2009년 수능 4점

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $-1 \leq x < 1$일 때, $g(x) = f(x)$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2) = g(x)$이다.

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? 1)

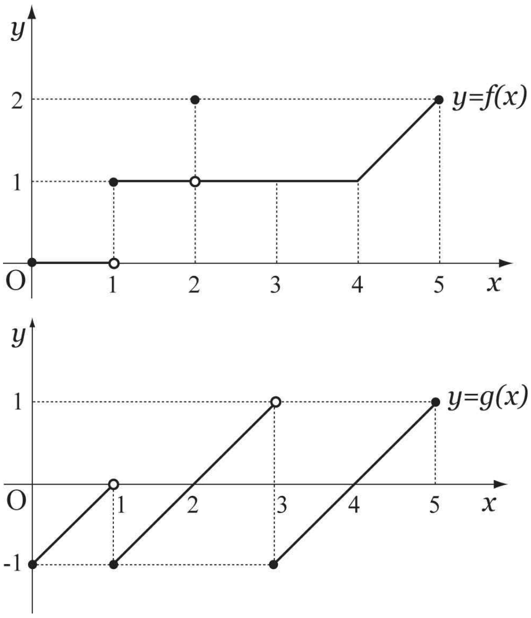
[보 기]

ㄱ. $f(-1) = f(1)$이고 $f'(-1) = f'(1)$이면, $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
ㄴ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면,
$f'(0)f'(1) < 0$이다.
ㄷ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고
$f'(1) > 0$이면, 구간 $(-\infty, -1)$에 $f'(c) = 0$인 c가 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2009년 교육청 4점

그림과 같이 구간 $[0,\ 5]$를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? 2)



[보 기]

ㄱ. 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$는 $x=2$에서 연속이다.

ㄴ. 함수 $(g\circ f)(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$는 $x=4$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2009년 평가원 4점

사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\dfrac{f'(5)}{f'(3)}$ 의 값을 구하시오. 3)

(가) 함수 $f(x)$는 $x=2$ 에서 극값을 갖는다.
(나) 함수 $|f(x)-f(1)|$ 은 오직 $x=a$ $(a>2)$ 에서만 미분가능하지 않다.

2011년 수능 4점

최고차항의 계수가 1이고, $f(0)=3$, $f'(3)<0$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 집합 S를 $S=\{\mathrm{a}\,|$함수 $|f(x)-t|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않다.$\}$
라 하고, 집합 S의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=3$과 $t=19$에서만 불연속일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. 4)

2012년 평가원 4점

함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-1$ 과 실수 m 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x) \geqq mx) \\ mx & (f(x) < mx) \end{cases}$$

라 하자. $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, m 의 값은? 5)

① -14　　② -12　　③ -10

④ -8　　⑤ -6

2014년 수능 4점

좌표평면에서 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선이 y축과 만나는 점을 P라 할 때, 원점에서 점 P까지의 거리를 $g(t)$라 하자. 함수 $f(x)$와 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=2$
(나) 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$f(3)$의 값은? 6) (단, a, b는 상수이다.)

① 21 ② 24 ③ 27 ④ 30 ⑤ 33

2016년 수능 4점

다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $\frac{f'(0)}{f(0)}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. Mm의 값은? 7)

(가) 함수 $|f(x)|$는 $x=-1$에서만 미분가능하지 않다.
(나) 방정식 $f(x)=0$은 닫힌구간 $[3, 5]$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

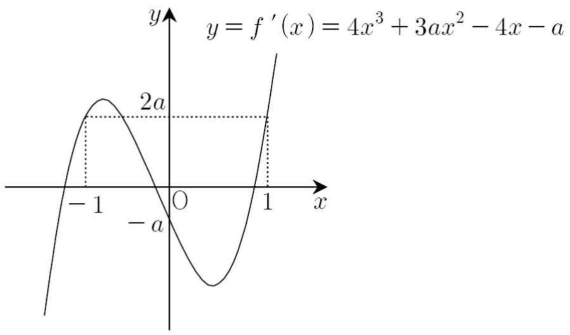
① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{2}{15}$
④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

1) 정답 ③

ㄱ. 사차함수 $f(x)$에 대하여 주기가 2인 주기함수
$g(x)$가 실수전체의 집합에서 미분가능하기 위한 필요충분조건은
$f(1)=f(-1)$, $f'(1)=f'(-1)$ (참)

