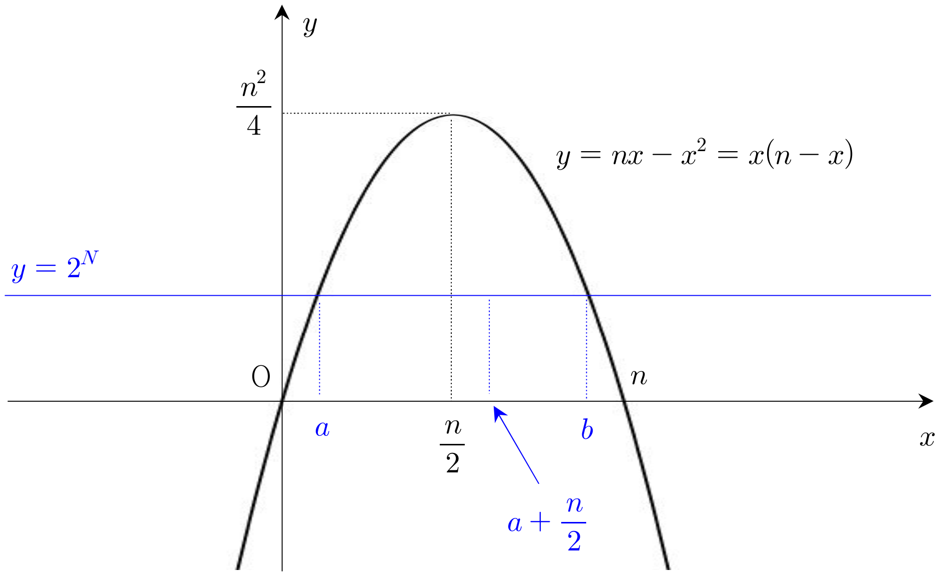
다음으로 $0<b-a\le\dfrac{n}{2}$라 하였는데, 이로부터 $a<b\le a+\dfrac{n}{2}$라는 대소관계를 얻게 되고,

a, b가 $\dfrac{n}{2}$ 대칭이라는 사실을 덧붙이면 $0<a\le\dfrac{n}{2}\le b\le a+\dfrac{n}{2}\le n$이 됩니다.

이때 부등호에서 등호 성립 부분을 조금 자세히 살펴보도록 하면 $0<b-a\to a<b$에서

$a\ne b$이므로 $a<\dfrac{n}{2}<b$가 되어야 하며, $0<a<\dfrac{n}{2}<b\le a+\dfrac{n}{2}<n$이라는 유용한 부등식을 이끌어낼 수 있습니다. 이를 잘 분석해야 그 다음 단계로 넘어갈 수 있습니다.

이 타이밍에 그래프를 통해 관찰을 해보면 다음과 같습니다.

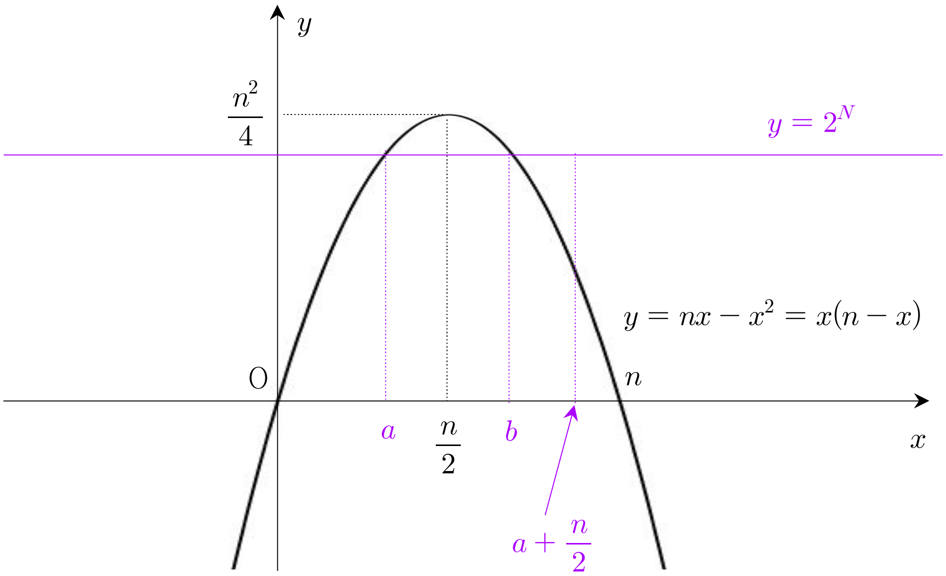


그런데 말입니다. 여기서 때 아닌 문제가 발생합니다.

바로 $0 < a < \frac{n}{2} < b \le a + \frac{n}{2} < n$에서도 $b \le a + \frac{n}{2}$ 부분입니다.

왜냐하면 위 그래프에 따르면 눈으로 봐도 $a + \frac{n}{2} < b$로서 만족하지 않기 때문입니다.

이 문제를 해결하기 위해서는 다음과 같이 $y = 2^N$이 조금 더 이차함수 $y = nx - x^2$의 최댓값에 더 근접한 모습이어야 합니다.



그렇다면 $a + \frac{n}{2}$와 b 대소관계의 경계가 되는 $b = a + \frac{n}{2}$가 되는 순간에는,

$a + b = n$과 연립해보면 $a = \frac{n}{4}$과 $b = \frac{3}{4}n$이 되어야 함을 알 수 있습니다.

이때 이차함수의 y값은 $\frac{n}{4}\left(n - \frac{n}{4}\right) = \frac{3}{16}n^2$이고,

따라서 $\frac{3}{16}n^2 \le 2^N < \frac{n^2}{4}$를 만족해야 합니다.

즉, 20이하의 자연수 n에 대해 자연수 N이 존재만 하면 실수 a, b도 존재하노라고 말할 수 있는 것입니다. 이러한 n, N, a, b의 복잡한 관계가 문제를 어렵게 만드는데 한 몫 하였습니다.

그런데 부등식 $\frac{3}{16}n^2 \le 2^N < \frac{n^2}{4}$에 $n = 1, 2, 3, \cdots$를 대입하자니 분수 계산이 자꾸 등장하므로 비효율적입니다. 이러한 상황을 타개하려면 조금은 참신하고도 창의적인 사고가 필요합니다!

만약 자연수 n에 대해 자연수 N값이 결정된다면,

반대로 자연수 N값에 대해서도 어떤 n값이 대응될 것입니다.

기준을 바꾸어서 $N = 1, 2, 3, \cdots$를 대입하여 존재하는 n을 찾자는 것이죠.

즉, $\boxed{\frac{3}{16}n^2 \le 2^N < \frac{n^2}{4}}$ 대신에 $\boxed{2^{N+2} < n^2 \text{과 } 3n^2 \le 2^{N+4}}$ 로서 생각해봅시다.

$N=1$이면 $8 < n^2$이고 $3n^2 \le 32$로서 $n=3$으로 존재하고,

$N=2$이면 $16 < n^2$이고 $3n^2 \le 64$로서 n이 존재하지 않으며,

$N=3$이면 $32 < n^2$이고 $3n^2 \le 128$로서 $n=6$으로 존재합니다.

또, $N=4$이면 $64 < n^2$이고 $3n^2 \le 256$로서 $n=9$이고,

$N=5$이면 $128 < n^2$이고 $3n^2 \le 512$로서 $n^2 = 12^2, 13^2$, 즉 $n=12, 13$이고,

$N=6$이면 $256 < n^2$이고 $3n^2 \le 1024$로서 $n^2 = 17^2, 18^2$, 즉 $n=17, 18$이며

$N=7$이면 $512 < n^2$이고 $3n^2 \le 2048$로서 $n^2 > 200$이기에 20을 벗어나게 됩니다.

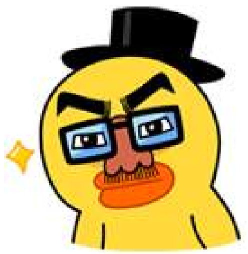
$12^2 = 144, 13^2 = 169, 14^2 = 196, 15^2 = 225$과

$16^2 = 256, 17^2 = 289, 18^2 = 324, 19^2 = 361$정도는 금방 금방 계산할 수 있겠죠?

이러한 계산 장벽을 극복해야 이러한 문제도 거뜬히 맞춰낼 수 있다 해도 과언이 아닙니다!

이를 종합하면 $n = 3, 6, 9, 12, 13, 17, 18$이 가능하며

그 합은 $3+6+9+12+13+17+18=78$이 답이 됩니다.



"개수 세기 너무 싫어요.

이런 문제는 어떻게 대비해야 하나요?"

A. 열공 + 기출분석 하세요!

[2016년 03월 교육청 수학(나형) 21번]

21. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

집합 $A = \{x \mid x^2 - 1 < a < x^2 + 2x,\ x\text{는 자연수}\}$

가 공집합이 되도록 하는 자연수 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자.

예를 들어, $a=3$은 $x^2-1<a<x^2+2x$를 만족시키는 자연수 x가 존재하지 않는 첫 번째 수이므로 $a_1 = 3$이다.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

위와 같이 올해 시험 중에서도 나름 비슷한 느낌의 문제들이 출제되었습니다.