ㄴ. $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$라 하면
$f(1)=1+a+b+c+d$
$f(-1)=1-a+b-c+d$
$f(1)=f(-1)$이므로 $a+c=0$,
$\therefore\ c=-a$
$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$이고
$f'(1)=4+3a+2b+c$
$f'(-1)=-4+3a-2b+c$
$f'(1)=f'(-1)$이므로 $4+2b=0$
$\therefore\ b=-2$
즉, $f(x)=x^4+ax^3-2x^2-ax+d$이고
$f'(x)=4x^3+3ax^2-4x-a$이다.
$f'(0)=-a$, $f'(1)=4+3a-4-a=2a$이므로
$f'(0)f'(1)=-2a^2\le 0$ (거짓)

ㄷ. $f'(-1)=f'(1)=2a$ 이고 $f'(1)>0$이므로 $a>0$
$f'(0)=-a<0$이므로 $y=f'(x)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 구간 $(-\infty,\ -1)$에 $f'(c)=0$인 c가 존재한다. (참)

2) 정답 ⑤

ㄱ. $\dfrac{g(2)}{f(2)}=0$, $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{g(x)}{f(x)}=0$ (참)

ㄴ. $g(f(1))=-1$, $\lim\limits_{x\to1}g(f(x))=-1$(참)

ㄷ. $f(x)=\begin{cases}1 & (3\leqq x<4)\\ x-3 & (4\leqq x\leqq5)\end{cases}$,

$g(x)=x-4$ ($3\leqq x\leqq5$)

$f(x)g(x)=\begin{cases}x-4 & (3\leqq x<4)\\ (x-3)(x-4) & (4\leqq x\leqq5)\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to4-0}\dfrac{f(x)g(x)-f(4)g(4)}{x-4}=1$

$\lim\limits_{x\to4+0}\dfrac{f(x)g(x)-f(4)g(4)}{x-4}=1$ (참)

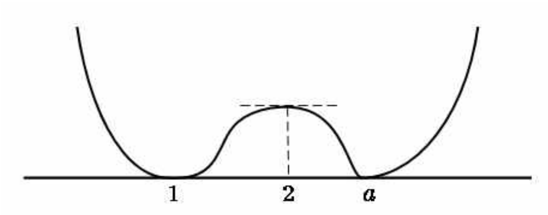
3) 정답 12

$g(x)=f(x)-f(1)$ 이라 하면

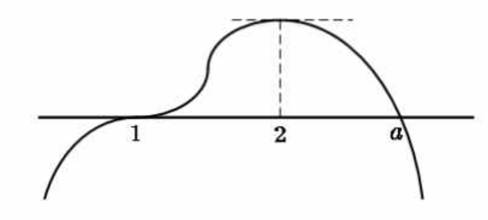
$g(1)=g'(1)=0,\ g'(2)=0$

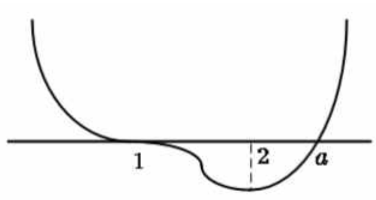
$y=|g(x)|$ 는 $x=1$ 에서 극값을 갖는다.

따라서 (나)의 조건에 맞도록 $y=|g(x)|$ 의 그래프를 그려 보면 아래그림과 같다.



$y=g(x)$ 의 그래프는 다음 두 가지 경우에 해당한다.





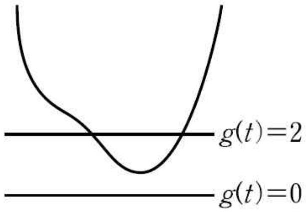
$\therefore\ g'(x)=a(x-1)^2(x-2)=f'(x)\ (a\neq 0)$

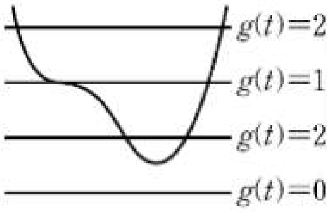
$$\frac{f'(5)}{f'(3)}=\frac{48a}{4a}=12$$

4) 정답 147

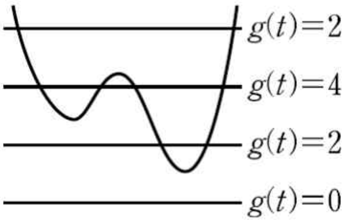
[해설]

만약 $y=f(x)$의 그래프가 극점을 하나만 가진다면, $g(t)$가 불연속인 점은 하나이거나 셋이다.





따라서 $y=f(x)$의 그래프는 두 개의 극솟점과 하나의 극댓점을 가진다. 또한 $y=f(x)$의 그래프가 두 개의 극솟값을 가지면, $g(t)$가 불연속인 점은 3개다.



따라서 $y=f(x)$의 그래프의 두 개의 극솟점의 극솟값은 같다.