그동안 주로 문과 수학 시험에서는 이과생도 풀기 난해할 만큼 어려운 개수 세기 문제가 끝판 대장으로 자주 나왔습니다. 때때로 이과 킬러문제보다 어렵다는 인상이 들 때도 있을 정도로, 정말 정말 어려워서 수험생들의 발목을 많이 붙잡았죠.

그리고 이번에 교육과정이 개정되면서 많은 부분이 빠져서 '지수로그 단원이 약화되지 않을까..' 하는 실낱같은 희망을 가진 분이 계셨을 수도 있습니다.

안타깝게도 지금 우리가 마주한 06월 평가원 30번 문제로 인해서

지수로그는 결국 밤하늘의 달을 가리키는 손가락에 불과함을 알 수 있습니다.

지수로그는 그저 수학적인 내용을 다루는 도구일 뿐이니 없어도 그만이라는 소리죠!

그래서 껍데기는 비록 로그문제처럼 보였지만 알맹이는 이차함수 개형 분석이었고,

부등식 해석을 통해 자연수 값들을 이끌어 내는 것이 진정한 출제자의 의도였다고 봅니다.

[2015년 06월 평가원 수학 영역(A형) 30번]

30. 2 이상의 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수가 300 이상이 되도록 하는 가장 작은 자연수 k의 값을 $f(n)$이라 할 때, $f(2)\times f(3)\times f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $a < n^k$이면 $b \le \log_n a$이다.
(나) $a \ge n^k$이면 $b \le -(a-n^k)^2+k^2$이다.

[2015년 11월 대수능 수학 영역(A형) 30번]

30. $x \ge \frac{1}{100}$인 실수 x에 대하여 $\log x$의 가수를 $f(x)$라 하자. 다음 조건을 만족시키는 두 실수 a, b의 순서쌍 (a, b)를 좌표평면에 나타낸 영역을 R라 하자.

(가) $a<0$이고 $b>10$이다.
(나) 함수 $y=9f(x)$의 그래프와 직선 $y=ax+b$가 한 점에서만 만난다.

영역 R에 속하는 점 (a, b)에 대하여 $(a+20)^2+b^2$의 최솟값은 $100\times\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

그러니 이러한 기출문제들을 보더라도

'어?! '가수'가 나온 문제나 지나치게 복잡한 지수로그 문제는 안 풀어도 될거야~'

하는 생각을 갖고 있었다면 얼른 제고하고서, 꼼꼼하게 애정을 갖고서 분석 하셔야 합니다.

그러다 보면 언젠가는 이번 06월 평가원 30번 문제를 해결하는 데 있어 핵심 아이디어가 유사했던 다음의 문제도 만나볼 수 있습니다.

[2011년 11월 대수능 수리(나형) 30번]

30. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 영역

$$\{(x,\ y)\,|\,2^x - n \le y \le \log_2(x+n)\}$$

에 속하는 점 중 다음 조건을 만족시키는 점의 개수를 a_n이라 하자.

(가) x좌표와 y좌표는 서로 같다.
(나) x좌표와 y좌표는 모두 정수이다.

예를 들어, $a_1=2$, $a_2=4$이다. $\sum_{n=1}^{30} a_n$의 값을 구하시오. [4점]

바로, $n = 1, 2, 3, \cdots$ 순서대로 대입해서 확인하다가
계산이 너무
귀찮고, 복잡하고, 해야 하나 말아야 하나 고민이 되고, 출제자가 이걸 정말 생각했는지 의심이 들고, 시간은 자꾸 흘러가서 촉박한데 앞 문제 한 번 더 살펴보고 올까 생각도 드는 상황에서 역발상으로, 다른 기준이 되는 n을 찾는 문제입니다.

위의 수능 문제에서는 $y = \log_2(x+n)$이 $y = x$와 격자점에서 교점을 갖는 순간의 n을 기준으로 생각하면 계산이 확연히 줄어들고,
아까 전 평가원 문제에서는 $\frac{3}{16}n^2 \le 2^N < \frac{n^2}{4}$ 대신에 $2^{N+2} < n^2$과 $3n^2 \le 2^{N+4}$로서 생각하면 계산이 엄청 줄어든다는 공통점이 있습니다.

이런 내용은 예컨대 교과서에 "다른 기준이 되는 n값 찾기"라는 단원이 존재해서 여러분에게 친절하게 가르쳐주는 것이 아니기 때문에, 오직 스스로 기출 문제를 안고 오래도록 고민 또 고민하여서 힘겹게 깨달음을 얻을 수 있는 부분이기도 합니다.