$f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2+k$이고, 극솟값이 3이어야 하므로 $k=3$

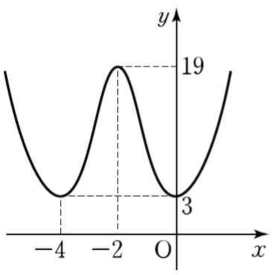
$f(x)=3$의 한 근이 0 이므로 $f(x)=x^2(x-\alpha)^2+3$

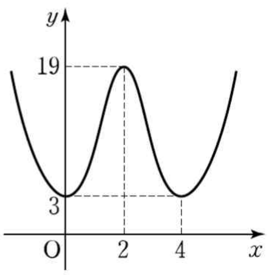
$f'(x)=2x(x-\alpha)^2+2x^2(x-\alpha)=2x(x-\alpha)(2x-\alpha)=0$에서

(극댓값)$=f\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{\alpha^4}{16}+3=19$

$\therefore \alpha=\pm 4$

그런데, $\alpha=-4$이면 $f'(3)>0$이므로 $\alpha=4$





$f(x)=x^2(x-4)^2+3,\ f(-2)=4\times 36+3=147$

5) ②

$f(x)=mx$ 인 $x=\alpha$ 라 하면

$x=\alpha$ 에서 미분가능하므로

$\alpha^3-3\alpha^2-9\alpha-1=m\alpha$ …… ㉠

$3\alpha^2-6\alpha-9=m$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $(\alpha-1)^2(2\alpha+1)=0$

$\therefore\ \alpha=1$ 또는 $\alpha=-\frac{1}{2}$

그래프를 그려보면, $\alpha=1$ 일 때 $m=-12$ 이고 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하지만 $\alpha=-\frac{1}{2}$ 일 때 $m=-\frac{21}{4}$ 이고 $g(x)$ 는 $x>0$ 에서 미분불가능한 뾰족한 점이 발생한다. (그래프 생략)

따라서 $m=-12$

6) 정답 ④

접점 $(t,\ t^3+at^2+bt)$에서의 접선의 방정식은

$y=(3t^2+2at+b)(x-t)+t^3+at^2+bt$

$y=(3t^2+2at+b)x-2t^3-at^2$

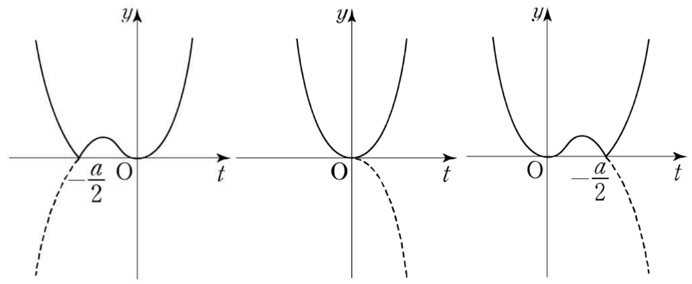
따라서 접선이 y축과 만나는 점 P의 좌표는

$\mathrm{P}(0,\ -2t^3-at^2)$

원점에서 점 P까지의 거리 $g(t)$는

$g(t)=|-2t^3-at^2|=t^2\cdot|2t+a|$

ⅰ) $a>0$일 때 ⅱ) $a=0$일 때 ⅲ) $a<0$일 때



따라서 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $y=g(t)$의 그래프는 t축과 단 한 점에서 만나야 한다. 따라서 $g(0)=0$이므로 $|2\times0+a|=0$

1. $\therefore\ a=0$

조건 (가)에서 $f(1)=1+a+b=2\quad\therefore\ b=1$

$\therefore\ f(x)=x^3+x$

$\therefore\ f(3)=3^3+3=30$

7) ⑤

[출제의도] 조건에 맞는 삼차함수를 찾아 $\dfrac{f'(0)}{f(0)}$의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

조건 (가)에 의하여

$$f(-1)=0$$

또한, 조건 (가), (나)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 닫힌 구간 $[3,\ 5]$에서 x축과 접하게 된다.
따라서

$$f(x)=k(x+1)(x-\alpha)^2\,(k\neq 0,\ 3\leq\alpha\leq 5)$$

라고 하면

$$f'(x)=k(x-\alpha)^2+2k(x+1)(x-\alpha)$$

이므로

$$\frac{f'(0)}{f(0)}=\frac{k\alpha^2-2k\alpha}{k\alpha^2}=1-\frac{2}{\alpha}$$

그런데, $3\leq\alpha\leq 5$이므로

$\alpha=3$일 때 최솟값 $m=\dfrac{1}{3}$

$\alpha=5$일 때 최댓값 $M=\dfrac{3}{5}$

$\therefore\ Mm=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{5}$